例 1. $\frac{533}{169} = [3; 6, 2] = \boxed{3} + \frac{1}{\boxed{6} + \frac{1}{\boxed{2}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}$. この計算には、 $533 = \boxed{3} \times 169 + 26$, $169 = \boxed{6} \times 26 + 13$,

$26 = \boxed{2} \times 13$ として計算します。ユークリッドの互除法をつかっています。

例 2. $\frac{225}{157} = [1; 2, 3, 4, 5] = \boxed{1} + \frac{1}{\boxed{2} + \frac{1}{\boxed{3} + \frac{1}{\boxed{4} + \frac{1}{\boxed{5}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$ です。

Maxima では連分数の命令 (cf):(continued fraction の略) をもちいて、つぎで得られます。

```
(%i11) cf(225/157);
(%o11) [1,2,3,4,5]
```

例 3. 無理数であれば、有限個では終わらずに無限に続くことになります。

黄金比 $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \dots$. この値は方程式 $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ を満たしますから、移項して両辺を φ で割ります。 $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. 同じような形が出てきますから、繰り返しますと、 $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}$

$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}} = [1; 1, 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$ となり、“1” ばかりが並びま

す。神秘的な不思議さを感じますね。この他にもいろいろな連分数の性質があります。

最大公約数と不定方程式

ユークリッドの互除法は $g = \text{GCD}(a, b)$ とおいた一次方程式

$$ax + by = g$$

の少なくともひとつの整数解を与えます。

2つの整数 a と b について、これらの倍数の和で作られる数の全体を調べましょう。ですから、整数の集合 $\{ax + by \mid x, y \text{ はとり得るすべての整数}\}$ を考えます。例として、 $a = 42$, $b = 30$ とします。この値に対する $ax + by$ の値の変化を表に書き出します。表計算ソフトの絶対参照、複合参照をつかうと簡単に生成できますよ。

	$x = -3$	-2	-1	0	1	2	3
$y = -3$	-216	-174	-132	-90	-48	-6	36
-2	-186	-144	-102	-60	-18	24	66
-1	-156	-114	-72	-30	12	54	96
0	-126	-84	-42	0	42	84	126
1	-96	-54	-12	30	72	114	156
2	-66	-24	18	60	102	144	186
3	-36	$\boxed{6}$	48	90	132	174	216
4	-6	36	78	120	162	204	246

この表から (i) すべて 6 で割り切れる。なぜなら $42x + 30y = 6(7x + 5y)$ であるから。(ii) 42 と 30 の最大公約数 $6 = \text{GCD}(42, 30)$ が表に含まれています。ここでは枠で囲みました。(iii) この値は正値の最小値になる、という予想ができます。

もし a, b が互いに素であるならば、 $g = \text{GCD}(a, b) = 1$ であり、このとき、方程式

$$ax + by = 1$$

を満たすある一つの整数解 (x_0, y_0) がユークリッドの互除法から求められ、さらに一般解 (x, y) は整数 k を変化させた値

$$x = x_0 + kb, \quad y = y_0 + ka \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

で得られます。

問題：

$$225x + 157y = 1$$

の整数解を求めよ。

(答)

まず一般論の説明をしてから、解いてみます。

与えられた数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ に対して、 $p_0 = 1, p_1 = a, p_n = a_{n-1}p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_0 = 0, q_1 = 1, q_n = a_{n-1}q_{n-1} + q_{n-2}$ をつくと、

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_1 + \dots \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1}}}}} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n-1}p_{n-1} + p_{n-2}}{a_{n-1}q_{n-1} + q_{n-2}}$$

行列の表現では

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

行列式 (determinant) の計算をします。

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{bmatrix} &= (-1) \det \begin{bmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{bmatrix} = (-1)^n \\ \therefore p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)^n \end{aligned}$$

が得られます。それでは与えられた問題に適用しながら例題で説明しましょう。

連分数 $\frac{225}{157} = [1; 2, 3, 4, 5]$: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$ ですから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_3 & q_3 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_4 & q_4 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 30 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_5 & q_5 \\ p_4 & q_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 43 & 30 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 & 157 \\ 43 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって $225 \times 30 - 157 \times 43 = \det \begin{bmatrix} 225 & 157 \\ 43 & 30 \end{bmatrix} = -1$ となります。 $\therefore 225 \times (-30) + 157 \times 43 = 1$

これから $\begin{cases} x = -30 \\ y = 43 \end{cases}$ が一つの解 (特殊解) です。さらに一般解を求めると $\begin{cases} 225 \times 30 - 157 \times 43 = -1 \\ 225 \times x + 157 \times y = 1 \end{cases}$ から、

$$225(x + 30) + 157(y - 43) = 0$$

ここで 225, 157 は互いに素であるから、 $x + 30$ は 157 の倍数、つまり、 $x + 30 = 157t$ (t は整数) の形。同様にして $y - 43 = 225t$ だから、一般解は、 $\begin{cases} x = -30 + 157t \\ y = 43 - 225t \end{cases}$ として得られました。(終)