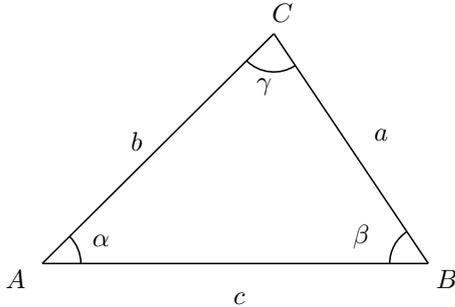


第 1 と第 2 の余弦定理:

yogen.tex

三角形の頂点を A, B, C , 角を α, β, γ , 辺の長さを a, b, c とおく。



第 1 余弦の定理:

$$\begin{cases} a = b \cos \gamma + c \cos \beta \\ b = c \cos \alpha + a \cos \gamma \\ c = a \cos \beta + b \cos \alpha \end{cases}$$

第 2 余弦の定理:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

正弦の定理:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

[正弦の定理から第 1 余弦定理を示す]

加比の理 (分数の性質) を正弦定理の 2 項と 3 項に適用する。また三角関数の加法定理、三角形の内角の和は 180° であるから、 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ をもちいると、

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{\sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta} = \frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{\sin \alpha}$$

この式と正弦定理の第 1 項から、 $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$ を得る。両辺を 2 乗して、

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos \gamma + c \cos \beta)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \gamma + 2bc \cos \beta \cos \gamma + c^2 \cos^2 \beta \\ &= b^2(1 - \sin^2 \gamma) + c^2(1 - \sin^2 \beta) + 2bc \cos \beta \cos \gamma \\ &= b^2 - b^2 \sin^2 \gamma + c^2 - c^2 \sin^2 \beta + 2bc \cos \beta \cos \gamma \\ &= b^2 + c^2 - b^2 \sin^2 \gamma - c^2 \sin^2 \beta + 2bc \cos \beta \cos \gamma \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \{ \cos(\beta + \gamma) - \sin \gamma \sin \beta \} - b^2 \sin^2 \gamma - c^2 \sin^2 \beta \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cos(\beta + \gamma) - (b \sin \gamma - c \sin \beta)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

末尾の項がゼロになる理由は、正弦定理より、 $b \sin \gamma = c \sin \beta$ が成り立つから。これで第 2 余弦定理が示された。(終)

(補足) 頂点 C から辺 AB へ垂線をおろせば、辺 c は 2 つの部分でなるから、第 1 余弦定理の命題は明らか。

[ベクトルをもちいた第 2 余弦定理の証明] ベクトルの差の 2 乗式は、それぞれのノルムの 2 乗と内積とに分解されるから、上図の三角形において、

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{CB} - \vec{CA}|^2 \\ &= |\vec{CB}|^2 - 2 \times (\vec{CB} \cdot \vec{CA}) + |\vec{CA}|^2 \\ &= |\vec{CB}|^2 - 2 |\vec{CB}| |\vec{CA}| \cos \angle ACB + |\vec{CA}|^2 \end{aligned}$$

となるから、これを辺の長さで表すと、 $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$ に他ならない。(終)