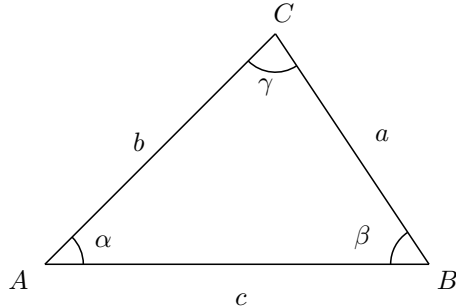


第 1 と第 2 の余弦定理:

2020 年 yogenU8m.tex

三角形の頂点を A, B, C , 角を α, β, γ , 辺の長さを a, b, c とおく。



第 1 余弦の定理:

$$\begin{cases} a = b \cos \gamma + c \cos \beta \\ b = c \cos \alpha + a \cos \gamma \\ c = a \cos \beta + b \cos \alpha \end{cases}$$

第 2 余弦の定理:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

正弦の定理:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

[正弦の定理から第 1, 第 2 余弦定理を示す]

加比の理 (分数の性質) を正弦定理の 2 項と 3 項に適用する。また三角関数の加法定理、三角形の内角の和は 180° であるから、 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ をもちいると、

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{\sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta} = \frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{\sin \alpha}$$

この式と正弦定理の第 1 項から、 $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$ を得る。第 2 余弦定理を示すには、両辺を 2 乗して、

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos \gamma + c \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \gamma + c^2 \cos^2 \beta + 2bc \cos \beta \cos \gamma \\ &= b^2(1 - \sin^2 \gamma) + c^2(1 - \sin^2 \beta) + 2bc \cos \beta \cos \gamma \\ &= b^2 + c^2 - b^2 \sin^2 \gamma - c^2 \sin^2 \beta + 2bc \cos \beta \cos \gamma \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \{\cos(\beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma\} - b^2 \sin^2 \gamma - c^2 \sin^2 \beta \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cos(\beta + \gamma) - (b \sin \gamma - c \sin \beta)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

加法定理 $\cos \beta \cos \gamma = \cos(\beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma = \cos(\pi - \alpha) + \sin \beta \sin \gamma = \cos \alpha + \sin \beta \sin \gamma$ を 5 行目にもちい、また末尾の項がゼロになる理由は、正弦定理より、 $b \sin \gamma = c \sin \beta$ が成り立つから。これで第 2 余弦定理が示された。(終)

(補足) 頂点 C から辺 AB へ垂線をおろせば、辺 c は 2 つの部分でなるから、第 1 余弦定理の命題は明らか。

[ベクトルをもちいた第 2 余弦定理の証明] ベクトルの差の 2 乗式は、それぞれのノルムの 2 乗と内積とに分解されるから、上図の三角形において、

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{CB} - \vec{CA}|^2 \\ &= |\vec{CB}|^2 - 2 \times (\vec{CB} \cdot \vec{CA}) + |\vec{CA}|^2 \\ &= |\vec{CB}|^2 - 2 |\vec{CB}| |\vec{CA}| \cos \angle ACB + |\vec{CA}|^2 \end{aligned}$$

となるから、これを辺の長さで表すと、 $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$ に他ならない。(終)

☆☆☆☆☆☆☆☆ 練習問題 ☆☆☆☆☆☆☆☆☆

問題 1. つぎの関係式を証明せよ。

下記の等式中の $\pm$ は複合同順を意味します

(i) 内積の配分律：

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(ii) ベクトルのノルムと内積：

$$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

(iii) 和と差の内積：

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

(iv)

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

(v) Jacob の等式：3次元のベクトルについて

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

外積は順序が違うと値が異なる、非可換という。内積 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ はスカラーであることに注意して、それぞれの残りのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のスカラー倍をもちいて、
 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$
 をヒントにする。

問題 2. 内分点、外分点の応用：

(i) 内分点と係数の値の関係を示す： $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \Leftrightarrow s + t = 1, s, t \geq 0$

(ii) 三角形の3つの頂点を表すベクトルが $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ であるとき、この重心を表すベクトル $\vec{g}$ は、

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$