

統計学 I の課題問題 解答

問題 1 (問 2.1)

解

- (i) $P(\bar{A})$ が与えられているから、その補集合 (余集合として) として、 $P(A)$ を計算する。すなわち $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 5/8 = 3/8$
- (ii) 事象 A, B に対する和 $P(A \cup B)$ と積 $P(A \cap B)$ の確率が与えられているから、加法性の性質から $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ に、これらの値を代入すると、 $7/8 = 3/8 + P(B) - 1/4$ であるから、 $P(B) = 7/8 - 3/8 + 1/4 = 3/4$ 。よって $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 3/4 = 1/4$ を得る。
- (iii) 全体集合 Ω に対しては、 $A = \Omega \cap A$, $B \cup \bar{B} = \Omega$, $B \cap \bar{B} = \phi$ であるから、 $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ となる。よって $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ という形での事象 A を互いに素な 2 つの事象 $A \cap B$ と $A \cap \bar{B}$ の和に分割できる。移項をすると、 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ という「差の形」に変形できるから、 $P(A \cap \bar{B}) = 3/8 - 1/4 = 1/8$ 。
- (iv) 事象 B の代わりに $\bar{B}$ とした加法性の性質から、 $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})$ が成り立っている。これらにいままでの値を代入すると $P(A \cup \bar{B}) = 3/8 + 1/4 - 1/8 = 1/2$ となる。

問題 2 (問 2.2)

解

事象 C を $C \cap A$ と $C \cap B$ という 2 つの互いに素な事象に分割できるから、 $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)$ となる。よって $P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = 0.2 \times 0.4 + 0.8 \times 0.5 = 0.48$ 。したがって $P(A|C) = P(A \cap C)/P(C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \frac{0.2 \times 0.4}{0.48} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ 、また $P(B|C) = P(B \cap C)/P(C) = \frac{P(B)P(C|B)}{P(C)} = \frac{0.8 \times 0.5}{0.48} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$

問題 3 (問 2.3)

解

(i) は各々 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ で明らかであり、(ii) については $A \cap B \cap C = 1$ であるから、 $A \cap B \cap C = P(1)/P(S) = 1/4$ であるが、右辺は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ で等しくはならない例である。

問題 4 (問 2.4)

解

- (a) $E(Y) = E(3X) + E(2) = 3m + 2$, $V(Y) = 3^2 V(X) + V(2) = 9s^2 + 0 = 9s^2$,
- (b) $E(Z) = E(X) - E(m) = m - m = 0$, $V(Z) = s^2$,
- (c) $E(W) = E\left(\frac{X}{a}\right) + E\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{m+b}{a}$, $V(W) = V\left(\frac{1}{a}X + \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a^2}s^2 + 0 = \frac{s^2}{a^2}$,