

「数学と自然」

◇◇◇ 練習問題 NO.1 ◇◇◇

参考資料 N0.1 (suu011.pdf)

キーワード：素数、素因数問題、最大公約数、最小公倍数、ユークリッドの互除法

問 1.

1 から 100 までのなかに含まれる素数を、エラトステネスの篩で調べるには、「2, 3, 5, 7, 11 の 5 個の倍数」を消去すれば得られます。その理由を説明しなさい。

問 2.

349 までには 70 個素数があります。これを選んで表にまとめなさい。

問 3.

「素因数分解」の説明文には、49 から 493 まで掲げた 20 個の合成数があります。これらを参考にして、1 から 500 程度までの数を合成数であれば、素因数分解した形に、あるいは素数であるとして、表にまとめなさい。

問 4.

つぎの x, y に関する方程式において

$$(i) 7x + 11y = 1 \quad (ii) 12x + 34y = \gcd(12, 34)$$

の整数解をひとつ求めよ。

問 5.

最大公約数

$$\gcd(1160718174, 316258250) = 1078$$

となることを示しなさい。

「数学と自然」 (suu011M.pdf)

◇ ◇ ◇ 練習問題 NO.2 ◇ ◇ ◇

参考資料 N0.2 (suu012b.pdf)

キーワード：Maxima 数式処理、連分数、最大公約数と不定方程式

問 1.

分数 $\frac{533}{169}$ を連分数 $[3; 6, 2]$ として表せますが、 169×169 の大きさの正方形を 3 つ並べ、 26×26 を 6 個並べ、さらに、 13×13 を 2 個並べれば、ちょうど長方形のサイズ 169×533 に収まります。これを図示してみなさい。

問 2.

- (1) $\gcd(533, 169) = 13$ を示せ。
- (2) $533x + 169y = 13$ の一般解を求めよ。

問 3.

- (1) つぎの行列の積を計算しなさい。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) 分数 $\frac{35}{8}$ を連分数に表しなさい。
- (3) $8x + 35y = \gcd(8, 35)$ の整数解を求めなさい。

問 4. 与えられた整数の数列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ から 2 つの数列

- (i) $p_0 = 1, p_1 = a_0, p_n = a_{n-1}p_{n-1} + p_{n-2}$,
 - (ii) $q_0 = 0, q_1 = 1, q_n = a_{n-1}q_{n-1} + q_{n-2}$,
- を定めると、連分数 $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] = \frac{p_n}{q_n}$ の形に書き表せることを示せ。

問 5. 以下は連立方程式の解法の問題でクラメル公式とよばれるものです。

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = d \cdots ① \\ b_1x + b_2y = e \cdots ② \end{cases}$$

このとき、

① $\times b_2 + ② \times (-a_2)$ で変数 y が消去され、 x を求められ、

① $\times b_1 + ② \times (-a_1)$ で変数 x が消去され、 y を求める

ことができます。これを確かめてみてください。

もし 3 元連立方程式の場合には、

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = d \cdots ① \\ b_1x + b_2y + b_3z = e \cdots ② \\ c_1x + c_2y + c_3z = f \cdots ③ \end{cases}$$

ですから、このときには、

$$① \times (b_2c_3 - b_3c_2) + ② \times (a_3c_2 - a_2c_3) + ③ \times (a_2b_3 - a_3b_2)$$

で変数 y, z が消去され、 x を求められます。同様に y, z が残るようにするにはどういう操作をするばよいでしょうか。