第 1 章

平面・空間のベクトル

1.1 ベクトルの内積・外積

ベクトルとは

向きと大きさを持った量をベクトルという．力や風速や位置の変化などはベクトルで表現することができる．ベクトルは線分に矢印をつけて表示することができ，矢印の始まる点を始点，終わる点を終点という．始点 A から終点 B までのベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く．また，始点と終点が同じ，すなわち大きさが零のベクトルを零ベクトルと呼ぶ．

あるベクトルを平行移動したものはすべて同じ向きと大きさを持つと考え，同じベクトルとして扱う．すると，始点や終点に依存した書き方をする必要はないことになるので，このような場合は $\vec{a}$ や $\boldsymbol{a}$ と書く．零ベクトルは $\vec{0}, \mathbf{0}$ と書く．

ベクトルを xy 平面上に描いた時，始点から終点までの x, y 座標のそれぞれの変化量をこのベクトルの x, y 成分といい，ベクトルを平行移動させても成分は同じなので，ベクトルを x, y 成分の組で表せる．これをベクトルの成分表示という．たとえば，始点と終点を比較して x 座標が 1 増加し y 座標が 2 増加しているような xy 平面上のベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a} = (1, 2)$ とか $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と成分表示する．また，始点が原点 O になるようにベクトルを平行移動させたときの終点の座標がこのベクトルの成分であると考えることもでき，点 $\mathrm{P}(a, b)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a, b)$ となる．このベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点 P の位置ベクトルと呼ぶ．xyz 空間内のベクトルについても同様に成分表示を考えることができる．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさのことを $|\boldsymbol{a}|$ と表す．$\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ であれば三平方の定理により $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ となる．

ベクトルの和・実数倍

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の終点にベクトル $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせるように平行移動し，$\boldsymbol{a}$ の始

点から $\boldsymbol{b}$ の終点までのベクトルを考えて，これをベクトルの和といい $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と書く．$\boldsymbol{a}=(a,b,c)$, $\boldsymbol{b}=(p,q,r)$ であれば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a+p,\ b+q,\ c+r)$ と，x,y,z 成分をそれぞれ合計したベクトルになる．

ベクトル $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ に対してその k 倍のベクトルを $k\boldsymbol{a}=(ka,kb,kc)$ と定義する．$k>0$ の場合には $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで大きさが k 倍になったベクトルのことであり，0倍は零ベクトルとなり，$k<0$ の場合は $\boldsymbol{a}$ と反対の向きで大きさが $|k|$ 倍になったベクトルとなる．また，$(-1)\boldsymbol{a}$ のことを $-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ のことを $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ と書く．

和と実数倍に関して次のような法則が成り立つ．

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$$

$$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$$

$$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\qquad 0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\qquad k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

ベクトルの内積（スカラー積）

大きな岩を10の力で20の距離運ぶ仕事の量は $10\times 20=200$ と定義するのが良さそうである．しかし，移動方向に対して斜め（たとえば，仰角 $\dfrac{\pi}{3}$ ラジアン）に力を掛けている場合，移動方向に対して実際に使った力は $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ で半分ということになるので，この場合の仕事の量は $\dfrac{1}{2}\times 10\times 20=100$ と考える．

ベクトルで考えると，$\boldsymbol{a}$ という力で $\boldsymbol{b}$ という位置の移動をしたときに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が θ であれば，仕事の量は $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ となるが，これを一般化して任意の二つのベクトルに対して同じように定義して内積と呼び，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と書き表す．ここで，演算記号の「$\cdot$」を省略してはいけない．ベクトルを成分で表した場合，$\boldsymbol{a}=(a,b)$, $\boldsymbol{b}=(p,q)$ であれば，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ap+bq$ と，x 成分同士，y 成分同士の積（空間ベクトルであれば z 成分同士の積も）の合計になることがわかっている．内積の計算結果はベクトルではなく数値になることに注意せよ．そのため，三つのベクトルの内積のようなもの $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ は定義されない．

なお，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ もしくは $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と書くこともある．

内積に関して次のような法則が成り立つ．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$$

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

内積は成分からすぐに計算できるので，2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\qquad(0\leq\theta\leq\pi)$$

から簡単に求めることができる．とくに，二つのベクトルのなす角が直角（$\frac{\pi}{2}$ ラジアン）であれば $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ という条件式を満たすことになる．この条件が成立する二つのベクトルは直交するといい $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ と書く．

平行四辺形 ABCD で，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とすれば，この平行四辺形の面積は $S=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$（$\theta$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角）となり

$$S^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

のように内積から計算できることがわかる．平面ベクトル $\boldsymbol{a}=(a,b),\boldsymbol{b}=(c,d)$ の場合は $S^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2$ より

$$S=|ad-bc|$$

となり，空間ベクトル $\boldsymbol{a}=(a,b,c),\boldsymbol{b}=(p,q,r)$ の場合は

$$S=\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}$$

となる．

空間ベクトルの外積（ベクトル積）

内積は平面ベクトルにも空間ベクトルにも定義できるが，これに対して空間ベクトルに特有の外積という演算がある．$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交していて，

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を二辺にもつ平行四辺形の面積の値を大きさにもち，

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ で右手系（右手の親指・人差し指・中指を立てたような位置関係）となる

ような空間ベクトルのことである．$\boldsymbol{a}=(a,b,c),\boldsymbol{b}=(p,q,r)$ の場合は

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(br-cq,\ cp-ar,\ aq-bp)$$

となる．あとで学ぶ行列式を使うと

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix})$$

とも表せるし，$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ を x,y,z 軸方向の単位ベクトルとするとき

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

とも表せる．

2つのベクトルが直交することは内積が0となることで判定できたが，2つのベクトルが平行であることは（向きが逆である場合も含め）外積が零ベクトルとなることで判定できる．

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

外積に関して次のような法則が成り立つ．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

$$(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を二辺とする平行四辺形を $\boldsymbol{c}$ だけ平行移動してできる立体を平行六面体という．$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が右手系をなす場合，平行六面体の体積は $V=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ で求められる．左手系（左手の親指・人差し指・中指を立てたような位置関係）の場合はこの値は負になり，体積はその絶対値となる．この $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ のことをスカラー三重積といい，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ と表す．

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$$

となる．

例題 1.

不等式 $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ を証明し，これよりシュヴァルツ (Schwarz) の不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

を導け．また等号が成立する条件を示せ．

解答　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ において $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であるから，$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ が成り立つ．等号が成立するのは $\cos\theta = \pm 1$ すなわち $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ のときに限る．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とすると，上の不等式は

$$\begin{aligned} -\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} &\leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{aligned}$$

となるので

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

が成立する．

等号が成立するのは $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ すなわち $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ のときに限る．

（別解）　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ の時は $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = 0$ となるので成立する．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とすると，任意の実数 t について $|t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 \geq 0$ であることから

$$0 \leq |t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = (t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot(t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = t^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

という 2 次不等式がすべての実数 t について成立することになるので，この 2 次式の判別式は

$$D/4 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) \leq 0$$

となる．これを書き換えると

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \leq (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

すなわち

$$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

が成立することがわかる．

例題 2.

4点 O$(0,0,0)$, A$(2,-1,1)$, B$(1,-1,0)$, C$(3,4,5)$ に対し，次に示されたものを計算せよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) $\triangle$ ABC の面積 S

(4) 四面体 OABC の体積 V

解答　(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$,　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot0=3$.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$0\le\theta\le\pi$ であるから, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,1,-1)$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,0,-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,5,4)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(5,3,-5)$. よって

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+3^2+(-5)^2}=\frac{\sqrt{59}}{2}.$$

(4) 四面体の体積は $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を3辺とする平行六面体の体積の $\dfrac{1}{6}$ だから

$$V=\frac{1}{6}\cdot|(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{6}|1\cdot3+1\cdot4+(-1)\cdot5|=\frac{1}{3}.$$

A

1.　ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$ を図示せよ．

2.　$\boldsymbol{a}=(5,-2,k)$ のとき，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{30}$ となるように k の値を定めよ．

3.　平行四辺形 ABCD において A$(-1,4,3)$,B$(2,3,5)$,C$(3,7,5)$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

4.　$\boldsymbol{a}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,3,4)$, $\boldsymbol{c}=(0,-1,2)$ とする．$\boldsymbol{a}=s\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}$ と表わすとき，s,t の値を求めよ．

5.　$\boldsymbol{a}=(-2,1,z)$, $\boldsymbol{b}=(2,y,-3)$, $\boldsymbol{c}=(x,0,4)$ のどの2つのベクトルも直交するように x,y,z の値を定めよ．

6.　ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,-2,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,4,-5)$ について

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ をそれぞれ求めよ．

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の両方に直交するベクトルを1つ求めよ．

7.　$\boldsymbol{a}=(-3,5,6)$, $\boldsymbol{b}=(5,7,9)$ について次に示されたものを計算せよ．

(1) $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$

8.　ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,3,-1), \boldsymbol{b}=(3,-2,1), \boldsymbol{c}=(1,2,2)$ で作られる平行六面体の体積 V と表面積 S を求めよ．

9.　4 点 $\mathrm{A}(2,3,5)$, $\mathrm{B}(7,5,9)$, $\mathrm{C}(8,7,11)$, $\mathrm{D}(-1,6,-5)$ を頂点にもつ四面体の体積を求めよ．

10.　ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,-1,1), \boldsymbol{b}=(2,0,1), \boldsymbol{c}=(1,3,k)$ の作る平行六面体 Q の体積が 5 であるとするとき，次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が左手系をなすとき，k の値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形が Q の底面であると考えたとき，Q の高さを求めよ．

11.　空間ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ について次を示せ．

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$

B

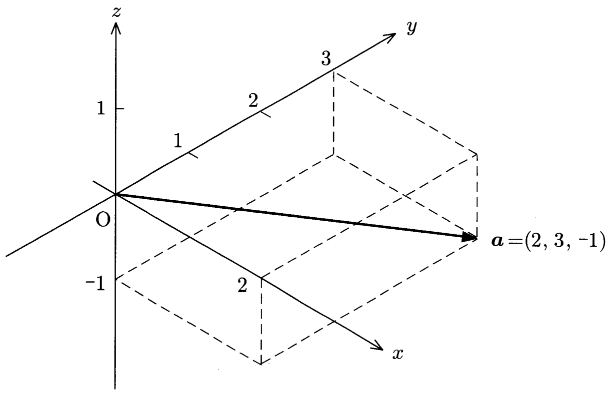
1.　ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について次を示せ．

(1) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$

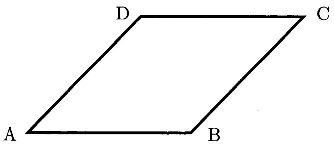
A の解答

1.



2. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5^2+(-2)^2+k^2}=\sqrt{30}$ より $k^2+29=30$．よって $k^2=1$ より $k=\pm1$ となる．

3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,3,2)-(3,-1,2)=(1,4,0)$．よって $\mathrm{D}(0,8,3)$ である．



4. $(1, 2, 1) = s(2, 3, 4) + t(0, -1, 2)$ より

$$\begin{cases} 1 = 2s \\ 2 = 3s - t \\ 1 = 4s + 2t \end{cases}$$

が成立する．これを解くと $s = \dfrac{1}{2}, t = -\dfrac{1}{2}$ となる．

5. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0, \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ となればよいので

$$\begin{cases} (-2) \cdot 2 + 1 \cdot y + z \cdot (-3) = 0 \\ 2 \cdot x + y \cdot 0 + (-3) \cdot 4 = 0 \\ x \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 4 \cdot z = 0 \end{cases}$$

を解いて

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 13 \\ z = 3 \end{cases}$$

となる．

6. (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot (-5) = -15$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}.$$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ より

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{-15}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ より $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$.

(2) 求めるベクトルを $\boldsymbol{c} = (x, y, z)$ とすると，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ となればよいので

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 2 \cdot z = 0 \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y + (-5) \cdot z = 0 \end{cases}$$

よって $x = \dfrac{1}{5}z, y = \dfrac{11}{10}z$ となるので，たとえば $z = 10$ とすれば $\boldsymbol{c} = (2, 11, 10)$ が求めるベクトルの1つである．

(別解) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に直交するので，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (2, 11, 10)$ が求めるベクトルの1つである．

7. (1) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = (9, 31, 39)$, $5\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = (-25, 11, 12)$, $(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \cdot (5\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) = 9 \cdot (-25) + 31 \cdot 11 + 39 \cdot 12 = 584, |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{70}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{155}$.

(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (3, 57, -46)$

$$(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \times (5\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) = 10\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + 15\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - 6\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}$$

$$= \mathbf{0} - 15\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \mathbf{0}$$

$$= -19\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

$$= (-57, -1083, 874)$$

8. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (2, 3, -1) \cdot (-6, -5, 8) = 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 8 = -35.$

よって $V = |-35| = 35$. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (1, -5, -13)$ より

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-13)^2} = \sqrt{195}.$$

$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (-6, -5, 8)$ より

$$|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 8^2} = 5\sqrt{5}.$$

$\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = (-8, 5, -1)$ より

$$|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}| = \sqrt{(-8)^2 + 5^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{10}.$$

よって $S = 2(\sqrt{195} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{10})$.

9. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (5, 2, 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (6, 4, 6)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-3, 3, -10)$ より求める体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}})\right| &= \frac{1}{6}|(5, 2, 4) \cdot (-58, 42, 30)| \\ &= \left|\frac{5 \cdot (-58) + 2 \cdot 42 + 4 \cdot 30}{6}\right| = \frac{43}{3}. \end{aligned}$$

10. (1) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (-1, 0, 2) \cdot (1, 3, k) = 2k - 1$. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が左手系をなすから，この値は負であり，$|2k-1| = 5$ であることより $2k - 1 = -5$，よって $k = -2$ である．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積は

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

であり，これが底面積であるから，求める高さ h は $\sqrt{5}h = 5$ となることより，$h = \sqrt{5}$ である．

11. (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$

(2) (1) より

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot (-\boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$$

よって

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2|\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$$

B の解答

1. (1) $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とすると, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (b_2c_3 - b_3c_2,\ b_3c_1 - b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1)$ より $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の x 成分は

$$\begin{aligned}
&a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) = (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\
&\qquad = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\
&\qquad = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_1 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_1
\end{aligned}$$

となる.

同様の計算により, y, z 成分はそれぞれ

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_2, \quad (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_3 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_3$$

となるから

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \\
&\qquad = ((\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_1 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_1,\ (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_2,\ (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_3 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_3) \\
&\qquad = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(b_1, b_2, b_3) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(c_1, c_2, c_3) \\
&\qquad = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

が示される.

(2) (1) より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}, \\
\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

となるから

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}.$$

1.2　直線・平面の方程式

直線の方程式

xyz 空間内の点 $\mathrm{A}(p,q,r)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{d}=(a,b,c)$ に平行な直線上に点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ があるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{d}$ より

$$(x-p,\ y-q,\ z-r)=t(a,b,c) \qquad (t \text{ は任意実数})$$

が成立することがわかる．成分に分けて書けば

$$\begin{cases} x-p=ta \\ y-q=tb \\ z-r=tc \end{cases}$$

となるが，これらの式から t を消去した

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}$$

を，直線の方程式という．ただし，上記は a,b,c がいずれも 0 ではない場合である．

a,b は 0 ではないが $c=0$ の場合は

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}, \quad z=r$$

a は 0 ではないが $b=c=0$ の場合は

$$y=q, \quad z=r$$

が直線の方程式である．

なお，直線の方程式は $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} \times \boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ より

$$(x-p,\ y-q,\ z-r)\times(a,b,c)=(0,0,0)$$

が成立することからも導かれる．

上記の $\boldsymbol{d}=(a,b,c)$ を直線の方向ベクトルと呼ぶ．

平面の方程式

xyz 空間内の点 $\mathrm{A}(p,q,r)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ に垂直な平面上に点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ があるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n}$ より

$$(x-p,\ y-q,\ z-r)\cdot(a,b,c)=0$$

すなわち

$$a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0$$

が成立することがわかる．これを平面の方程式という．この式を展開すると

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (\text{ここで，} d=-(ap+bq+cr))$$

のように x, y, z の1次方程式になる．逆に，x, y, z の1次方程式

$$ax + by + cz + d = 0$$

の解の1つを $(x, y, z) = (p, q, r)$ とすれば，$d = -(ap + bq + cr)$ となるので，この1次方程式を

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0$$

と変形できる．つまり，x, y, z の1次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ は，点 $\mathrm{A}(p, q, r)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面を表すことがわかる．

上記の $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ を，平面の法線ベクトルと呼ぶ．

直線と平面のパラメータ表示

直線の方程式を導いた $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\boldsymbol{d}$ を，点 A,P の位置ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ を使って書き直すと

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{d} \qquad (t \text{ は任意実数})$$

という直線のパラメータ表示が得られる．これと同様に，平行でない2つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して，点 A を通り $\boldsymbol{u}$ 方向の直線と $\boldsymbol{v}$ 方向の直線を両方とも含むような平面がただ1つ定まるが，この平面上の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \qquad (s, t \text{ は任意実数})$$

という平面のパラメータ表示が得られる．

点と平面の距離

xy 平面上の直線 $ax + by + c = 0$ と点 $\mathrm{P}(p, q)$ との距離は

$$\frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で求められた．これと同様に，xyz 空間内の平面 $ax + by + cz + d = 0$ と点 $\mathrm{P}(p, q, r)$ との距離は

$$\frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で求められる．

球面の方程式

点 $\mathrm{A}(a, b, c)$ からの距離が定数 r に等しい点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の全体は，A を中心とし半径 r の球面となる．この条件 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = r$ の両辺を2乗することにより

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

という球面の方程式が導かれる．

例題 1.

$\mathrm{A}(-1,4,3)$, $\mathrm{B}(2,3,5)$ を通る直線の方程式を求めよ．また，この直線に垂直で，点 $\mathrm{C}(2,3,7)$ を含む平面の方程式を求めよ．更に，この平面と直線の交点を求めよ．

解答　求める直線は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-1,2)$ に平行で，点 $\mathrm{A}(-1,4,3)$ を通るから

$$\frac{x-(-1)}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{2}$$

すなわち

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{2}$$

と表される．求める平面は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直で点 $\mathrm{C}(2,3,7)$ を通るから

$$3(x-2)+(-1)(y-3)+2(z-7)=0$$

すなわち

$$3x-y+2z-17=0$$

と表される．直線をパラメータ表示すると，$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-3}{2}=t$ より

$$(x,y,z)=(3t-1,\ -t+4,\ 2t+3)$$

と表されるので，求める交点においては

$$3(3t-1)-(-t+4)+2(2t+3)-17=0$$

より $t=\dfrac{9}{7}$ となる．よって交点の座標は $\left(\dfrac{20}{7},\dfrac{19}{7},\dfrac{39}{7}\right)$ である．

例題 2.

2 平面 $x-y+2z-1=0$, $2x+y+z+4=0$ について次の問に答えよ．

(1) 交線の方程式を求めよ．

(2) 2 平面のなす角 θ を求めよ．ただし $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) 2 平面の交線を含み，点 $\mathrm{P}(1,1,1)$ を通る平面の方程式を求めよ．

解答　(1) 交線上の点は 2 平面の方程式を同時に満たすので，連立 1 次方程式 $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+4=0 \end{cases}$ を解いて，$x=-1-z$, $y=-2+z$ となる．ここで z 座標を t とすれば，$(x,y,z)=(-1,-2,0)+t(-1,1,1)$ とパラメータ表示されるので，この直線は点 $\mathrm{Q}(-1,-2,0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{d}=(-1,1,1)$ に平行な直線であるとわかる．よって求める直線の方程式は

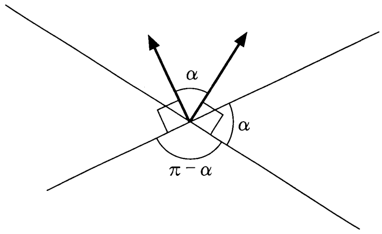
$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$$

である．

(2) 2 平面の法線ベクトルは $(1,-1,2)$ と $(2,1,1)$ であり，これらのなす角を α とすると，求める角 θ は α もしくは $\pi-\alpha$ であることがわかる．

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

より $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ であり，$0 \leq \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ となる．



(2 平面を横から見た図)

(3) 求める平面の法線ベクトルは 2 平面の交線の方向ベクトル $\boldsymbol{d} = (-1,1,1)$ と，交線上の点 $\mathrm{Q}(-1,-2,0)$ から $\mathrm{P}(1,1,1)$ までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (2,3,1)$ の両方に垂直であるから $\boldsymbol{d}\times\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (-2,3,-5)$ が法線ベクトルとなるので，求める方程式は

$$-2(x-1)+3(y-1)-5(z-1)=0.$$

よって $-2x+3y-5z+4=0$ となる．

例題 3.

球面 $S\colon x^2+y^2+z^2-10x-10z+25=0$ と

平面 $K\colon 2x-2y+z=6$ がある．

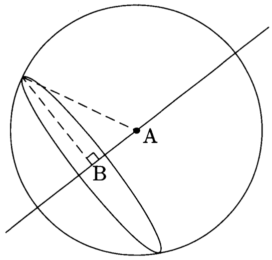
(1) S と K の交わりの円の中心の座標と半径を求めよ．

(2) K に平行で S に接する平面の方程式を求めよ．

解答　(1) S の方程式を変形すると

$$(x-5)^2+y^2+(z-5)^2=25$$

となるので，S は点 $\mathrm{A}(5,0,5)$ を中心とする半径 5 の球面である．求める円の中心は $\mathrm{A}(5,0,5)$ を通り，K の法線ベクトル $(2,-2,1)$ に平行な直線 ℓ が K と交わる点である．ℓ をパラメータ表示した $(x,y,z)=(5,0,5)+t(2,-2,1)$ より



$$2(5+2t)-2(-2t)+(5+t)=6.$$

よって $t=-1$ となるから，求める円の中心は $\mathrm{B}(3,2,4)$ である．

AB$=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ より，求める円の半径は $\sqrt{5^2-3^2}=4$．

(2) 求める平面は ℓ と球面の交点を通り，K と同じ法線ベクトルを持つ平面

である．ℓ と S の交点は

$$(5+2t-5)^2+(-2t)^2+(5+t-5)^2=25$$

より $9t^2=25$．よって $t=\pm\dfrac{5}{3}$ となるから

$$\left(5\pm\frac{10}{3},\ \mp\frac{10}{3},\ 5\pm\frac{5}{3}\right) \qquad (\text{複号同順})$$

とわかる．

よって求める平面の方程式は

$$2\left(x-5\mp\frac{10}{3}\right)-2\left(y\pm\frac{10}{3}\right)+\left(z-5\mp\frac{5}{3}\right)=0.$$

従って $2x-2y+z-30=0$ または $2x-2y+z=0$ である．

A

1.　次のように定義される直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $\mathrm{A}(1,-2,3)$ を通り，$\boldsymbol{d}=(3,-2,1)$ に平行な直線．

(2) 2 点 $\mathrm{A}(1,-2,3)$, $\mathrm{B}(1,2,0)$ を通る直線．

(3) 2 点 $\mathrm{A}(1,-1,1)$, $\mathrm{B}(2,0,-1)$ を通る直線．

(4) 2 点 $\mathrm{A}(1,-1,1)$, $\mathrm{B}(2,-1,4)$ を通る直線．

(5) 直線 $x=\dfrac{y}{4}=z$ に平行で点 $\mathrm{A}(3,2,2)$ を通る直線．

2.　2 平面 $x+y+z=4$, $x-3z=1$ の交線の方程式を求めよ．

3.　次のように定義される平面の方程式を求めよ．

(1) 点 $\mathrm{A}(-1,5,3)$ を通り，$\boldsymbol{n}=(2,-5,7)$ に垂直な平面．

(2) 3 点 $\mathrm{A}(1,-1,1)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(2,0,-1)$ を通る平面．

(3) 点 $\mathrm{A}(2,-1,1)$ を通り，x 軸に垂直な平面．

(4) 平面 $x+2y+3z=1$ に平行で点 $\mathrm{A}(2,1,1)$ を通る平面．

4.　直線 $\dfrac{x-3}{2}=y+1=\dfrac{z-1}{3}$ と平面 $2x+3y-z=1$ の交点の座標を求めよ．

5.　直線 $x+1=y=\dfrac{z}{2}$ を含み，平面 $2x+2y+z=1$ に垂直な平面の方程式を求めよ．

6.　直線 ℓ: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ を含み，点 $\mathrm{A}(1,1,1)$ を通る平面の方程式を求めよ．

7.　2 直線 ℓ_1: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$, ℓ_2: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ について次の問に答えよ．

(1) 交点の座標を求めよ．

(2) これらの直線のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) これらを含む平面の方程式を求めよ．

8.　点 $\mathrm{P}(3,2,-1)$ から平面 $3x-y-2z+5=0$ に下ろした垂線の長さを求めよ．

9.　点 $\mathrm{P}(3,2,-1)$ から直線 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ に下ろした垂線の長さを求めよ．

10.　4点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(0,0,4)$, $\mathrm{B}(1,1,0)$, $\mathrm{C}(1,-1,6)$ を通る球面 S がある．

(1) S の中心の座標と半径を求めよ．

(2) S が xy 平面から切り取る部分の面積を求めよ．

B

1.　2直線 $\ell_1: x-1=\dfrac{y+2}{2}=z-4$, $\ell_2: 2-x=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{2}$ がある．

(1) ℓ_2 を含み，ℓ_1 に平行な平面 α の方程式を求めよ．

(2) α の方程式を利用して，ℓ_1, ℓ_2 の共通垂線の長さを求めよ．

2.　2平面 $\alpha_1: 5x-4y-3z=1$, $\alpha_2: 2x-2y+z=1$ および
直線 ℓ: $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{5-z}{4}$ がある．

(1) 2平面 α_1, α_2 のなす角を求めよ．

(2) 直線 ℓ と平面 α_1 との交点 A の座標を求めよ．

(3) 直線 ℓ は平面 α_2 に含まれていることを示せ．

(4) 直線 ℓ と平面 α_1 のなす角を求めよ．

(5) 2平面 α_1, α_2 の交線 m と直線 ℓ のなす角を求めよ．

3.　3平面 $\alpha: x+y=1$, $\beta: y+z=1$, $\gamma: 2x+y+z=-1$ がある．β と γ の交線を ℓ，γ と α の交線を m とする．

(1) 2平面 α, β のなす角を求めよ．

(2) 2平面 α, γ のなす角を求めよ．

(3) 2直線 ℓ, m のなす角を求めよ．

(4) 2直線 ℓ, m の交点の座標を求めよ．

(5) 直線 ℓ を含み，平面 α となす角が $\dfrac{\pi}{4}$ である平面の方程式を求めよ．

A の解答

1. (1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,4,-3)$ より $x=1$, $\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-3}{-3}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,1,-2)$ より $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,0,3)$ より $y=-1$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$

(5) 求める直線は $\boldsymbol{d}=(1,4,1)$ に平行だから $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{1}$

2.　交線上の点は2平面の方程式を同時に満たすので，連立1次方程式

$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-3z=1 \end{cases}$ を解くと，$x = 1+3z$, $y = 3-4z$ となる．ここで z 座標を t とすれば，$(x,y,z)=(1,3,0)+t(3,-4,1)$ とパラメータ表示されるので，求める直線は $(1,3,0)$ を通り $\boldsymbol{d}=(3,-4,1)$ に平行な直線であるとわかる．よって求める直線の方程式は

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{1}$$

3. (1) $2(x+1)-5(y-5)+7(z-3)=0$ より

$$2x-5y+7z+6=0$$

(2) 求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とすると，3 点を通ることより

$$\begin{cases} a-b+c+d=0 \\ \quad\;\; b \qquad +d=0 \\ 2a \qquad -c+d=0 \end{cases}$$

が成立する．これを解くと $a=-d, b=-d, c=-d$ となるので，求める平面の方程式は $-dx-dy-dz+d=0$ となるが，$d=0$ ならばこれは平面を表さないので $d\neq 0$ でなくてはならない．よって両辺を $-d$ で割って $x+y+z-1=0$ が求める平面の方程式である．

(別解)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,2,-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,1,-2)$ より，求める平面の法線ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,-3,-3)$ である．よって求める平面の方程式は

$$-3(x-1)-3(y+1)-3(z-1)=0$$

より $x+y+z-1=0$.

(3) x 軸に垂直であることより，$\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ は法線ベクトルとなるから

$$1(x-2)+0(y+1)+0(z-1)=0$$

より $x=2$.

(4) 平面 $x+2y+3z=1$ の法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(1,2,3)$ は求める平面の法線ベクトルでもあるから

$$1(x-2)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

より $x+2y+3z-7=0$.

4. $\dfrac{x-3}{2}=y+1=\dfrac{z-1}{3}=t$ とおくと，直線上の点は

$$(x,y,z)=(2t+3,\ t-1,\ 3t+1)$$

と表せるから，交点が平面の方程式を満たすことにより

$$2(2t+3)+3(t-1)-(3t+1)=1.$$

よって $t=-\dfrac{1}{4}$ となるので求める交点の座標は $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ である．

5. 求める平面の法線ベクトルは，与えられた直線の方向ベクトル $\boldsymbol{d}=(1,1,2)$ および与えられた平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$ に垂直であるから，$\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{n}=(-3,3,0)$ は求める平面の法線ベクトルになるとわかる．また求める平面は，与えられた直線上の点 $(-1,0,0)$ を通るから，その方程式は

$$-3(x+1)+3(y-0)+0(z-0)=0.$$

よって $x-y+1=0$ となる．

6. 直線 ℓ は点 $\mathrm{B}(0,1,2)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{d}=(2,3,4)$ に平行な直線である．求める平面の法線ベクトルは，このベクトル $\boldsymbol{d}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,0,1)$ に垂直であるから，$\boldsymbol{d}\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-6,3)$ は求める平面の法線ベクトルである．求める平面は点 $\mathrm{A}(1,1,1)$ を通るので

$$3(x-1)-6(y-1)+3(z-1)=0$$

より $x-2y+z=0$.

7. (1) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}=t$ とおくと，直線 ℓ_1 上の点は $(x,y,z)=(2t+3,\ t+3,\ -t+2)$ と表せる．これが ℓ_2 上の点である条件は

$$\frac{2t+3}{-1}=\frac{t+3-4}{2}=\frac{-t+2-1}{-2}$$

より $t=-1$ である．よって求める交点の座標は $(1,2,3)$.

(2) ℓ_1,ℓ_2 の方向ベクトルは，それぞれ $(2,1,-1)$, $(-1,2,-2)$ であるから

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}\cdot 3}=\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

(3) 求める平面の法線ベクトルは ℓ_1,ℓ_2 の方向ベクトルの外積を考えればよいから

$$(2,1,-1)\times(-1,2,-2)=(0,5,5)$$

となる．また，(1) で求めた交点を通るから，求める平面の方程式は

$$0(x-1)+5(y-2)+5(z-3)=0$$

よって $y+z-5=0$ となる．

8. 平面の法線ベクトルは $(3,-1,-2)$ であり，垂線はこのベクトルに平行なので，点 P を通りこのベクトルに平行な直線をパラメータ表示すると

$$(x,y,z)=(3,2,-1)+t(3,-1,-2)=(3+3t,\ 2-t,\ -1-2t)$$

となる．この直線と平面との交点を Q とすると，求める垂線の長さは PQ である．

$$3(3+3t)-(2-t)-2(-1-2t)+5=0$$

より $t=-1$. よって $\mathrm{Q}(0,3,1)$ である．

求める垂線の長さは $\mathrm{PQ} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

(補足) この考察を一般化し，点 $\mathrm{P}(p, q, r)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離を求めてみよう．点 P を通り平面に垂直な直線は

$$(x, y, z) = (p, q, r) + t(a, b, c) = (p + ta,\ q + tb,\ r + tc)$$

と表せるので，交点 Q は

$$a(p + ta) + b(q + tb) + c(r + tc) + d = 0$$

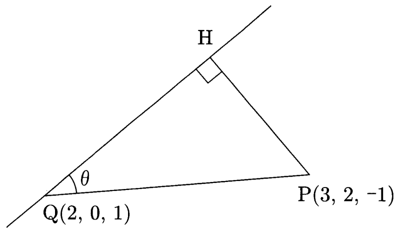
より $t = -\dfrac{ap + bq + cr + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ のときであるとわかる．

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{(p + ta - p)^2 + (q + tb - q)^2 + (r + tc - r)^2}\\ &= \sqrt{t^2(a^2 + b^2 + c^2)} = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ} = \left|-\frac{ap + bq + cr + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

9. 与えられた直線は点 $\mathrm{Q}(2, 0, 1)$ を通りベクトル $\boldsymbol{d} = (2, 2, -1)$ に平行な直線である．P からこの直線に下ろした垂線の足を H とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (1, 2, -2)$ と $\boldsymbol{d}$ とのなす角を θ とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{QH} &= |\mathrm{QP}\cos\theta| = |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QP}} \cdot \boldsymbol{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\boldsymbol{d}|}\\ &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{QP}} \cdot \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{d}|} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$



よって

$$\mathrm{PH} = \sqrt{\mathrm{QP}^2 - \mathrm{QH}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

(別解) 直線をパラメータ表示すると

$$(x, y, z) = (2t + 2,\ 2t,\ -t + 1)$$

となるが，P から直線に下ろした垂線の足 H においては，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = (2t - 1,\ 2t - 2,\ -t + 2)$ が直線の方向ベクトル $\boldsymbol{d} = (2, 2, -1)$ と直交することより $2(2t - 1) + 2(2t - 2) - (-t + 2) = 0$. よって $t = \dfrac{8}{9}$ となるので $\mathrm{H}\left(\dfrac{34}{9}, \dfrac{16}{9}, \dfrac{1}{9}\right)$. 従って

$$\mathrm{PH} = \sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{-2}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{153}}{9} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

10. (1) S の中心を $\mathrm{P}(a,b,c)$，半径を r とすれば，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}=r$ より

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=r^2 & \cdots\cdots \text{①} \\ a^2+b^2+(c-4)^2=r^2 & \cdots\cdots \text{②} \\ (a-1)^2+(b-1)^2+c^2=r^2 & \cdots\cdots \text{③} \\ (a-1)^2+(b+1)^2+(c-6)^2=r^2 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

が成立する．① − ②, ① − ③, ① − ④ より

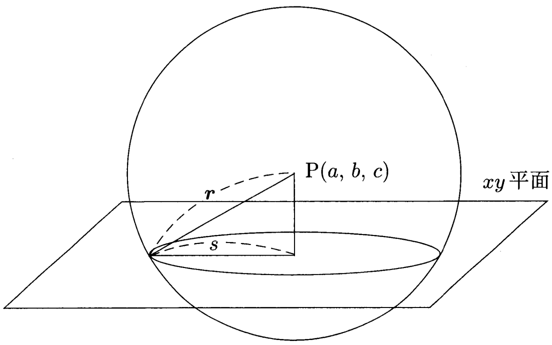
$$\begin{cases} 8c-16=0 \\ 2a+2b-2=0 \\ 2a-2b+12c-38=0 \end{cases}$$

となり，$a=4,\ b=-3,\ c=2$ を得る．また，①より $r=\sqrt{29}$.

(2) S が xy 平面から切り取る部分は円となるので．その半径を s とすると

$$r^2=s^2+c^2$$

より $s=5$. よって面積は 25π である．



B の解答

1. (1) ℓ_1 はベクトル $\boldsymbol{d}_1=(1,2,1)$，ℓ_2 はベクトル $\boldsymbol{d}_2=(-1,2,2)$ に平行な直線である．よって求める平面 α の法線ベクトルとして $\boldsymbol{d}_1\times\boldsymbol{d}_2=(2,-3,4)$ をとることができる．また，α は ℓ_2 上の点 $(2,3,0)$ を通るので，求める方程式は

$$2(x-2)-3(y-3)+4(z-0)=0,$$

すなわち

$$2x-3y+4z+5=0$$

である．

(2) ℓ_1 上の点 P と ℓ_2 上の点 Q を結ぶ QP が共通垂線であるとすると，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2$ のいずれとも直交するので．$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は平面 α の法線ベクトルとなる．

よって求める垂線の長さはPと平面αとの距離であるが，αはℓ_1に平行な平面であるので，ℓ_1上のどの点とαとの距離も同じ値である．よってℓ_1上の点$(1,-2,4)$と平面αとの距離を求めればよい．その値は公式より

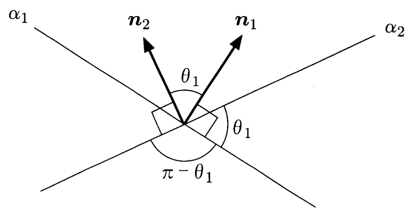
$$\frac{|2\cdot 1-3\cdot(-2)+4\cdot 4+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\sqrt{29}$$

となる．

2. (1) α_1,α_2のなす角はα_1,α_2の法線ベクトル$\boldsymbol{n}_1=(5,-4,-3)$, $\boldsymbol{n}_2=(2,-2,1)$のなす角$\theta_1$もしくは$\pi-\theta_1$である．

$$\cos\theta_1=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{15}{5\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

より$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$．よって$\dfrac{\pi}{4}$．



(2平面を横から見た図)

(2) 直線ℓをパラメータ表示すると$(x,y,z)=(5t-1,\ 3t+1,\ -4t+5)$となる．よって交点Aを表すパラメータ$t$の値は

$$5(5t-1)-4(3t+1)-3(-4t+5)=1$$

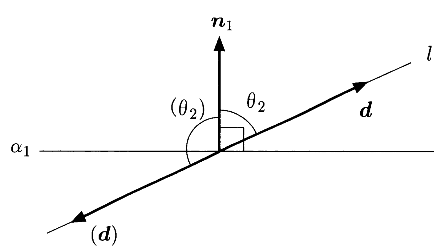
より$t=1$．よってA$(4,4,1)$．

(3) 直線ℓは点B$(-1,1,5)$を通り，ベクトル$\boldsymbol{d}=(5,3,-4)$に平行な直線である．点Bの座標をα_2の方程式の左辺に代入すると$2\cdot(-1)-2\cdot 1+5=1$となるので，この点は平面α_2上の点であり，$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}_2=5\cdot 2+3\cdot(-2)-4\cdot 1=0$であるので，$\boldsymbol{d}$は平面$\alpha_2$上のベクトルである．よって直線$\ell$は平面$\alpha_2$に含まれる．

(4) α_1とℓのなす角は$\boldsymbol{n}_1$と$\boldsymbol{d}$とのなす角をθ_2とすると，$\dfrac{\pi}{2}-\theta_2$もしくは$\theta_2-\dfrac{\pi}{2}$である．

$$\cos\theta_2=\frac{\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{n}_2||\boldsymbol{d}|}=\frac{25}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

より$\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$．よって$\dfrac{\pi}{6}$．



(直線と平面を横から見た図)

(5) α_1とα_2の交線は$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-10,-11,-2)$に平行な直線であるので，

求める角は $\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ のなす角 θ_3 もしくは $\pi - \theta_3$ である．

$$\cos\theta_3 = \frac{\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2|} = \frac{-75}{5\sqrt{2}\cdot 15} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

より $\theta_3 = \dfrac{3}{4}\pi$．よって $\dfrac{\pi}{4}$．

3. (1) α, β の法線ベクトルを $\boldsymbol{u} = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v} = (0,1,1)$ とすると，求める角は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角 θ もしくは $\pi - \theta$ である．

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$．よって $\dfrac{\pi}{3}$．

(2) γ の法線ベクトルを $\boldsymbol{w} = (2,1,1)$ とすると，求める角は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ のなす角 φ もしくは $\pi - \varphi$ である．

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{w}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

より $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$．よって $\dfrac{\pi}{6}$．

(3) ℓ, m はそれぞれ $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (0,2,-2)$, $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} = (-1,1,1)$ に平行なので，求める角はこれらのベクトルのなす角 μ もしくは $\pi - \mu$ である．

$$\cos\mu = \frac{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}||\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}|} = \frac{0}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = 0$$

より $\mu = \dfrac{\pi}{2}$．よって $\dfrac{\pi}{2}$．

(4) 2直線の交点は3平面 α, β, γ の交点であるから，連立1次方程式

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} = 1 \\ \phantom{x+{}} y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

を解いて $(x,y,z) = (-1,2,-1)$．

(5) 求める平面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ とすると，$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{u}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であることより

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = 0 \\ \dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{u}|} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

であるから

$$\begin{cases} 2b - 2c = 0 \\ \dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

となる．よって

$$\begin{cases} b = c & \cdots\cdots \ ① \\ c^2 = 2ab & \cdots\cdots \ ② \end{cases}$$

を得る．ここで②に①を代入し因数分解すると，$c(c-2a)=0$ より $c=0$ もしくは $c=2a$ となる．

(i) $c=0$ のとき．

$b=c=0$ だから，法線ベクトルとして $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ を考えることができる．このベクトルを法線ベクトルとし，点 $(-1,2,-1)$ を通る平面であるから，求める平面の方程式は

$$1\cdot(x+1)+0\cdot(y-2)+0\cdot(z+1)=0$$

より $x+1=0$.

(ii) $c=2a$ のとき．

$b=c=2a$ だから，法線ベクトルとして $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ を考えることができる．このベクトルを法線ベクトルとし，点 $(-1,2,-1)$ を通る平面であるから，求める平面の方程式は

$$1\cdot(x+1)+2(y-2)+2(z+1)=0$$

より $x+2y+2z-1=0$.