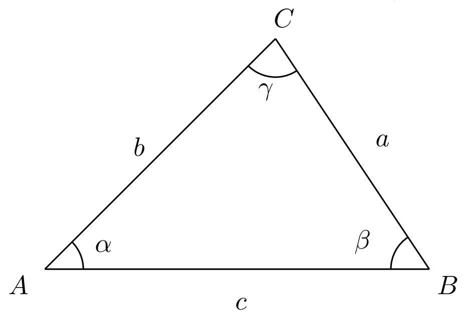
第１と第２の余弦定理:

2014 年 11 月版 yogen.tex

三角形の頂点を A, B, C, 角を α, β, γ, 辺の長さを a, b, c とおく。



第 1 余 弦 の 定 理:

$$\begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha \end{cases}$$

第 2 余 弦 の 定 理:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \end{cases}$$

正弦の定理:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

[正弦の定理から第１, 第 2 余弦定理を示す]

加比の理（分数の性質）を正弦定理の２項と３項に適用する。また三角関数の加法定理、三角形の内角の和は 180° であるから, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ をもちいると、

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta} = \frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{\sin\alpha}$$

この式と正弦定理の第１項から、$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ を得る。第２余弦定理を示すには、両辺を２乗して、

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\,\cos\gamma + c\,\cos\beta)^2 \\ &= b^2\cos^2\gamma + c^2\cos^2\beta + 2\,b\,c\,\cos\beta\,\cos\gamma \\ &= b^2(1-\sin^2\gamma) + c^2(1-\sin^2\beta) + 2\,b\,c\,\cos\beta\,\cos\gamma \\ &= b^2 + c^2 - b^2\sin^2\gamma - c^2\sin^2\beta + 2\,b\,c\,\cos\beta\,\cos\gamma \\ &= b^2 + c^2 + 2\,b\,c\,\{\cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\,\sin\gamma\} - b^2\sin^2\gamma - c^2\sin^2\beta \\ &= b^2 + c^2 + 2\,b\,c\,\cos(\beta+\gamma) - (b\,\sin\gamma - c\,\sin\beta)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \end{aligned}$$

加法定理 $\cos\beta\,\cos\gamma = \cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma = \cos(\pi-\alpha) + \sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha + \sin\beta\sin\gamma$ を５行目にもちい、また末尾の項がゼロになる理由は、正弦定理より、$b\,\sin\gamma = c\,\sin\beta$ が成り立つから。これで第２余弦定理が示された。(終)

(補足) 頂点 C から辺 AB へ垂線をおろせば、辺 c は２つの部分でなるから、第１余弦定理の命題は明らか。

[ベクトルをもちいた第 2 余弦定理の証明] ベクトルの差の２乗式は、それぞれのノルムの２乗と内積とに分解されるから、上図の三角形において、

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 - 2\times(\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}) + \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{CB}\right|\,\left|\overrightarrow{CA}\right|\,\cos\angle ACB + \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 \end{aligned}$$

となるから、これを辺の長さと角で表すと、$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,b\,c\,\cos\gamma$ に他ならない。(終)