

「数学と自然」 資料 N0.1

素数

素数とは1と自分自身の数しか割れない数をいいます。2, 3, 5, 7, 11, ... などが素数です。100以下の素数で、一番大きい数はいくつですか？またそれらは何個ありますか？

答え；97が100以下の最大の素数で、1を除いて、数えると25個です。確かめてみましょう。原始的ですが、エラトステネスの篩（ふるい）が方法として知られています。1から100までの数字を書き並べて、2の倍数を消去し、3の倍数を消去します。4の倍数はもちろん、行う必要はありませんから、つぎは、5の倍数をすればいいことになります。この様な操作を続けていくのです。これらはそんなに大変な作業ではありません。11までの篩をおこなえば求められます。その理由はどうしてでしょうか。平方根が関係していることがわかるはずです。。

25個の素数は、つぎのようになります。

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	149	151					

さらに349までの素数が70個あります。確かめてみましょう。パソコンの表計算ソフトをつかって、まず連続した数を書き出します。それから順に2の倍数、3の倍数、...と手作業で消していきます。

素因数分解

いくつかの整数の積から成り立つ数は、合成数とよばれます。ですから、素数でなければ、数の積に分解できます。素数かどうかを判断することになるのです。1から並んだ自然数の中から、素数の表をつくりあげると、残りの数は、素数の因数分解として表せることとなります。たとえば、119, 133, 253, 343は素数ではありません。2, 3, 5では割れない小さな合成数をあげてみてください。ではどんな素数の積として表せるか因数分解をしてみてください。500あるいは1000ぐらいまでの数を素数でなければ因数分解をした表をつくってみてください。

答え：偶数か奇数はすぐ分かりますよね。また5で割れるかどうか、末尾が0あるいは5に限りますから簡単です。3を因数にもつかうかどうかと並んだ数字を足し合わせて判断できます。和が3で割れれば3の倍数ですから。これ以外になると、少し面倒になります。小さな数であれば丹念に調べていけばいいのですが、大きな数では手間がかかってたいへんです。

すこし時間はかかるかも知れませんが、一度、素数かどうかをまとめた表をつくっておくと、いろいろと数に親しみが湧いてくるとおもいます。たとえば自動車ナンバーに書かれた4桁の数が素数かどうか考えてみると面白いですよ。上の問題の答えは、書いてしまえばと一目瞭然となるので伏せておきます。ヒントとして、119, 133は一桁と2桁の2つの積で、253は2桁の数の積、また343はある数の3乗です。

つぎでは小さな合成数を表にしてみます。因数分解してみてください。

49	77	91	119	121	133	143	161	169	187
203	209	217	221	247	253	259	287	289	299
301	319	323	329	341	343	361	371	377	391
403	407	413	427	437	451	469	473	481	493

最大公約数と最小公倍数

2つの整数 a, b の最大公約数とは、それらを割る最大の整数をいいます。記号で $\text{GCD}(a, b)$ と表します。最小公倍数とは両方が割ることのできる最小のものをいいます。 $\text{LCM}(a, b)$ と表します。それぞれ Greatest Common Divisor, Least Common Multiple の頭文字をとっています。もし $\text{GCD}(a, b) = 1$ ならば、2数は互いに素といいます。たとえば、

$$\text{GCD}(12, 20) = 4, \quad \text{GCD}(18, 30) = 6$$

となります。 $\text{GCD}(225, 120) = 15$ を確かめてみてください。また

$$\text{LCM}(3, 7) = 21, \quad \text{LCM}(12, 66) = 132$$

が例です。分数の計算では $\frac{a}{3} + \frac{b}{7} = \frac{7a + 3b}{21}$ とし、 $\frac{a}{12} + \frac{b}{66} = \frac{11a + 2b}{132}$ として計算されます。

上で述べた最大公約数は簡単に調べられます。つぎの表からも分かります。

	1	2	3	4	5	6	
12	○	○	○	○	×	○	ここで○は割り切れること、×は割り切れない ことで、数4が両方ともに○になるものの最大 で、これが最大公約数です。
20	○	○	○	○	○	×	

また $12 = 2^2 \times 3^1$, $20 = 2^2 \times 5^1$ ですから、べき乗の数字を書くと

	2	3	5	
12	2	1	0	ここで max は $2 = \max\{2, 2\}$ 、 $1 = \max\{1, 0\} = \max\{0, 1\}$ を意味します。また min は $2 = \min\{2, 2\}$ 、 $0 = \min\{1, 0\} = \min\{0, 1\}$ です。
20	2	0	1	
max	2	1	1	
min	2	0	0	

最大公約数は、 $4 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0$ で、最小公倍数は、 $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ となります。

いづれにしても、数を因数に分解しています。しかし因数分解は厄介ですから、このような小さな数ではどんなやり方でも簡単に求められますが、大きくなるとたいへんです。

ユークリッドの互除法

最大公約数を求める有効な方法で、割り算をしてしては余りをとり、それが0になるまで続けていく方法です。 $\text{GCD}(36, 132) = 12$ を求めてみましょう。 $132 = 3 \times 36 + 24$, $36 = 1 \times 24 + 12$, $24 = 2 \times 12 + 0$ となって、12が最大公約数です。 $\text{GCD}(1160718174, 316258250) = 1078$ を求めてください。

答え：大きな数ですので、電卓を使います。もちろん手計算でもできます。多くの電卓は分数の計算ができませんので、答えは小数となって表示されます。しかし小数点以下を取り除いてしまった整数が商を表します。すなわち A, B から $A = B \times Q + R$ となる Q, R を計算するには、入力 A/B で答えを切り捨てて、 Q を求め、 $R = A - B \times Q$ で得られます。試みてください。

始めの部分を少し書くと

A	=	Q × B	+	R
1160718174	=	3 × 316258250	+	211943424
316258250	=	1 × 211943424	+	104314826
211943424	=	2 × 104314826	+	3313772
104314826	=	31 × 3313772	+	1587894
...	=	...	+	...
...	=	...	+	...
67914	=	31 × 2156	+	1078
2156	=	2 × 1078	+	0

以上は文献：「はじめの数論」J.H. シルバーマン著、鈴木治郎訳、ピアソン・エデュケーションから引用。