

「数学と自然」 資料 N0.2b (suu012b.pdf)

素数の話には、たくさん話題があります。易しいものから難しいものまで、小学生、中学生が解ける問題から、まだ未解決であり、多くの数学者が取り組んでいる問題があります。フェルマーの最終定理も話題になりましたから、記憶に残っているとおもいます。問題は簡単に述べることができます。

「3 以上の自然数 n で、 $x^n + y^n = z^n$ となる 0 でない自然数 (x, y, z) の組は存在しない」

というもので、17 世紀フランスのピエール・ド・フェルマー（1601 年—1665 年）が「私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを書くには狭すぎる」（フェルマーの息子、サミュエルによる『算術』）と書き残し、その証明が長い間なぞとされてきました。ピタゴラス数とは $n = 2$ の場合: $x^2 + y^2 = z^2$ で、これは、遠く 4000 年前の古代バビロニアの粘土板「コロンビア大学所蔵の Plimpton Collection 322」には、(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41) など 15 個の組が刻まれているとのことです。100 まで調べると、5050 組あることも知られていますが、これが $n = 3$ にすると、とたんにゼロとなってしまいます。もちろん $n = 4, n = 5$ でもみつけれません。彼の空白に残した書き込みは、多く証明が記されておらず、最後まで真偽が分らず、フェルマーの最終定理とよばれます。多くの無名、有名の数学者が証明に挑んできましたが、派生の数学発展の寄与はなされてきましたが、未解決とされてきました。予想と定理の狭間が、アンドリュウ・ワイルズにより、1995 年 *Annals of Mathematics* 141(3) 443-551 の論文として、フェルマー・ワイルズの定理とよばれるものになりました。

ミレニアム懸賞問題は、100 万ドルの懸賞金がもらえます。スーパーコンピュータをつくる会社が 7 つの問題を発表しています。そのうちの「リーマン予想」も素数に関する問題で、こちらは命題を述べることは「ゼータ関数」 $\zeta(s)$ というちょっとした手ごわい準備が必要です。

この説明は「素数に憑かれた人たち (Prime Obsession)」John Derbyshire（日経 B P 社、2004 年）を読んで参考にしています。妄想などに取りつかれることが Obsession の意味です。この本は非常に分かり易く、このリーマン予想を説明し、楽しく読ませてくれます。題名からしてもウィットが効きすぎているかも知れませんが。

ここで話が突然、数列の無限和になります。自然数の逆数 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$ は、ゼロに近づきますが、和をとると無限大にどんどん大きくなっていきます。ですからもっと小さくなるような列、例えばそれを 2 乗します。 $\left\{1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \dots\right\}$ こんどは収束します。証明は幾何級数と比較することで、微分積分の教科書には必ず載っているほどですから、調べてみてください。しかし問題はその極限の値です。そう簡単なものではありません。数値の計算は電卓でもできるでしょう。Derbyshire は $\sqrt{\frac{46}{17}} = 1.6449566416599$, $\left(\frac{11983}{995}\right)^{1/5} = 1.6449340695361$, $(7766)^{1/18} = 1.6448340090839$ などとどうやって見つけたのか不思議な数を並べますが、いづれでもありません。答えは $\frac{\pi^2}{6}$ なのです。この問題はバーゼル問題 (Basel problem) とよばれます。バーゼルはフランスとスイスの国境にある地名です。これを解いたのが、オイラーです。有名なレオンハルト・オイラー (1707 年—1783 年) の生まれ故郷であり、オイラーは微分積分から 19 世紀の数学に続く時代をつくりました。その業績を運ぶには、トランクでは収まらず、フォークリフトが必要と書いてあるほどです。有名なベルヌーイ (ヨハン、ヤコブ、ニコラスなど学者の家系) でさえ、解けなかった難問でした。

リーマンは素数の分布を研究するときに、オイラーの研究した自然数の 2 乗和を一般の数 s におきかえ、

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \dots$$

をゼータ関数と名付けました。 $s = 1$ では発散しますから、 $s \neq 1$ としますし、もっと拡張して、複素数までも対象としています。「リーマン予想」とは何か、これはみなさんが調べてください。

ここの話の主題は「素数」ですから。そこでオイラーの積公式 (Euler product) を述べます。その関係式は

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{11^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{13^s}} \dots\end{aligned}$$

積の表現式の分母に表れる数は素数なのです。とても不思議な感じですね。厳密な証明とまではいきませんが、Derbyshire が紹介していた直観的、簡潔な証明を述べることにしましょう。

(i) $\zeta(s)$ の両辺に $\frac{1}{2^s}$ をかけると

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{14^s} + \frac{1}{16^s} + \cdots$$

になります。これをもとの $\zeta(s)$ の等式から引くと、 $\zeta(s)$ でくくって

$$\begin{aligned} & \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) \\ = & \left\{ 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots \right\} - \left\{ \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{14^s} + \frac{1}{16^s} + \cdots \right\} \\ = & \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) \zeta(s) \\ = & 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{15^s} + \cdots \end{aligned}$$

2 の倍数が消えました。つぎに

(ii) この両辺に $\frac{1}{3^s}$ をかけます。

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \frac{1}{39^s} + \cdots$$

$\zeta(s)$ から引けば、3 の倍数を消すことができます。

$$\left(1 - \frac{1}{3^s} \right) \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \cdots$$

(iii) 同様にして、 $\frac{1}{5^s}, \frac{1}{7^s}, \frac{1}{11^s} \cdots$ と続けていきます。そうです。“エラトステネスの篩（ふるい）”を思い出したでしょう。このように無限に繰り返せば、残ってくるのは数値 1 のみです。ですから、

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{11^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{13^s}} \cdots$$

結論として、和の記号 $\sum$ と積の記号 $\prod$ をもちいると

$$\sum_{n: \text{自然数}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p: \text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

となります。自然数と素数の奇妙で魅力ある関係式ですね。

ちょっと“余白”があるので、素数分布の近似表を書きましょう。wikipedia からの参照です。 $\pi(x)$ は x 以下の素数の個数を数え上げる関数で、大衆は自然対数 $\ln x$ で底はオイラーの $e = 2.711828 \cdots$ としたものです。

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$
10	4	4.34..	0.92103..
100	25	21.71..	1.1513..
1000	168	144.76..	1.1605..
10000	1229	1085.73..	1.1320..
100000	9592	8685.89..	1.1043..

素数定理： $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ すなわち素数計数関数 (prime counting function) $\pi(x)$ は $\frac{x}{\ln x}$ で近似できる。
(以上)