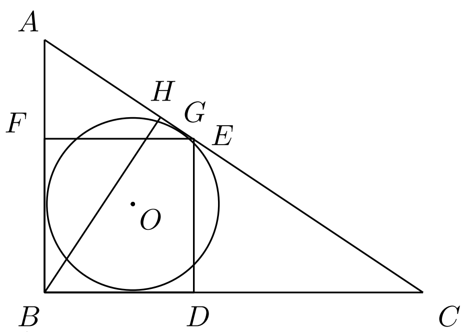
算法少女の公式集から— 「改正天元指南」矩合適等集

安田正實（千葉大学名誉教授）

1 はじめに

『算法少女』（さんぽうしょうじょ）は、安永 4 年（1775 年）に出版された和算書。当時の和算書で唯一、著者が女性名義になっている珍しい本であり、現在では国立国会図書館などでわずかに見ることの出来る稀覯本である。国会図書館に所蔵されている資料は近代デジタルライブラリーで閲覧できる。また、1935 年（昭和 10 年）に謄写版が古典数学書院から復刻された。本書を題材に、児童文学作家の遠藤寛子が小説『算法少女』を著している (Wikipedia より)。和算書「算法少女」を読む (ちくま学芸文庫), 作者: 小寺裕の付録に書かれている矩合適等集（くごうてきとうしゅう）: 鈎股矩合適等解義 嘉永 2 年 (1849) 岡野正孝写本の公式を現代化した形を示す。東京理科大学近代科学資料館 下浦文庫から原本が読み取れる。下はその表紙。最終ページには国会図書館 HP から「江戸の数学」。

この公式集では勾股弦の定理を下記の記号：$a^2 + b^2 = c^2$ などで書き直してみる。注意：条件は直角三角形に対する性質であること、辺の長さはすべて正。



(1) 直角三角形 ABC（∠B を直角）において、各辺の長さをつぎで表す。

勾=AB $= b$, 股=BC $= a$, 弦=AC $= c$.

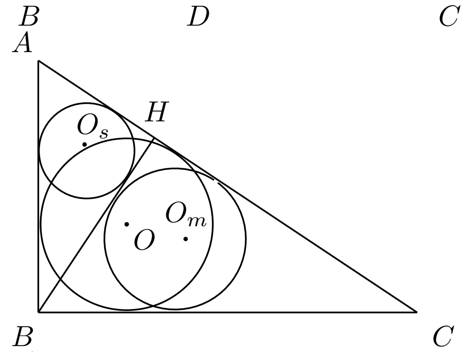
さらに

欠勾 = AF $= b_k$, 欠股 = DC $= a_k$, 中勾 = BH $= b_m = \dfrac{a\,b}{c}$,

短弦 = AH $= c_s$, 長弦 = CH $= c_l$, $\ c = c_s + c_l$,

方 = 内部の正方形 BDEF の一辺 $= t$,

径 = 内接円の直径 $= 2r$, 円 O の半径 $= r$.

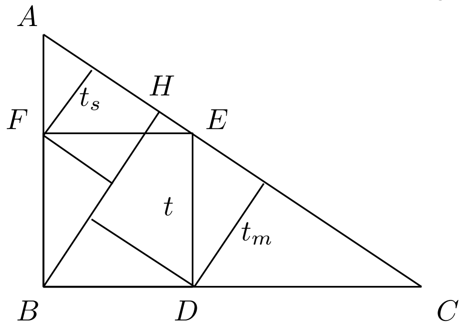


(2) 勾=AB, 股=BC, 弦=AC は上図と同じであり、

３つの内接円は大円を O, 中円を O_m, 小円を O_s を中心とする。

半径をそれぞれ、r, r_m, r_s と表すと

$$2r_s = c_s + b_m - b,\quad 2r = a + b - c = \frac{ab}{a+b+c},\quad 2r_m = c_l + b_m - a$$



(3) 勾=AB, 股=BC, 弦=AC

３つの方形、大方、中方、小方とよぶ。

（正方形はそれぞれの一般の長さを $t = \dfrac{a\,b}{a+b}, t_m, t_s$）

2 公式

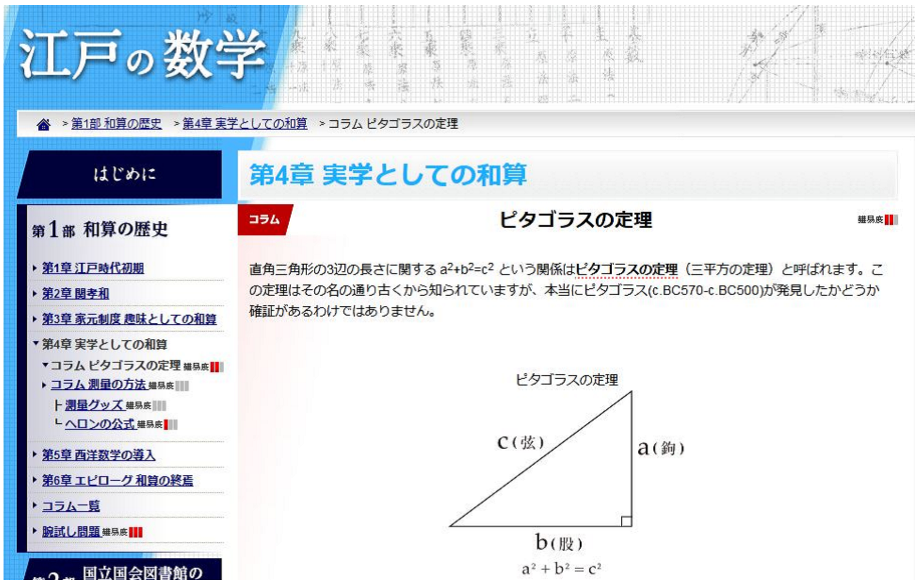
1. $a \times b = 2S$ 以降 面積 $S = \dfrac{1}{2}ab$ とする
2. $b_m \times c = 2S$
3. $a^2 + b^2 = c^2$ (勾股弦の定理)　いわゆる三平方の定理
4. $(a-b)^2 + 4S = c^2$
5. $(a-b)^2 + 8S = (a+b)^2$
6. $c^2 + 4S = (a+b)^2$
7. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2c^2$
8. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
9. $(c+a)(c-a) = b^2$
10. $(c+b)(c-b) = a^2$
11. $a^2 \times b^2 = 4S^2$
12. $b_m^2 \times c^2 = 4S^2$
13. $(c+a)^2(c-a)^2 = b^4$
14. $(c+b)^2(c-b)^2 = a^4$
15. $c_l \times c_s = b_m^2$
16. $c_s \times c = b^2$
17. $c_l \times c = a^2$
18. $c_l^2 \times c_s^2 = b_m^4$
19. $c_s^2 \times c^2 = b^4$
20. $c_l^2 \times c^2 = a^4$
21. $(b_m + c)^2 - (b+a)^2 = b_m^2$
22. $a^2 - b^2 = (c_l - c_s) \times c$
23. $c_l^2 - c_s^2 = (c_l - c_s) \times c = (a+b)(a-b)$
24. $(a^2 - b^2) + (a+b)^2 = (a+b) \times 2a$
25. $(a+b)^2 - (a^2 - b^2) = (a+b) \times 2b$
26. $\dfrac{1}{2}(a+b+c)^2 + 2S = (a+b)(a+b+c)$
27. $2(b+c)(a+c) = (a+b+c)^2$
28. $(b + b_m + c_s)^2 + (a + b_m + c_l)^2 = (a+b+c)^2$
29. $(b_m + c_s)^2 + (b_m + c_l)^2 = (a+b)^2$
30. $(a + b_m)^2 + (b + c_s)^2 = (b+c)^2$
31. $(b + b_m)^2 + (a + c_l)^2 = (a+c)^2$
32. $a^2 + c^2 - b^2 = c \times 2c_l$
33. $b^2 + c^2 - a^2 = c \times 2c_s$
34. $c^2 - 4b_m^2 = (c_l - c_s)^2$
35. $c_l^2 + c_s^2 + 2b_m = c^2$
36. $b^2 - b_m^2 = c_s^2$
37. $a^2 - b_m^2 = c_l^2$
38. $2S \cdot b = a\,b^2$
39. $2S \cdot a = b\,a^2$
40. $c_l \cdot b = a\,b_m$
41. $c_s \cdot a = b\,b_m$
42. $2c\,(a + b + c + b_m) = (a+b+c)^2$
43. $2(c-a)(c+b) = (c-a+b)^2$
44. $2(c-b)(c+a) = (c-b+a)^2$
45. $(c-b) + (c-a) - (c-b) = c - a$
46. $2c - \{(c-b) + (c-a)\} = a + b$
47. $(c-b)^2 + (c-a)^2 + c^2 = 2c\{(c-b) + (c-a)\}$
48. $(c - b_m)^2 - (a-b)^2 = b_m^2$
49. $(b_m - c_s) + (c_l - b_m) = c_l - c_s$
50. $(b_m - c_s)^2 + (b_m - c_l)^2 = (a-b)^2$
51. $(b_m - b)^2 + (c_l - a)^2 = (c-a)^2$
52. $(c_s - b)^2 + (b_m - a)^2 = (c-b)^2$
53. $(a-b)c + (c-a)b = (c-b)a$
54. $b^2 + (c-a)^2 = 2c(c-a)$
55. $a^2 + (c-b)^2 = 2c(c-b)$
56. $b^2 - (c-a)^2 = 2a(c-a)$
57. $a^2 - (c-b)^2 = 2b(c-b)$
58. $(b+c)^2 + a^2 = 2c(b+c)$
59. $(a+c)^2 - b^2 = 2a(a+c)$
60. $(a+c)^2 + b^2 = 2c(a+c)$
61. $(b+c)^2 - a^2 = 2b(b+c)$
62. $(a+b+c)^2 - 4S = 2c(a+b+c)$
63. $(a+b+c)^2 + 4S = 2(a+b)(a+b+c)$
64. $(a+b+c)^2 - (4S + 2c^2) = 2c(a+b)$
65. $c \cdot b = c_s \cdot b + b_m \cdot a$
66. $c \cdot a = c_l \cdot a + b_m \cdot b$
67. $(a+c)b = (b_m + b)c$
68. $(a+b)b = (b_m + c_s)c$
69. $(b+c)a = (b_m + a)c$
70. $(a+b)a = (b_m + c_l)c$
71. $(b+c)c_l = (b_m + a)a$
72. $(a+c)c_s = (b_m + b)b$
73. $-(a-b)^2 = c\{(b_m - c_s) + (b_m - c_l)\}$
74. $(c-b)^2 + (c-a)^2 = c\{2[(c-b) + (c-a)] - c\}$
75. $(b_m - c_s)(c_l - b_m) = b_m\{(c_l - b_m) - (b_m - c_s)\}$
76. $2S = (a+b)\,t$
77. $(a+b)^2 \cdot t^2 = 4S^2$
78. $a_k \cdot b_k = t^2$
79. $t \cdot b = b_k\,a$
80. $t \cdot a = a_k\,b$
81. $2S\,a_k = t \cdot a^2$
82. $2S\,b_k = t \cdot b^2$
83. $(a+b)\,b_k = b^2$

84. $(a+b)\,a_k = a^2$
85. $(a_k+b_k)(a+b) = c^2$
86. $(a_k+b_k+t)^2 - c^2 = t^2$
87. $(a_k - t)\,b = (a-b)\cdot t$
88. $(b_k - t)\,a = (b-a)\cdot t$
89. $2(a+b+c-t)(a+b) = (a+b+c)^2$
90. $2(a+b+c-t)\,c = (a+b+c-2t)(a+b+c)$
91. $2b_m \cdot t = (b_m - t)(a+b+c)$
92. $4(S-t^2)S = t^2 \times c^2$
93. $\{4t^2 + (a-b)^2\}\,b_m^2 = t^2\cdot c^2$
94. $(a+b)\,b_m - t\cdot c = (b_m - t)(a+b+c)$
95. $4S = 2r\,(a+b+c)$
96. $(a+b+c)^2 \times (2r)^2 = 16S^2$
97. $a+b-c = 2r$
98. $a+b+c-2r = 2c$
99. $a+b+c+2r = 2(a+b)$
100. $b-(c-a) = 2r$
101. $a-(c-b) = 2r$
102. $2(c-b)(c-a) = (2r)^2$
103. $(c-b)+(c-a)+2r = c$
104. $(b+c)\,a - a^2 = (b+c)(2r)$
105. $(a+c)\,b - b^2 = (a+c)(2r)$
106. $(c+b_m) - (b+a) = b_m - 2r$
107. $(b_m - 2r)(a+b+c+b_m) = b_m^2$
108. $2c(b_m - 2r) = (2r)^2$
109. $(b_m - 2r)(a+b+c) = (2r)b_m$
110. $(a+b+c+2\,r)\times t = 4S$
111. $c(b_m - t) = 2r\cdot t$
112. $(2r-t)(a+b+c) = 2r\cdot t$
113. $(b_m - 2r) + (2r - t) = b_m - t$
114. $(2r-t)b_m = (b_m - 2r)t$
115. $c(b_m - 2r) = (2r-t)(a+b)$
116. $c\{(b_m - 2r) - (2r - t)\} = 2r(2r-t)$
117. $(b_m - t)(a+b) = 2rb_m$
118. $(2t - 2r)\,b_m = 2r\,t$
119. $(2b_m - 2r)\times t = 2r\cdot b_m$
120. $r_s + r + r_m = b_m$
121. $(2r_s)^2 + (2r_m)^2 = (2r)^2$
122. $2r\,b = 2r_s\,c$
123. $2r\,a = 2r_m\,c$
124. $2b_m\,b = 2r_s(a+b+c)$
125. $2b_m\,a = 2r_m(a+b+c)$

例題：

$a=3,\ b=4,\ c=5$ のとき、

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}(3+4-5) = 1$$
$$b_m = \frac{ab}{c} = \frac{3\times 4}{5} = \frac{12}{5}$$
$$t = \frac{ab}{a+b} = \frac{12}{7}$$



(以上)