線形代数試験問題:平面、空間のベクトル　2014/Nov. naiseki.tex

2 次元ベクトルでは、$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$、3 次元ベクトルでは $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ などとして、ノルム $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$、内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$、外積 $\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-b_2a_3,\ (-1)(a_1b_3-b_1a_3),\ a_1b_2-b_1a_2)$ の記号をもちいる。

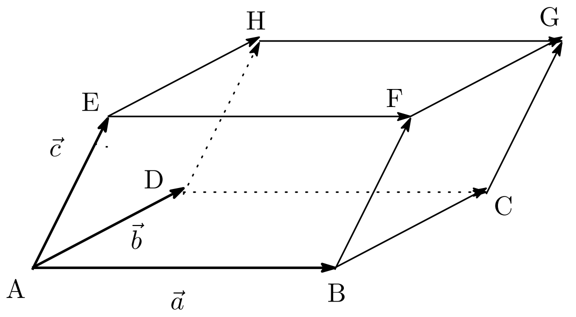
1

(1)　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき、 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ の値をもとめよ。

(2)　$\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(2,3,4)$, $\vec{c}=(0,-1,2)$ とするとき、$\vec{a}+k_1\vec{b}+k_2\vec{c}=\vec{0}$ となるスカラー k_1, k_2 をもとめよ。

2　平行六面体 ABCDEFGH を図のように定めるとき、つぎのベクトルを $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ をもちいて表せ。

(1)　$\overrightarrow{EC}$　　(2)　$\overrightarrow{FD}$



3　3 つのベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の外積について、つぎの関係式がなりたつような係数 k_1,k_2 をベクトルの内積で表せ。

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=k_1\,\vec{c}+k_2\,\vec{a}$$

4　2 平面 $x-y+2z-1=0$, $2x+y+z+4=0$ のつくる角度をもとめよ。

5　直線 $x+1=y=\dfrac{z}{2}$ を含み、平面 $2x+2y+z=1$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

学生番号 ________________ 氏名 ____________________

注意: 解答には結果だけではなく，結果にいたる過程などできるだけ詳しく記すこと。もし枠内に書き切れない場合には裏面をつかってよい。

$\boxed{1}$

(1)		(2)	

$\boxed{2}$

答	

$\boxed{3}$

答	

$\boxed{4}$

答	

$\boxed{5}$

答	

2 次元ベクトルでは、$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$、3 次元ベクトルでは $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ などとして、ノルム $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$、内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$、外積 $\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-b_2a_3,\,(-1)(a_1b_3-b_1a_3),\,a_1b_2-b_1a_2)$ の記号をもちいる。

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1)　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき、 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ の値をもとめよ。

(2)　$\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(2,3,4)$, $\vec{c}=(0,-1,2)$ とするとき、$\vec{a}+k_1\vec{b}+k_2\vec{c}=\vec{0}$ となるスカラー k_1, k_2 をもとめよ。

(解) (1)　2 乗した関係式で、$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2-2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})+4|\vec{b}|^4$ をもちいる。これに条件の値を代入すれば、$3^2-4\times(-3)+4\cdot 2^2=37$ であるから、求めるノルムは $\sqrt{37}$ である。

(2)　左辺と右辺のベクトルが等しいので、ベクトルの転置をおこなった関係式は $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix}1+2k_1+0\,k_2\\2+3\,k_1+(-1)k_2\\1+4k_1+2\,k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ となるから、$\begin{cases}1+2k_1+0k_2=0\\2+3k_1+(-1)k_2=0\\1+4k_1+2k_2=0\end{cases}$ が得られ、この連立方程式を解けば、$k_1=-\dfrac{1}{2}$, $k_2=\dfrac{1}{2}$ が求める係数である。

$\boxed{\mathbf{2}}$　平行六面体 ABCDEFGH を図（問題にあるから省略）のように定めるとき、つぎのベクトルを $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ をもちいて表せ。

(解) (1)　$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　(2)　三角形をなすと、ベクトルは $\vec{0}$ に等しいから、$\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\vec{0}$. この式から、移項をすると、$\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BF}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ が得られる。

$\boxed{\mathbf{3}}$　3 つのベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の外積について、つぎの関係式がなりたつような係数 k_1,k_2 をベクトルの内積で表せ。

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=k_1\,\vec{c}+k_2\,\vec{a}$$

(解) 外積は交換律が成り立たないから、その定義により、まず括弧のある $\vec{c}\times\vec{a}$ から展開して、つぎに左から $\vec{b}$ を掛ける。これを転置して書くと $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_2a_3-a_2c_3\\a_1c_3-c_1a_3\\c_1a_2-a_1c_2\end{pmatrix}$ となる。この結果のベクトル第 1 成分を $k_1c_1+k_2a_1$ の形にするから、(項の区別のためにカンマ (,) をいれた)

$$\begin{vmatrix}b_2, & a_1c_3-c_1a_3\\ b_3, & c_1a_2-a_1c_2\end{vmatrix}=b_2(c_1a_2-a_1c_2)-b_3(a_1c_3-c_1a_3)=c_1(a_2b_2+a_3b_3)+a_1(-1)(b_2c_2+b_3c_3)$$

となる。同様にベクトル第 2 成分を $k_1c_2+k_2a_2$ の形にするから、

$$(-1)\begin{vmatrix}b_1, & c_2a_3-a_1c_3\\ b_3, & c_1a_2-a_1c_2\end{vmatrix}=(-1)\{b_1(c_1a_2-a_1c_2)-b_3(c_2a_3-a_1c_3)\}=c_2(a_1b_1+a_3b_3)+a_2(-1)(b_1c_1+b_3c_3)$$

となり、またベクトル第 3 成分を $k_1c_3+k_2a_3$ の形にするから、

$$\begin{vmatrix}b_1, & c_2a_3-a_1c_3\\ b_2, & a_1c_3-c_1a_3\end{vmatrix}=b_1(a_1c_3-c_1a_3)-b_2(c_2a_3-a_2c_3)=c_3(a_1b_1+a_2b_2+\underline{a_3b_3})+a_3(-1)(b_1c_1+b_2c_2+\underline{b_3c_3})$$

となる。この 3 項を比べると、共通に k_1, k_2 を定めなければならないから、プラスとマイナスでキャンセルをするようそれぞれの項にひとつづつ追加した。$k_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,\ k_2 = (-1)\{b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3\}$ とすれば、キャンセルし合って共通に定まる。これは、ベクトルの内積であり、$k_1 = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},\ k_2 = (-1)\vec{b}\cdot\vec{c} = (-1)\vec{c}\cdot\vec{b}$ と書ける

外積の補足事項

- 交換可能ではないこと：入れ替えると符号がつく

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

- ベクトル和との配分律は成り立つ：

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$$

- 3 つの外積の計算: 奇妙な関係ですが、内積の方は交換可能、掛ける括弧内ベクトルのうち $\vec{b}$ のほうはプラスの内積、$\vec{c}$ のほうはマイナスの内積

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

- ヤコブの等式：

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + \vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{0}$$

4 2 平面 $x - y + 2z - 1 = 0,\ 2x + y + z + 4 = 0$ のつくる角度をもとめよ。

(解) 平面 $x - y + 2z - 1 = 0$ の法線ベクトルは、変数 x, y, z の係数から $(1, -1, 2)$ であり、もうひとつの平面 $2x + y + z + 4 = 0$ の法線ベクトルは、変数 x, y, z の係数から $(2, 1, 1)$ である。角度を求めるには法線ベクトルのなす角を求めればよいから、はさむ角 θ は

$$\cos\theta = \frac{(1, -1, 2)\cdot(2, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

したがって、$\theta = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$ となる。

5 直線 $x + 1 = y = \dfrac{z}{2}$ を含み、平面 $2x + 2y + z = 1$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(解) 直線の方程式は $\dfrac{x - (-1)}{1} = \dfrac{y - 0}{1} = \dfrac{z - 0}{2}$ であるから、この方向ベクトルは $(1, 1, 2)$ で、通る点は $(-1, 0, 0)$ である。平面については、法線ベクトルが $(2, 2, 1)$ である。平面の法線ベクトルと直線の方向ベクトルとの外積は、外積の定義からそれぞれのベクトルに直交する。垂直な平面を求めるのであるから、このベクトルを含む。すなわち外積ベクトル $(1, 1, 2)\times(2, 2, 1) = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}, (-1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right) = (-3, (-1)(-3), 0) = (-3, 3, 0)$ が求める平面の法線ベクトルであり、通る点は $(-1, 0, 0)$ であるから、平面の方程式は $(-3)(x - (-1)) + 3(y - 0) + 0\,(z - 0) = 0$, ゆえに $3(x + 1) - 3y = 0,\ x - y + 1 = 0$ が平面の方程式である。