第 5 章

固有値と固有ベクトル

5.1 固有値と固有ベクトル

正方行列 A に対し，$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ と定数 λ が存在して

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{1}$$

をみたすとき，λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する A の固有ベクトルという．言い換えれば，固有ベクトルとは線形変換 $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって‘向き’の変わらないベクトルのことであり，固有値 λ は固有ベクトルが同一方向にのびる割合を表す．（反対方向も含めて考える．）

$A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする．(1) 式は

$$\lambda\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

と書けるから，λ が A の固有値であるということは同次連立 1 次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

が非自明解をもつということである．そして，その非自明解が λ に対する固有ベクトルである．(2) の解空間，すなわち λ に対する固有ベクトルの全体（と $\mathbf{0}$）を固有値 λ に対する固有空間という．

連立 1 次方程式 (2) が非自明解をもつための必要十分条件は $|\lambda E - A| = 0$，すなわち

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことである．言い換えれば，未知数 x に関する方程式

$$\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

が解 $x=\lambda$ をもつということにほかならない．(3) の左辺を展開すると x の n 次多項式が得られる．これを $\varphi_A(x)$ で表し，A の固有多項式という．さらに方程式 $\varphi_A(x)=0$ を A の固有方程式という．λ が A の固有値であるとは，λ が固有方程式 $\varphi_A(x)=0$ の解であるということにほかならない．ところで固有方程式 $\varphi_A(x)=0$ は n 次方程式であり，n 次方程式は n 個の複素数解 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（重解はその重複だけ数える）をもつことが知られている．したがって A はこれら n 個の $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ を固有値としてもつ．このとき $\varphi_A(x)$ を 1 次式に因数分解すると

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

となる．同じ固有値をまとめれば

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$$

の形になる．各 n_i を固有値 λ_i の重複度という．

注：A の成分が実数であっても固有値は実数とは限らないから，対応する固有ベクトルは複素数を成分とするベクトルを考える必要がある．しかし，固有値がすべて実数ならば，固有ベクトルは実数の範囲で求めることができる．

例 1. $A=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}$ について

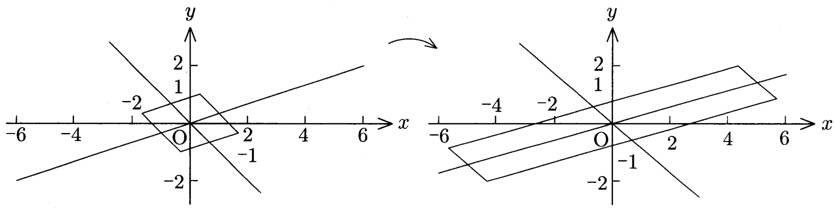
$$\varphi_A(x)=\begin{vmatrix}x-4&-3\\-1&x-2\end{vmatrix}=x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$$

だから，固有値は 1 と 5 である．固有値 1 に対する固有空間を W_1 とおくと，W_1 は $(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，すなわち $\begin{cases}-3x-3y=0\\-x-y=0\end{cases}$ を解いて $W_1=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mid\alpha\in\boldsymbol{R}\right\}$．固有値 5 に対する固有空間を W_2 とおくと，W_2 は $(5E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, すなわち $\begin{cases}x-3y=0\\-x+3y=0\end{cases}$ を解いて $W_2=\left\{\beta\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\mid\beta\in\boldsymbol{R}\right\}$ となる．すなわち W_1,W_2 は $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次元部分空間である（W_1 は直線 $y=-x$, W_2 は直線 $y=\dfrac{1}{3}x$ を表す）．W_1 に属するベクトル $\boldsymbol{x}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $(\alpha\neq 0)$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ をみたす．すなわち $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ によって向きも大きさも変わらないベクトルである．W_2 に属するベクトル $\boldsymbol{x}=\beta\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $(\beta\neq 0)$ は $A\boldsymbol{x}=5\boldsymbol{x}$

をみたす．すなわち f_A によって大きさが5倍のベクトルになる．W_1, W_2 に属さないベクトル $\boldsymbol{x}$ はこのような性質をもたないが，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底だから，$\boldsymbol{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せる．このとき

$$f_A(\boldsymbol{x}) = \alpha f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) + \beta f_A(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるから，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする座標系を考えれば，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 方向の座標成分は変わらず $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向の座標成分は5倍になることがわかる．このことから平面全体が $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に5倍にのびる様子が想像できる．このように，固有値と固有ベクトルは線形変換の性質を知るのに役立つ．



例 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．この行列は原点のまわりの90度の回転を表す．この回転で不変な方向は存在しないから，$\boldsymbol{R}^2$ の線形変換としては固有ベクトルをもたない．しかし，複素数まで範囲を広げれば存在する．実際

$$\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

だから，固有値は $i, -i$ である．i に対する固有ベクトルは，$(iE - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$\boldsymbol{x} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$（$\alpha$ は0でない複素数）となる．また $-i$ に対する固有ベクトルは，$(-iE - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて，$\boldsymbol{x} = \beta \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$（$\beta$ は0でない複素数）となる．

定理 1. A を n 次正方行列，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を A の固有値とする．このとき

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A, \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A$$

が成り立つ．

定理 2. A を n 次正方行列，P を n 次正則行列とし，$B = P^{-1}AP$ とおく．このとき A と B の固有多項式は一致する．したがって A と B の固有値も一致する．

定理 3. n 次正方行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$，各固有値 λ_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする $(i = 1, 2, \cdots, r)$．このとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ は1次独立である．

定理 4 (ハミルトン・ケーリー (Hamilton–Cayley) の定理)**.** A を n 次正方行列，$\varphi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ を A の固有多項式とする．このとき

$$\varphi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = O$$

が成り立つ．

例 3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき

$$\varphi_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O.$$

例題 1.

次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

解答

$$\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -(x+1) \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x & -4 \\ -4 & -2 & x-7 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & -4 \\ -2 & x-7 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)(x^2 - 7x - 8) = (x-8)(x+1)^2.$$

よって A の固有値は 8, -1（重複度は 2）である．

固有値が8のとき，$(8E-A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ すなわち

$\begin{cases} 5x-2y-4z \quad =0 \\ -2x+8y-2z=0 \\ -4x-2y+5z=0 \end{cases}$ の解を求めると，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. よって固有値8に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$（$t$ は0でない任意定数）である．

固有値 -1 のとき，$(-E-A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ すなわち

$\begin{cases} -4x-2y-4z=0 \\ -2x-y-2z \quad =0 \\ -4x-2y-4z=0 \end{cases}$ を解くと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

よって固有値 -1 に対する固有ベクトルは $t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$（ただし t_1 と t_2 は同時には0でない任意定数）である．

例題 2.

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = \operatorname{tr} A, \quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det A$$

を示せ．

解答　$A=(a_{ij})$ とし，$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ とする．すると

$$\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix} = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n) \quad \cdots (*)$$

が成り立つ．ここで $(*)$ 式で両辺の x^{n-1} の係数を考える．左辺の行列式の展開を考えると x^{n-1} の項が出てくるのは $(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$ からだか

ら，さらに展開して考えると x^{n-1} の係数は $-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{nn}=-\operatorname{tr}A$ である．一方，右辺の x^{n-1} の係数は $-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$ である．よって

$$\operatorname{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

となる．

次に $(*)$ 式の両辺に $x=0$ を代入すると

$$|-A|=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

ここで $|-A|=(-1)^n|A|=(-1)^n\det A$ だから $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det A$ となる．

例題 3.

ハミルトン・ケーリーの定理を用いて $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ がみたす 3 次の関係式を求めよ．

解答　$\varphi_A(x)=\begin{vmatrix}x-1&-1&2\\1&x-2&-1\\0&-1&x+1\end{vmatrix}=x^3-2x^2-x+2$ より

$$A^3-2A^2-A+2E=O$$

となる．

A

1.　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\4&6&-10\\2&1&-1\end{pmatrix}$　(4) $A=\begin{pmatrix}4&1&-1\\-1&0&1\\5&1&0\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\6&3&5\end{pmatrix}$　(6) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&-2&3&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ の固有値が 1 と 3 であるとき，整数 a, b, c の値を求めよ．

3. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ の異なる固有値が 2 個であるための条件を求めよ．

4. B を m 次正方行列とし，その固有値を $\mu_1, \cdots, \mu_m$ とする．任意の実数 λ と m 次元行ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} & B \end{pmatrix}$$

の固有値は $\lambda, \mu_1, \cdots, \mu_m$ であることを示せ．

5. A を n 次正方行列，P を n 次正則行列とし，$B = P^{-1}AP$ とおく．このとき A と B の固有多項式および固有値は一致することを示せ．

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ について

(1) ハミルトン・ケーリーの定理を用いて，A がみたす 3 次の関係式を求めよ．

(2) A^{10} を求めよ．

7. 次を示せ．

(1) n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は A が 0 を固有値にもたないことである．

(2) n 次正則行列 A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とするとき，A^{-1} の固有値は $\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ である．

B

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & & & \\ \vdots & & \text{\Large 0} & \\ a_{n-1} & & & \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

ただし，$n \geq 2$ かつ $a = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ とする．

2.　n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\Large 0} \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \text{\Large 0} & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

3.　n 次正方行列 A, B に対し，AB と BA の固有値は一致することを示せ．

A の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)$ より A の固有値は $1, 3$ である．

$E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$3E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より固有値 1 に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（$t$ は 0 でない任意定数）で，固有値 3 に対する固有ベクトルは $s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$（$s$ は 0 でない任意定数）である．

(2) $\begin{vmatrix} x-8 & 10 \\ -5 & x+7 \end{vmatrix} = (x-3)(x+2)$ より A の固有値は $3, -2$ である．

$3E - A = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$，$-2E - A = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ より固有値 $3, 2$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（$t, s$ は 0 でない任意定数）である．

(3) $\begin{vmatrix} x-4 & -1 & 3 \\ -4 & x-6 & 10 \\ -2 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x-4)$ より A の固有値は $2, 3, 4$ である．

$2E - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 10 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，$3E - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & 10 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，

$4E-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 10 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ より固有値 $2,3,4$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$，$s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$u\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$（$t,s,u$ は 0 でない任意定数）である．

(4) $\begin{vmatrix} x-4 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -5 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^2$ より A の固有値は $2,1$（重複度は 2）である．

$2E-A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$E-A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ より固有値 $2,1$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（$t,s$ は 0 でない任意定数）である．

(5) $\begin{vmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -6 & -3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-10)(x+1)^2$ より A の固有値は $10,-1$（重複度は 2）である．

$10E-A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & -2 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，$-E-A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ より固有値 10 に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$（$t$ は 0 でない任意定数）で，固有値 -1 に対する固有ベクトルは $t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$（$t_1,t_2$ は同時には 0 でない任意定数）である．

(6) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & 2 & x-3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^3$ より A の固有値は $2, 1$（重複度は 3）である．

$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ より固有値 2 に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（$t$ は 0 でない任意定数）で，固有値 1 に対する固有ベクトルは $t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$（$t_1, t_2$ は同時には 0 でない任意定数）である．

2. $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x \end{vmatrix} = x^2 - ax - bc = (x-1)(x-3)$ であるとき $-a = -4$, $-bc = 3$ をみたす．a, b, c は整数だから $a = 4$, $b = \pm 1$, $c = \mp 3$（複号同順）または $a = 4$, $b = \pm 3$, $c = \mp 1$（複号同順）である．

3.

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-a & 0 & -c \\ 0 & x-b & 0 \\ -c & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x-b)\{x-(a-c)\}\{x-(a+c)\}.$$

ゆえに固有値は $b, a-c, a+c$ である．

$$c = 0 \ (\Longleftrightarrow a - c = a + c) \text{ のとき} \quad b \neq a$$

$$c \neq 0 \text{ のとき} \quad b = a - c \text{ または } b = a + c$$

よって求める条件は $\left\{\begin{array}{ll} & c = 0 \text{ かつ } b \neq a \\ \text{または，} & c \neq 0 \text{ かつ } b = a - c \\ \text{または，} & c \neq 0 \text{ かつ } b = a + c \end{array}\right.$ である．

4.

$$\varphi_A(x) = |xE_{m+1} - A| = \begin{vmatrix} x-\lambda & -\boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & xE_m - B \end{vmatrix}$$

$$= (x-\lambda)\,|xE_m - B| = (x-\lambda)\varphi_B(x).$$

よって A の固有値は λ と B の固有値だから $\lambda, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ である．

5. P は正則行列だから $P^{-1}P = E$ で $|P^{-1}P| = |P^{-1}| \cdot |P| = 1$ である．この性質を使うと

$$\varphi_B(x) = |xE - B| = |xP^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE - A)P|$$

$$= |P^{-1}| \cdot |xE - A| \cdot |P| = |xE - A| = \varphi_A(x).$$

よって A と B の固有多項式が一致する．$\varphi_B(x) = \varphi_A(x) = 0$ の解を考えると，A の固有値と B の固有値は一致する．

6. (1) $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -3 & 2 \\ 2 & x+5 & -3 \\ 3 & 7 & x-4 \end{vmatrix} = x^3+x^2+x+1$ より $A^3+A^2+A+E = O$.

(2) $A^4 - E = (A-E)(A^3+A^2+A+E) = O$ より $A^4 = E$．よって

$$A^{10} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. (1) A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすると，例題 2 より

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \cdots,\ \lambda_n \neq 0.$$

(2) $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする．この式の両辺に左から $\lambda_i^{-1}A^{-1}$ をかけると

$$\lambda_i^{-1}\boldsymbol{x}_i = A^{-1}\boldsymbol{x}_i.$$

よって λ_i^{-1} は A^{-1} の固有値.

B の解答

1. 固有多項式 $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \\ -a_1 & x & 0 & & 0 \\ -a_2 & 0 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$ を第 1 行で余因子展開すると $\varphi_A(x) = x^n - a_1^2x^{n-2} - a_2^2x^{n-2} - \cdots - a_{n-1}^2x^{n-2} = x^{n-2}(x^2 - a^2)$ であるから，固有値は $0, \pm a$ である．

固有値0に対する固有空間は

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i = 0 \right\}.$$

また固有値 $a, -a$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t\begin{pmatrix} a \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, s\begin{pmatrix} a \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}$ (t, s は0でない任意定数）である．

2. A の固有値を 2λ，固有ベクトルを $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ とし，特に $-1 < \lambda < 1$ で考える．

$$A\boldsymbol{u} = 2\lambda\boldsymbol{u} \iff \begin{cases} u_2 = 2\lambda u_1 \\ u_1 + u_3 = 2\lambda u_2 \\ \qquad \vdots \\ u_{n-2} + u_n = 2\lambda u_{n-1} \\ u_{n-1} = 2\lambda u_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_{k-1} + u_{k+1} = 2\lambda u_k \ (k = 1, 2, \cdots, n) \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$\lambda^2 \neq 1$ のとき差分方程式 $u_{k-1} + u_{k+1} = 2\lambda u_k$ の一般解は

$$u_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k$$

である．ただし $\lambda_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$, $\lambda_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$.

$$u_0 = 0 \text{ より } c_1 = -c_2, \quad u_{n+1} = 0 \iff \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n+1} = 1$$

$$\iff \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^{2(n+1)} = 1.$$

$|\lambda| < 1$ だから $\lambda = \cos\theta$ とおけるので $e^{2(n+1)i\theta} = 1$ すなわち $\theta = \dfrac{m\pi}{n+1}$

$(m=1,\cdots n)$ のとき 2λ は A の固有値であり

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} \sin\dfrac{m}{n+1}\pi \\ \sin\dfrac{2m}{n+1}\pi \\ \vdots \\ \sin\dfrac{nm}{n+1}\pi \end{pmatrix} (m=1,2,\cdots,n)$$

は固有ベクトルである．(異なる固有値が n 個得られたので、これ以外に考える必要はない)

3. A,B の一方，例えば A が正則であるとすると，問題 A の 5 より AB と $A^{-1}(AB)A=BA$ の固有多項式が一致する．よって固有値も一致する．

次に A,B のどちらも正則でないとする．ε を A の固有値と異なる数とすると，$A-\varepsilon E$ は正則である．したがって上の議論から $(A-\varepsilon E)B$ と $B(A-\varepsilon E)$ の固有多項式は一致する．すなわち

$$|xE-(A-\varepsilon E)B|=|xE-B(A-\varepsilon E)|$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon\to 0$ とすると

$$|xE-AB|=|xE-BA|$$

となり，AB と BA の固有多項式が一致する．

5.2 行列の対角化

A を n 次正方行列とする．もし n 次正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるとき，すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

となるとき，A は対角化可能であるという．また，このとき A は P によって対角化されるという．(1) の右辺の行列の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ であるから，5.1 の定理 2 より $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値であることがわかる．すなわち，A を対角化したときの対角行列の対角成分は A の固有値が並ぶ．

A が対角化可能であるための条件を考えてみよう．n 次正方行列 A が相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を持つ場合を考える．各 λ_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とすると，5.1 の定理 3 より $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立である．よって行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

と定めると，P は正則となる．一方 $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ だから
$AP = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \lambda_2\boldsymbol{x}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

よって $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となり，A は対角化可能である．

したがって次のことが成り立つ．

定理 1. 正方行列 A の固有値がすべて異なるならば，A は対角化可能である．

A の固有値が重複する場合，A は必ずしも対角化可能ではない．これについては次の定理が成り立つ．

定理 2. n 次正方行列 A に対し，次の (1)，(2) は同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とするとき，各 λ_i の重複度が λ_i に

対する固有空間の次元と一致する．

A が定理 2 (2) の条件をみたすとき，A を対角行列にするような正則行列 P は次のように作ることができる．固有値 λ_i の重複度を n_i $(i=1,2,\cdots,r)$ とし，各 λ_i に対する固有空間の基底を $\boldsymbol{x}_{ik}$ $(k=1,2,\cdots,n_i)$ とおく．このとき仮定から $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ であり，n 個のベクトル

$$\boldsymbol{x}_{11},\cdots,\boldsymbol{x}_{1n_1},\boldsymbol{x}_{21},\cdots,\boldsymbol{x}_{2n_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{r1},\cdots,\boldsymbol{x}_{rn_r}$$

は 1 次独立であることがわかる．したがって

$$P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{11} & \cdots & \boldsymbol{x}_{1n_1} & \boldsymbol{x}_{21} & \cdots & \boldsymbol{x}_{2n_2} & \cdots & \boldsymbol{x}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{x}_{rn_r} \end{pmatrix}$$

とおくと P は正則行列であって，さらに

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{n_1\text{個}} & & & \text{\Large 0} \\ & \overbrace{\lambda_2 \ \ddots \ \lambda_2}^{n_2\text{個}} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \overbrace{\lambda_r \ \ddots \ \lambda_r}^{n_r\text{個}} \end{pmatrix}$$

となる．

例． n 次正方行列 A が対角化可能なとき，A の k 乗 A^k を容易に求めることができる．$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とすると，$(P^{-1}AP)^k=$ $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)=P^{-1}A^kP$ だから

$$\begin{aligned} P^{-1}A^kP &= (P^{-1}AP)^k \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$ となる．

例題 1.

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(4) A^n を求めよ．

解答　(1) 固有方程式 $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-3) = 0$ から A の固有値は $3, -2$ である．

(2) 固有値 $3, -2$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$s\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (t, s は 0 でない任意定数) である．

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ で $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ である．よって

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4\cdot 3^n+(-1)^n2^n}{5} & \frac{3^n+(-1)^{n+1}2^n}{5} \\ \frac{4\cdot 3^n+(-1)^{n+1}2^{n+2}}{5} & \frac{3^n+(-1)^n2^{n+2}}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例題 2.

行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$ を対角化せよ．

解答　固有方程式 $\begin{vmatrix}x-1&0&0\\-1&x-2&3\\-1&-1&x+2\end{vmatrix}=(x-1)^2(x+1)=0$ より A の固有値は 1（重複度は 2），-1 である．

固有値 1 に対する固有ベクトルは $t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$（ただし t_1, t_2 は同時には 0 でない任意定数），固有値 -1 に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$（$t$ は 0 でない任意定数）である．よって

$$P=\begin{pmatrix}-1&3&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

A

1.　次の行列は対角化可能かどうか調べ，可能ならば正則行列 P を用いて対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}5&-1\\-1&3\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}0&-1\\4&0\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}5&0&2\\7&4&8\\-5&-1&-3\end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix}0&-2&2\\1&-3&1\\2&-2&0\end{pmatrix}$

2.　次の行列 A を対角化することにより，A^n を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}5&3\\-2&0\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

3.　a を実数とする．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ の固有方程式が相異なる2実数解，重解，虚数解をもつための a の条件をそれぞれ求めよ．

(2) (1) の行列で対角化できない a を求めよ．それ以外で a を指定することによって対角化できる例を作れ．

4.　線形写像 $f\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ において，次の対応が存在する．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

このとき，f の表現行列 A を求めて対角化せよ．

B

1.　次を示せ．

(1) 巾零行列の固有値は0のみである．

(2) 零行列でない巾零行列は対角化可能ではない．

2.　n 次正方行列 A は $A^{n-1} \neq O,\ A^n = O$ をみたすものとする．ベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ を $A^{n-1}\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ となるようにとり，n 次正方行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} A^{n-1}\boldsymbol{a} & A^{n-2}\boldsymbol{a} & \cdots & A\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

と定める．

(1) P は正則であることを示せ．

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ．

A の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -2 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)$ より固有値は $1, 2$ であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．

(2) $\begin{vmatrix} x-5 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 8x + 14$ より固有値は $4 \pm \sqrt{2}$ であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 4+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix}$
となる．

(3) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -4 & x \end{vmatrix} = x^2+4$ より固有値は $\pm 2i$ であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$ となる．

(4) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3$ より固有値は 1（重複度は 3）．
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は 2 より固有空間の次元は $1\ (<3)$ だから対角化できない．

(5) $\begin{vmatrix} x-5 & 0 & -2 \\ -7 & x-4 & -8 \\ 5 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$ より固有値は $1, 2, 3$ であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 8 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}P =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

(6) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^2$ より固有値は 1（重複度 2），

2 である．固有値 1 に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$（$t$ は 0 でない任意定数）であるから，固有空間の次元は $1\ (<2)$ となり対角化できない．

(7) $\begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ -1 & x+3 & -1 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+2)^2(x-1)$ より固有値は -2（重複度は 2），1 である．固有値 -2 に対する 1 次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．固有値 1 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．

2. (1) $\begin{vmatrix} x-5 & -3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)$ より A の固有値は $2, 3$ であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で $A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$
$= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & -3\cdot 2^n + 3^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2\cdot 3^n & 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2)$ より A の固有値は $0, 1, 2$ であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができ

る．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で

$$A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1} & -1+2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. (1) 固有方程式は $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -3 & x-a \end{vmatrix} = x^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$ で，判別式は $(a+1)^2 - 4(a+3) = a^2 - 2a - 11$ である．よって

相異なる 2 実数解をもつ $\Longleftrightarrow a < 1 - 2\sqrt{3}$ または $a > 1 + 2\sqrt{3}$

重解をもつ $\Longleftrightarrow a = 1 \pm 2\sqrt{3}$

虚数解をもつ $\Longleftrightarrow 1 - 2\sqrt{3} < a < 1 + 2\sqrt{3}$

(2) 固有方程式が重解 $x = \lambda$ をもつ場合 $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -3 & \lambda - a \end{pmatrix} = 1$ だから λ に対する固有空間の次元は 1 となり行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ は対角化できない．よって $a = 1 \pm 2\sqrt{3}$ のとき対角化できない．対角化できる例を作ってみる．

たとえば $a = 5$ のとき固有方程式は $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$ となり固有値は $2, 4$ であり，固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．

また $a = 1$ のとき固有方程式は $x^2 - 2x + 4 = 0$ となり固有値は $1 \pm \sqrt{3}i$ である．固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{3}i & \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}$ となる．

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を標準基底の 1 次結合で表すと

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})+2f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-1\\3\\10\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\quad ①$$

$$f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\quad ②$$

$$f(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix})=-f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})+f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\quad ③$$

②と③より

$$f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\quad ④$$

①と④より

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})=-2\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

よって $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&0&4\end{pmatrix}$ となる．

$\begin{vmatrix}x-1&0&1\\-1&x-2&-1\\-2&0&x-4\end{vmatrix}=(x-2)^2(x-3)$ より A の固有値は 2（重複度は 2），3 である．

固有値 2 に対する 1 次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ をとる

ことができる．固有値 3 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることができる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

B の解答

1. (1) A を巾零行列とすると，自然数 k があって $A^k = O$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

とおく．両辺に左から A をかけると

$$A^2\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}.$$

この操作を続けて

$$A^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}.$$

よって $A^k = O$ より $\lambda^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるが，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ だから $\lambda^k = 0$，すなわち $\lambda = 0$.

(2) 仮に A が対角化可能であるとすると，正則行列 P があって（(1) の結果を用いて）

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & 0 \end{pmatrix} = O.$$

よって $A = O$ となり，$A \neq O$ に矛盾する．

2. (1) n 個のベクトル

$$A^{n-1}\boldsymbol{a},\ A^{n-2}\boldsymbol{a},\ \cdots,\ A\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}$$

が 1 次独立なことをいえば十分．

$$\alpha_1 A^{n-1}\boldsymbol{a} + \alpha_2 A^{n-2}\boldsymbol{a} + \cdots + \alpha_{n-1}A\boldsymbol{a} + \alpha_n\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

とおく．この両辺に左から A をかけると（$A^n = O$ に注意して）

$$\alpha_2 A^{n-1}\boldsymbol{a} + \cdots + \alpha_{n-1}A^2\boldsymbol{a} + \alpha_n A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

この操作を繰り返すと $\alpha_n A^{n-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となる．ところが $A^{n-1}\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ だから $\alpha_n = 0$．$(*)$ で $\alpha_n = 0$ とおいて同じ作業を繰り返すと，結局 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ を得る．

(2)

$$
\begin{aligned}
AP &= A\begin{pmatrix} A^{n-1}\boldsymbol{a} & A^{n-2}\boldsymbol{a} & \cdots & A\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{n-1}\boldsymbol{a} & \cdots & A^{2}\boldsymbol{a} & A\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{n-1}\boldsymbol{a} & A^{n-2}\boldsymbol{a} & \cdots & A\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix}.
$$

5.3 対称行列

行列の三角化

正方行列は必ずしも対角化可能ではないが，対角行列に形の近い三角行列に変形にすることは可能である．ここでは固有値が実数の場合を扱う．

定理 1. n 次実正方行列 A の固有値がすべて実数ならば，適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と三角行列に変形できる．特に P として直交行列をとることができる．

対称行列の対角化

n 次正方行列 A は，${}^tA = A$ をみたすとき対称行列であると定義した．もしさらに A の成分が実数であれば，A は実対称行列であるという．

定理 2. 実対称行列 A の固有値はすべて実数である．

定理 3. 実対称行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する．

定理 4. 実対称行列 A は適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化される．特に P として直交行列をとることができる．

A を対角化する直交行列 P は次のように作ることができる．n 次実対称行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とする．各固有値 λ_i の重複度を n_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ とし，各 λ_i に対する固有空間の基底を $\boldsymbol{x}_{ik}$ $(k = 1, 2, \cdots, n_i)$ とおく．各 i について，n_i 個のベクトル $\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{in_i}$ は 1 次独立だから，これらをグラム・シュミットの方法で正規直交化する．このとき n 個のベクトル

$$\boldsymbol{x}_{11}, \cdots, \boldsymbol{x}_{1n_1}, \boldsymbol{x}_{21}, \cdots, \boldsymbol{x}_{2n_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{r1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{rn_r}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底になる．したがって n 次正方行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{11} & \cdots & \boldsymbol{x}_{1n_1} & \boldsymbol{x}_{21} & \cdots & \boldsymbol{x}_{2n_2} & \cdots & \boldsymbol{x}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{x}_{rn_r} \end{pmatrix}$$

と定めると，P は直交行列であって，さらに A を対角化する行列になる．

正規行列

正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し，転置行列 ${}^tA$ のすべての成分を共役複素数に置き換えた行列を A^* で表す．すなわち $A^*=(\overline{a_{ji}})$ （$\overline{a_{ji}}$ は a_{ji} の共役複素数）である．

n 次正方行列 A が $A^*A=AA^*$ をみたすとき，A は正規行列であるという．

例 1. $A=\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}$ について

$$\begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

だから，A は正規行列である．

例 2. $A^*=A$ をみたす行列 A は正規行列である．このような A をエルミート行列という．成分がすべて実数のエルミート行列は実対称行列である．

例 3. $U^*U=UU^*=E$ をみたす行列 U も正規行列である．このような U をユニタリー行列という．成分がすべて実数のユニタリー行列は直交行列である．

定理 5. ユニタリー行列の固有値の絶対値は 1 である．

定理 6. A が正規行列ならば，A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．ただし，ベクトルの内積は，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}$$

とする．

定理 7. 正規行列 A は適当なユニタリー行列 U によって

$$U^*AU=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化される．ここで $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ は A の固有値である．逆に，正方行列 A がユニタリー行列 U によって対角化可能ならば，A は正規行列である．

例題 1.

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有ベクトルを求めよ．

(3) ${}^tTAT$ が対角行列になるような直交行列 T を求めよ．

解答　(1) $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)(x-4)$ より

A の固有値は $1, 2, 4$ である．

(2) 固有値 $1, 2, 4$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ （t, s, u は 0 でない任意定数）である．

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は定理 3 より互いに直交する．これらのベクトルの長さを 1 にして並べた行列を $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

とおけば T は直交行列で ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．

例題 2.

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列 P により上三角行列にせよ．

解答　A の固有多項式は $(x-1)^2(x-2)$ で，固有値は $1, 2$．固有値 1 に対す

る固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．これを含む $\boldsymbol{R}^3$ の1組の基底をつくる．例えば $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし，次にこれを正規直交化すれば

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

そこで $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと Q は直交行列で

$$Q^{-1}AQ = {}^tQAQ = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

次に $B = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ とおき，B に同様の作業を行う．B の固有値は $1, 2$．固有値1に対する固有ベクトルの1つ，例えば $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ をとる．これを含む $\boldsymbol{R}^2$ の1組の基底として例えば $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとり，正規直交化すると

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{11}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \sqrt{\frac{2}{11}} \end{pmatrix}.$$

よって

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} & \sqrt{\frac{2}{11}} \end{pmatrix}$$

とおくと R は2次の直交行列である．さらに

$$P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

とおけば，P は 3 次の直交行列で

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{\sqrt{11}} & \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \\ 0 & 1 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} $$

が得られる．

例題 3.

エルミート行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求め，

異なる固有値に対応する固有ベクトルが直交することを示せ．

解答　$\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -i & -1 \\ i & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x(x-2)(x+1)$ より A の固有値は $0, 2, -1$ である．

固有値 $0, 2, -1$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $u\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ (t, s, u は 0 でない任意定数) である．

そこで内積を計算すると

$$ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = i - i = 0 $$

$$ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i + i = 0 $$

$$ \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0. $$

よって異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することがいえる．

A

1.　次の対称行列を直交行列 P で対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{13}{9} \end{pmatrix}$

2.　$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ とする.

(1) A を直交行列によって対角化せよ.

(2) A^n を求めよ.

3.　対称行列 A, B が直交行列 P, Q によってそれぞれ対角化されるとき，行列

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

を直交行列によって対角化せよ.

4.　実対称行列 A が零行列でなければ，任意の自然数 m に対して $A^m \neq O$ であることを証明せよ.

5.　正方行列 A が直交行列によって対角化されるならば，A は対称行列であることを示せ.

6.　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}$ に関して以下の問に答えよ.

(1) A はエルミート行列でないことを示せ.

(2) A は正規行列であることを示せ.

(3) A の固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を求めよ.

(4) (3) で求めた固有ベクトルは直交することを示せ.

(5) A を対角化せよ.

B

1.　A が実対称行列であり，かつその固有値がすべて正であるためには，$A = {}^tBB$ となる実正則行列 B があることが必要十分条件であることを証明せよ.

2.　(1) 行列式の値が 1 の 3 次直交行列 A は回転軸をもつこと，すなわちある直線のまわりの回転を表すことを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の回転軸は何か.

3. 2×2 型の行列 A がエルミート行列とするとき，以下の問に答えよ．ただし $A^* = {}^t(\overline{A}) = \overline{({}^tA)}$.

(1) エルミート行列の定義を述べよ.

(2) λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を λ に対応する固有ベクトルとするとき，次が成り立つことを示せ.

(i) $x^*(A\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x}$ (ii) $(A\boldsymbol{x})^* = \boldsymbol{x}^* A^*$ (iii) $(\lambda \boldsymbol{x})^* \boldsymbol{x} = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x})$

(3) (2) の結果から $\lambda = \overline{\lambda}$ すなわちエルミート行列の固有値は実数であることを示せ.

4. A を 2 次ユニタリー行列とする．$A^* \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix} A$ はエルミート行列かつトレース 0 だから $\begin{pmatrix} X & Y+iZ \\ Y-iZ & -X \end{pmatrix}$ とかける．このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換となる．その表現行列を $\widehat{A}$ とする.

(1) $\widehat{A}$ は直交行列であることを示せ.

また $A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき $\widehat{A}$ を求めよ.

(2) $\widehat{A} = E$ となる A は何か.

A の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)(x+2)$ より固有値は $3, -2$ である.

固有値 $3, -2$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で

$${}^tP \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる．

(2) $\begin{vmatrix} x-2 & -a \\ -a & x-2 \end{vmatrix} = (x-2-a)(x-2+a)$ より固有値は $2+a,\ 2-a$ である．

$a=0$ のときは $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ なので，すでに対角化されている．

$a \neq 0$ のとき，固有値 $2+a,\ 2-a$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で

$$ {}^tP \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2+a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix} $$

となる．

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-3)$ より固有値は $0,1,3$ である．

固有値 $0,1,3$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で

$$ {}^tP \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$

となる．

(4) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+1)$ より固有値は 1（重複度は 2），-1 である．

固有値 1 に対応する 1 次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる

ことができる．

固有値 -1 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとることができる．

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で

$$ {}^tP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} $$

となる．

(5) $\begin{vmatrix} x-\frac{13}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & x-\frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & x-\frac{13}{9} \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$ より固有値は 1（重複度は 2），2 である．固有値 1 に対応する 1 次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．この 2 つのベクトルは直交していないので正規直交化すると $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ が得られる．

固有値 2 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることができる．

よって $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で

$$ {}^tP \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{13}{9} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} $$

となる．

2. (1) $\begin{vmatrix} x-\frac{5}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)$ より A の固有値は $2, -1$ である．固有値 $2, -1$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で，${}^tP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ から ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．

(2) $A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix} \frac{3\cdot 2^n+(-1)^n}{4} & \frac{-2^n+(-1)^n}{4}\sqrt{3} \\ \frac{-2^n+(-1)^n}{4}\sqrt{3} & \frac{2^n+3\cdot(-1)^n}{4} \end{pmatrix}$

3. $R = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$ は直交行列であり

$${}^tRCR = \begin{pmatrix} {}^tPAP & O \\ O & {}^tQBQ \end{pmatrix}$$

は対角行列である．

4. 直交行列 P で ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とできる．ただし $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値である．

ある自然数 k に対し $A^k = O$ ならば

$$({}^tPAP)^k = {}^tPA^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} = O$$

だから $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ となる．すなわち $A = PO\,{}^tP = O$ となり対称行列 A が零行列でないことに矛盾する．よってすべての自然数 m に対して $A^m \neq O$ である．

5. ${}^tPAP = B$ (P, B はそれぞれ直交行列および対角行列) とすると，$A = PB{}^tP$ である．この転置を考えると（${}^tB = B$ であるから）

$${}^tA = {}^t(PB{}^tP) = P\,{}^tB\,{}^tP = PB{}^tP = A$$

すなわち，A は対称行列である．

6. (1) $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix}$ より $A^* \neq A$. よって A はエルミート行列でない.

(2)

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 3 \end{pmatrix}$$

よって $A^*A = AA^*$ より A は正規行列である.

(3) $\begin{vmatrix} x & -1-i \\ 1-i & x+i \end{vmatrix} = (x+2i)(x-i)$ より A の固有値は $i, -2i$.

固有値 $\lambda_1 = i$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ （t_1 は任意定数，$t_1 \neq 0$）.

固有値 $\lambda_2 = -2i$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$ （t_2 は任意定数，$t_2 \neq 0$）.

(4) $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = t_1\overline{t_2} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} = 0$

(5) $P = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix}$ とおけば

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

B の解答

1. A が実対称行列ならば直交行列 P で ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と

できる．このとき

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}{}^tP$$

である．$\lambda_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ ならば

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \text{\Large 0} \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}{}^tP$$

とおけば B は正則で

$${}^tBB = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}{}^tP = A$$

となる．逆に実正則行列 B があって，$A = {}^tBB$ と仮定する．λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトルとすると $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より

$${}^t(B\boldsymbol{x})B\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \lambda\,{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}.$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} > 0$ で ${}^t(B\boldsymbol{x})B\boldsymbol{x} > 0$ だから $\lambda > 0$ となる．

2. (1) 定理5より A はユニタリー行列だからその固有値の絶対値は1である．3次実行列の固有方程式は実係数の3次方程式だから必ず実数解をもつ．すなわち3次実行列には必ず実数の固有値 μ が存在する．他の固有値も実数の場合は固有値の絶対値が1であることと固有値の積が $|A| = 1$ となることより必ず固有値1をもつことがわかる．他の固有値が虚数 λ $(|\lambda| = 1)$ である場合は $\overline{\lambda}$ も固有値であることと，固有値の積が $|A| = 1$ であることから $\mu\lambda\overline{\lambda} = \mu|\lambda|^2 = 1$. ゆえに $\mu = 1$. よっていずれにせよ固有値1をもつ．

そこで固有値1に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}$ をふくむ正規直交基底により f_A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{B} \end{pmatrix}$$

と表現され，B は2次直交行列で，行列式の値が1であるから原点のまわりの回転を表す．

従って A は $\boldsymbol{e}$ を含む直線のまわりの回転である．

(2) 固有値 1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{e} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから回転軸は直線 $x = y = z$ である．($A^3 = E$ だから回転角は $\dfrac{2}{3}\pi$)

3. (1) $A^* = A$

(2) (i) $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より $\boldsymbol{x}^*(A\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}$

(ii) $(A\boldsymbol{x})^* = {}^t(\overline{A\boldsymbol{x}}) = {}^t(\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}}) = {}^t(\overline{\boldsymbol{x}})^t(\overline{A}) = \boldsymbol{x}^*A^*$

(iii) $(\lambda\boldsymbol{x})^* = {}^t(\overline{\lambda\boldsymbol{x}}) = {}^t(\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}) = \overline{\lambda}{}^t\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}^*$ より $(\lambda\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x})$

(3) (i) より $\boldsymbol{x}^*(A\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}$. 一方 $A^* = A$ と (ii), (iii) より

$$\boldsymbol{x}^*(A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^*A^*)\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{x} = (\lambda\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}$$

$$\therefore \quad \lambda\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}.$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} > 0$ だから $\lambda = \overline{\lambda}$.

4.

(1) $A^*\begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} X & Y+iZ \\ Y-iZ & -X \end{pmatrix}$ の両辺の行列式をとれば

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

よってベクトルの長さが不変だから $\widehat{A}$ は直交行列となる．

$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$ のとき $X = x$, $Y + iZ = e^{-2i\alpha}(y+iz) = y\cos 2\alpha + z\sin 2\alpha + i(-y\sin 2\alpha + z\cos 2\alpha)$ だから

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

また $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{cases} X = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ Y = -x\cos 2\theta + y\cos 2\theta \\ Z = z \end{cases} \quad \text{だから } \widehat{A} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\widehat{A} = E \iff \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix}A = A\begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix}$ がすべての x, y, z につき成立する

$$\Longleftrightarrow A \text{ が} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{と可換である}$$

$$\Longleftrightarrow A \text{ はスカラー行列である，すなわち } A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (|a| = 1).$$

5.4　2 次曲線の分類

2 次形式

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する実係数の斉 2 次式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \cdots\cdots \quad ①$$

(a_{ij} は実定数で，$a_{ij} = a_{ji}$) を（実）2 次形式という．

例. $n = 3$ のとき

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

①で $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$ とおくと

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$$

と書ける．ここで A は実対称行列だから，n 次直交行列 P が存在して

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ と変形できる．このとき

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

とおくと

$${}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}\,{}^tPAP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

すなわち

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \cdots\cdots \quad ③$$

を得る．③ の右辺を 2 次形式 ① の標準形という．

2 次曲線とその分類

次の方程式で表される xy 平面上の曲線を 2 次曲線という．

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad \cdots\cdots \quad ④$$

ここで $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ は実数で，$(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$ とする．

2 次曲線を適当な座標変換を行うことにより分類してみよう．④の左辺において $ax^2+2bxy+cy^2$ は 2 次形式だから，適当な直交行列 $P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ をとって

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad ⑤$$

とおくことにより，標準形

$$ax^2+2bxy+cy^2=\alpha x'^2+\beta y'^2$$

が得られる．ここで α,β は $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ の固有値である．したがって ⑤ の変換（座標軸の回転）によって，④ は

$$\alpha x'^2+\beta y'^2+d'x'+e'y'+f'=0 \quad \cdots\cdots \quad ⑥$$

の形に書くことができる．

$\alpha\beta\neq 0$ のとき，変換 $x'=X+x_0$，$y'=Y+y_0$（座標軸の平行移動）によって ⑥ は $\alpha X^2+\beta Y^2+f''=0$ となる．これは

$\alpha\beta>0$ のとき楕円（1 点又は空集合の場合を含む）

$\alpha\beta<0$ のとき双曲線（交わる 2 直線の場合を含む）

を表す．

$\alpha\beta=0$ のとき，例えば $\beta=0$ のときは，⑥ において座標軸の平行移動を行うと

$$\alpha X^2+e'Y=0\ (e'\neq 0 \text{ のとき}),\quad \alpha X^2+f''=0\ (e'=0 \text{ のとき})$$

の形になる．これらはそれぞれ放物線，平行 2 直線（1 直線又は空集合の場合を含む）を表す．$\alpha=0$ のときも同様の考察により，同じ形の曲線が得られることがわかる．ところで，5.1 の定理 1 より $\alpha\beta=|A|=ac-b^2$ であった．したがって 2 次曲線 ④ は

$ac - b^2 > 0$ のとき楕円（1 点又は空集合の場合を含む）

$ac - b^2 < 0$ のとき双曲線（交わる 2 直線の場合を含む）

$ac - b^2 = 0$ のとき放物線（平行 2 直線，1 直線又は空集合の場合を含む）

と分類される．

例題 1.

次の 2 次形式の標準形と変形に使われる直交行列 P を求めよ．

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$$

解答　$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる．

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ とおけば

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 2 & x-5 \end{vmatrix} = (x-6)(x-1)$$

より A の固有値は $1, 6$ である．

固有値 $1, 6$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ となる．$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおけば $f(x,y) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X^2 + 6Y^2$．よって $f(x,y)$ の標準形は $X^2 + 6Y^2$ である．

例題 2.

次の 2 次曲線のグラフをかけ．

(1) $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$　　(2) $x^2 - 6xy + y^2 + 2 = 0$

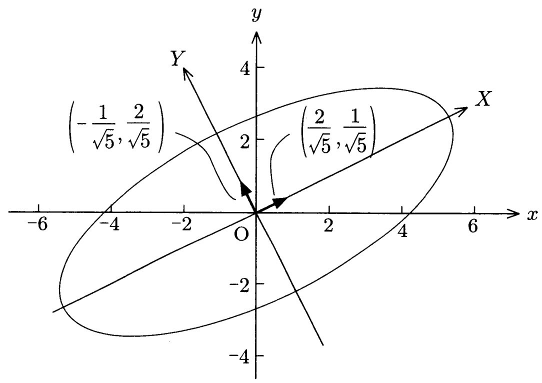
解答　(1) 例題1より $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおくと

$$X^2 + 6Y^2 = 36$$

すなわち

$$\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{6} = 1 \quad (\text{楕円})$$

である．



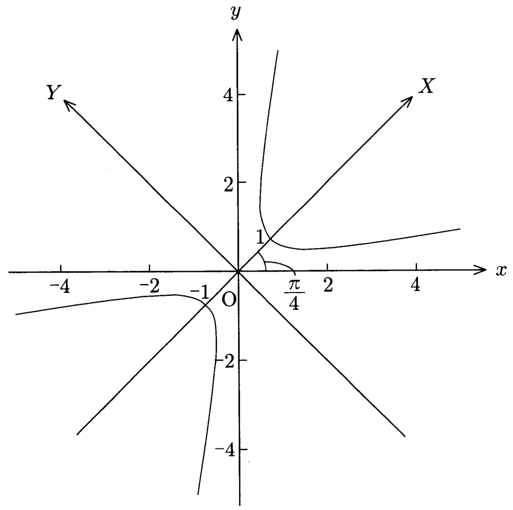
(2) $x^2 - 6xy + y^2 + 2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 = 0$ と表せる．

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化する．固有方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 3 & x-1 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2) = 0$ より固有値は $-2, 4$ である．

固有値 $-2, 4$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．直交行列 P として $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ とおき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2 \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2 \\ &= -2X^2 + 4Y^2 + 2 = 0, \end{aligned}$$

すなわち $X^2 - 2Y^2 = 1$（双曲線）である．



A

1.　次の2次形式の標準形と変形に使われる直交行列 P を求めよ．

(1) $f(x,y) = x^2+xy+y^2$　(2) $f(x,y) = 6xy$　(3) $f(x,y) = 3xy+4y^2$

(4) $f(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2zx$

2.　次の2次曲線のグラフをかけ．

(1) $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 5$　(2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$

(3) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = 0$

(4) $x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y = 0$

B

1.　$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ のとき，関数 $f\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ （a_{ij} は実数で $a_{ij} = a_{ji}$）の最大値と最小値はそれぞれ行列 $A = (a_{ij})$ の固有値の最大値と最小値に等しいことを示せ．

A の解答

1. (1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる．$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$ で，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとる

ことができる．$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ と変換すれば $f(x,y)=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2$ となり標準形が得られる．

(2) $f(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と表せる．$\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ の固有値は $3,-3$ で，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ をとることができる．$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ と変換すれば $f(x,y)=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=3X^2-3Y^2$ となり標準形が得られる．

(3) $f(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と表せる．$\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{9}{2},-\frac{1}{2}$ で，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$ をとることができる．$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ と変換すれば $f(x,y)=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{9}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\frac{9}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2$ となり標準形が得られる．

(4) $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ と表せる．

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $2, -1$（重複度は 2）である．固有値 2 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．固有値 -1 に対応する 1 次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ をとることができる．

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

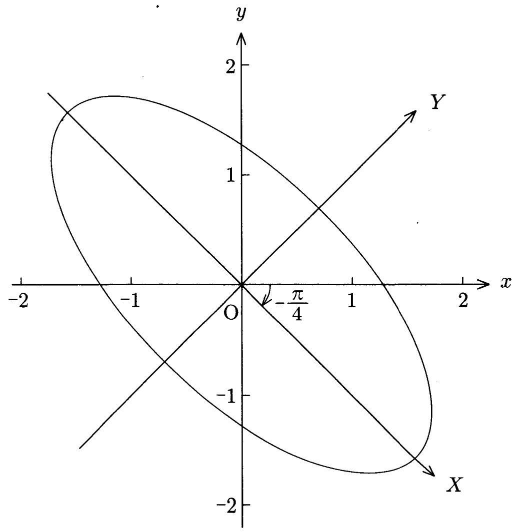
とおけば $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 2X^2 - Y^2 - Z^2$ となり標準形が得られる．

2. (1) $3x^2+4xy+3y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる．$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $1, 5$ であり，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 5 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 5 \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 5 \\ &= X^2 + 5Y^2 - 5 = 0, \end{aligned}$$

すなわち $\dfrac{X^2}{5} + Y^2 = 1$（楕円）である．



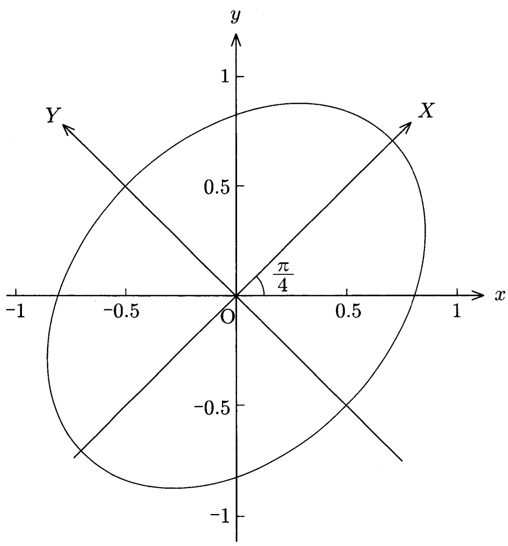
(2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる．

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $2, 4$ で，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

とおけば P は直交行列で，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 2 \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 2 \\
&= 2X^2 + 4Y^2 - 2 = 0,
\end{aligned}
$$

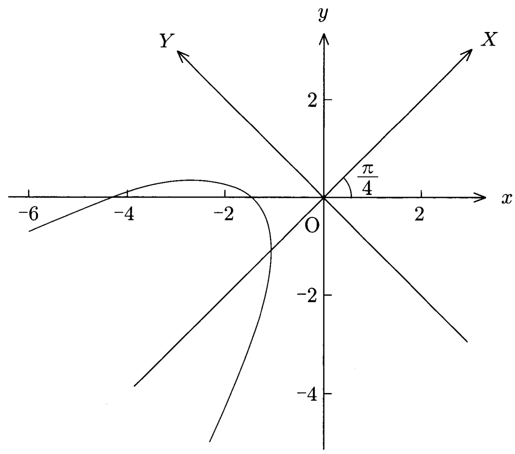
すなわち $X^2 + 2Y^2 = 1$（楕円）である．



(3) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6$ と表せる．$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $0, 2$ で，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 6 \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 6 \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 6 \\
&= 2Y^2 + 4X - 4Y + 6 = 0,
\end{aligned}
$$

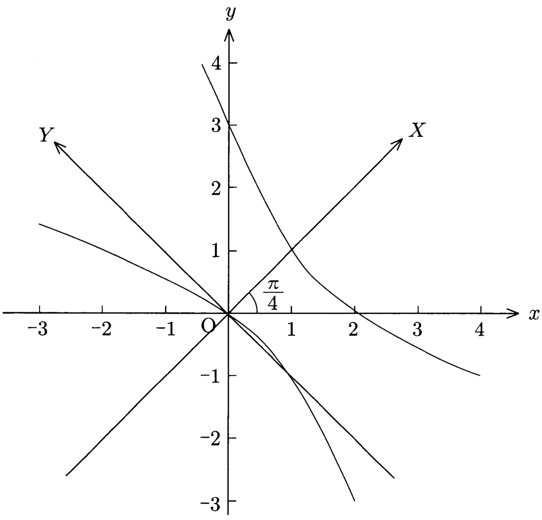
すなわち $X = -\frac{1}{2}(Y-1)^2 - 1$（放物線）である．



(4) $x^2+3xy+y^2-2x-3y=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+$ $\begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる． $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}$ で，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる． $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$
\begin{aligned}
&x^2+3xy+y^2-2x-3y \\
&\quad=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&\quad=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&\quad=\frac{5}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2-\frac{5}{\sqrt{2}}X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y \\
&\quad=\frac{5}{2}\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(Y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1=0,
\end{aligned}
$$

すなわち $\dfrac{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2}-\dfrac{\left(Y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2}=1$ （双曲線）である．



B の解答

1. 対称行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n)$ とする．適当な直交行列 P を選んで $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とすれば

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}\,{}^tPAP\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

P は直交行列だから $|\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| = 1$．このとき

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n y_i^2 = \lambda_n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1$$

より $\lambda_1 \leq f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \lambda_n$.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_n,$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1$$

だから $f(x_1, \cdots, x_n)$ は最大値 λ_n，最小値 λ_1 をとる．