

第 2 章

行列と連立 1 次方程式

2.1 行列とその演算

数や文字を長方形に並べて括弧で囲ったもの、すなわち $(1 \ 2 \ 3)$,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{などを行列という (行列は } [1, 2, 3],$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{と角括弧で表すこともある).}$$

一般に mn 個の数や文字を縦に m 個、横に n 個の長方形に並べて括弧で囲んだものを m 行 n 列の行列または $m \times n$ 型の行列という。このとき行列を構成する mn 個の数や文字をこの行列の成分という。

行列は大文字 A, B, C などで表し、その成分は対応して小文字で表すことが多い。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots & \text{第 1 行} \\ & \\ \cdots & \text{第 } i \text{ 行} \\ & \\ \cdots & \text{第 } m \text{ 行} \end{matrix}$$

第
1
列

第
 j
列

第
 n
列

のように表すのが便利で、第 i 行と第 j 列の交差するところにある a_{ij} を A の (i, j) 成分という。 A を $A = (a_{ij})$ と略記する。

特に、 $m \times 1$ 型の行列を m 次元列ベクトル、 $1 \times n$ 型の行列を n 次元行ベクトル、 $n \times n$ 型の行列を n 次正方行列という。 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を A の対角成分という。

なお、 1×1 型の行列 (a) は a と同一視する。

行列の相等

2つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ について

- (1) A と B は同じ型, すなわち $m \times n$ 型の行列であり,
- (2) 対応する成分がそれぞれ等しい, つまり $a_{ij} = b_{ij}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$)
が成り立つとき A と B は等しいといい, $A = B$ とかく.

行列の演算

(I) 加法とスカラー倍

A, B を $m \times n$ 型の行列とする.

- (1) 加法: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対し $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- (2) スカラー倍: 任意の数 k と $A = (a_{ij})$ に対し $kA = (ka_{ij})$
すなわち A と B の和 $A + B$, k と A のスカラー倍 kA はともに $m \times n$
型の行列となる. また $(-1)A = -A$, $A + (-B) = A - B$ とかく.

(II) 乗法

$A = (a_{ij})$ を $m \times \ell$ 型, $B = (b_{ij})$ を $\ell \times n$ 型の行列とする. このとき

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik}b_{kj}$ とおき, c_{ij} を (i, j) 成分にもつ $m \times n$ 型の行列を A, B
の積といい, AB とかく.

零行列, 単位行列

成分がすべて 0 である $m \times n$ 型の行列を零行列といい, O で表す.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 1 行} \\ \\ \text{第 } m \text{ 行} \end{matrix}$$

第
1
列

第
 n
列

また n 次の正方行列で対角成分がすべて 1 で他の成分がすべて 0 である行列
を n 次の単位行列といい, E で表す. E の第 j 列を e_j とかき, 基本単位ベク
トルという.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 1 行} \\ \\ \text{第 } n \text{ 行} \end{matrix}$$

第
1
列

第
 n
列

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ (j = 1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

行列の演算に関して次の法則が成り立つ.

- (1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (結合法則)
- (2) $A+B=B+A$ (交換法則)
- (3) $k(A+B)=kA+kB$ (行列に関する分配法則)
- (4) $(k+\ell)A=kA+\ell A$ (スカラーに関する分配法則)
- (5) $k(\ell A)=(k\ell)A$ (結合法則)
- (6) $(AB)C=A(BC)$ (結合法則)
- (7) $A(B+C)=AB+AC$ (左側分配の法則)
- (8) $(A+B)C=AC+BC$ (右側分配の法則)
- (9) $(kA)B=A(kB)=k(AB)$
- (10) $A+(-A)=O, A+O=A$
- (11) $1A=A, 0A=O, kO=O$
- (12) $AE=EA=A, AO=OA=O$

ただし, これらの式が意味をもつものとしてである.

注1. これらの法則により, できるだけ括弧を省略し, $A+B+C, k\ell A, ABC, kAB$ とかく.

注2. 数 a, b に対し $ab=ba$ は成り立つが, 行列 A, B に対し $AB=BA$ が成り立つとは限らない.

注3. 数 a, b に対し $ab=0$ ならば $a=0$ か $b=0$ であるが, 行列 A, B に対し $AB=O$ ならば $A=O$ か $B=O$ が成り立つとは限らない.

行列の累乗

正方行列 A を n 個掛け合わせた積を A^n と表し, A の n 乗という. このとき, 0 以上の整数 m, n に対し, 次の性質が成り立つ.

- (1) $A^m A^n = A^{m+n}$ (2) $(A^m)^n = A^{mn}$ ただし, $A^0 = E$ とする.

行列の転置

$m \times n$ 型の行列 A に対し, 行と列を入れ換えて得られる $n \times m$ 型の行列を A の転置行列といい, tA とかく.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -3 & b & 0 \end{pmatrix} \text{ に対し } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ に対し } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ベクトル } (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \text{ に対し } {}^t(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

行列の演算と行列の転置に関して次の法則が成り立つ.

$$(1) {}^t({}^tA) = A \quad (2) {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$$(3) {}^t(kA) = k {}^tA \quad (4) {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

対角行列, 対称行列, 交代行列

A を n 次正方行列とする.

(1) 対角成分以外の成分がすべて 0 のとき, A を対角行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) ${}^tA = A$ のとき, A を対称行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) ${}^tA = -A$ のとき, A を交代行列という.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

注 4. 交代行列の対角成分はすべて 0 になる.

例題 1.

次の行列のうち, 2 つの行列の積が定義されるものの積をすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

解答

$$AC = \begin{pmatrix} 9 & 19 & 29 \\ 12 & 26 & 40 \\ 15 & 33 & 51 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 22 & 49 \\ 28 & 64 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 22 & 49 & 76 \\ 28 & 64 & 100 \end{pmatrix}, \quad DA = \begin{pmatrix} 30 & 66 \\ 36 & 81 \\ 42 & 96 \end{pmatrix}, \quad DB = \begin{pmatrix} 30 \\ 36 \\ 42 \end{pmatrix}$$

例題 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ について}$$

(1) $(A+B)^2$ と $A^2 + 2AB + B^2$ を計算し、等しくなることを確かめよ.

(2) $A^2 - B^2$ と $(A+B)(A-B)$ を計算し、等しくなることを確かめよ.

$$\text{解答 (1)} \quad (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題 3.

正方行列 A に対し、次のことを示せ.

- (1) tAA は対称行列である.
 (2) A が対称行列ならば tPAP も対称行列である.

解答 (1) ${}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA$ より tAA は対称行列である.

(2) ${}^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA({}^tP) = {}^tP{}^tAP$ となり ${}^tA = A$ ならば ${}^tP{}^tAP = {}^tPAP$ となるので, tPAP も対称行列である.

A

1. (i, j) 成分が $3i + 2j$ で与えられる 2×3 型の行列を書け.

2. $12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} - 13 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

のとき $(A + 3B + C) - (-A + B - C)$ を計算せよ.

4. (1) ${}^t(A - 2{}^tB)$ を ${}^tA, B$ を使って表せ.

(2) ${}^t(ABC)$ を ${}^tA, {}^tB, {}^tC$ を使って表せ.

5. 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 207 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -11 & -12 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. 次の行列のうち、2つの行列の積が定義されるものの積をすべて求めよ.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ として

$f(A) = A^3 + 2A^2 - 5A + 4E$ と定めるとき, これを計算せよ.

8. 正方行列 A に対し, $E - A^{n+1} = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^n)$ であることを示せ.

9. 次の行列 A について, A^n を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. (1) $A \neq O$, $B \neq O$ なのに $AB = O$ となる A, B の例を作れ.

(2) $A \neq O$, $A^2 \neq O$ なのに $A^3 = O$ となる A の例を作れ.

11. 次の問に答えよ.

(1) A, B が n 次の対角行列ならば, $AB = BA$ が成り立つことを示せ.

(2) A を n 次の対角行列で, 対角成分が相異なるものとする. このとき $AB = BA$ をみたす n 次正方行列 B は対角行列であることを示せ.

12. 正方行列 A の対角成分よりも下にある成分がすべて 0, すなわち $a_{ij} = 0$ ($i > j$) であるとき, A を上三角行列と呼ぶ. また, 対角成分よりも上の成分がすべて 0 であるとき, A を下三角行列と呼ぶ. 上三角行列と下三角行列を合わせて三角行列と呼ぶ.

2つの n 次の上三角行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して

(1) AB も上三角行列になることを示せ.

(2) AB の対角成分を求めよ.

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ のとき tAA , $A{}^tA$ を求めよ.

14. $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とし, $b{}^tb = C$ とするとき

(1) C は対称行列であることを示せ.

(2) ${}^tbb = k \neq 0$ とし, $D = \frac{1}{k}C$ とするとき, $D^2 = D$ となることを示せ.

15. (1) 任意の正方行列 A に対して $B = A + {}^tA$, $C = A - {}^tA$ とおくと, B は対称行列, C は交代行列になることを示せ.

(2) 任意の正方行列 A は対称行列と交代行列の和として一意的に表されることを示せ.

$$(3) A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ および } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ を対称行列}$$

と交代行列の和として表せ.

B

1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対し $\text{tr}({}^tAB)$ を求めよ.

なお, n 次正方行列 $C = (c_{ij})$ に対し, 対角成分の和 $\text{tr} C = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ を C のトレースと呼ぶ.

2. 正方行列 A が巾零であるとは, ある自然数 k があって $A^k = O$ が成り立つときにいう.

(1) n 次正方行列 A, B が巾零であるとき, $A + B$ は巾零か. 正しければ証明を与え, 正しくなければ反例を与えよ.

(2) n 次正方行列 A, B が巾零で $AB = BA$ をみたすならば, $A + B$ は巾零であることを示せ.

3. n 次正方行列 A, B に対し, $[A, B] = AB - BA$ と定義する. $[A, B]$ を A と B の括弧積 (bracket) と呼ぶ. このとき, 次を示せ.

(1) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$ (ヤコビ (Jacobi) の恒等式)

(2) ${}^tA = -A$, ${}^tB = -B$ ならば ${}^t[A, B] = -[A, B]$

(3) $[A, B] \neq E$

4. n 次実正方行列 A が ${}^tAA = E$ を満たすとき, A を直交行列という. n 次直交行列 A に対し $E - A$ が正則行列であれば

$$B = (E - A)^{-1}(E + A)$$

とおくとき, B は交代行列になることを示せ.

5. 次を示せ.

$$(1) m \times \ell \text{ 型の行列 } A = (a_{ij}) \text{ と } \ell \text{ 次元列ベクトル } \mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{\ell j} \end{pmatrix}$$

 $(j = 1, 2, \dots, n)$ に対して

$$A(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n) = (A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_n)$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$$

ただし, $A = (a_{ij})$ は $m_1 \times \ell_1$ 型の行列, $B = (b_{ij})$ は $m_1 \times \ell_2$ 型の行列, $C = (c_{ij})$ は $m_2 \times \ell_2$ 型の行列, $D = (d_{ij})$ は $\ell_1 \times n_1$ 型の行列, $F = (f_{ij})$ は $\ell_1 \times n_2$ 型の行列, $G = (g_{ij})$ は $\ell_2 \times n_2$ 型の行列である.

$$(3) m \text{ 次元列ベクトル } \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ に対して}$$

$$(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n$$

A の解答

$$1. \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 83 \\ -13 \end{pmatrix}$$

3.

$$(A + 3B + C) - (-A + B - C) = 2(A + B + C)$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 16 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 16 \\ 4 & 10 & 16 \\ 18 & 32 & 10 \end{pmatrix}$$

$$4. (1) {}^t(A - 2{}^tB) = {}^tA - 2B \quad (2) {}^t(ABC) = {}^tC {}^tB {}^tA$$

5.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 412 \\ -14 & -13 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -11 & -12 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 1 \\ 26 & 19 & 12 & 5 \\ 42 & 31 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

$$6. AC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad AD = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix},$$

$$DF = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad FA = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}, \quad FC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$FD = 3.$$

7.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & -45 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} -35 & -45 \\ 30 & 10 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -46 & -60 \\ 40 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} &(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^n) \\ &= E + A + A^2 + \cdots + A^n - (A + A^2 + \cdots + A^{n+1}) \\ &= E - A^{n+1} \end{aligned}$$

9. (1) $A^2 = -E$ より

$$n = 2p \text{ のとき} \quad A^n = (A^2)^p = (-E)^p = (-1)^p E$$

$$n = 2p + 1 \text{ のとき } A^n = A^{2p}A = (-1)^p EA = (-1)^p A$$

(2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となる. よって

$$n = 4p \text{ のとき } A^n = (A^4)^p = E^p = E$$

$$n = 4p + 1 \text{ のとき } A^n = A^{4p}A = A$$

$$n = 4p + 2 \text{ のとき } A^n = A^{4p}A^2 = A^2$$

$$n = 4p + 3 \text{ のとき } A^n = A^{4p}A^3 = A^3$$

10.

$$(1) \text{ たとえば } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすれば } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ たとえば } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすれば } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O \text{ で}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O \text{ となる.}$$

注: 他にも多くの例がある.

11.

$$(1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & 0 \\ & a_{22}b_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & & 0 \\ & b_{22}a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

となる. よって $AB = BA$.

注：上記の大きな 0 はこの部分の成分がすべて 0 になっていることを表している。

$$(2) A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

と、 AB と BA の (i, j) 成分はそれぞれ $a_{ii}b_{ij}$, $a_{jj}b_{ij}$ となる。 $AB = BA$ とすると、 $a_{ii}b_{ij} = a_{jj}b_{ij}$ であるが、 $i \neq j$ のとき $a_{ii} \neq a_{jj}$ だから $b_{ij} = 0$ ($i \neq j$)。

$$\text{よって } B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

12. $AB = (c_{ij})$ とおく。

(1) $i > j$ のとき $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}$. ここで $1 \leq k \leq i-1$ のとき $i > k$ だから $a_{ik} = 0$ で、 $i \leq k \leq n$ のとき $k > j$ だから $b_{kj} = 0$. よって $c_{ij} = 0$ ($i > j$) となり AB は上三角行列である。

$$(2) c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii}$$

13.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 2 & 17 & 5 \\ -10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

14.

(1) ${}^tC = {}^t(\mathbf{b}^t\mathbf{b}) = {}^t(\mathbf{b})^t\mathbf{b} = \mathbf{b}^t\mathbf{b} = C$ より C は対称行列である。

(2) $D^2 = \left(\frac{1}{k}C\right)\left(\frac{1}{k}C\right) = \frac{1}{k^2}C^2 = \frac{1}{k^2}(\mathbf{b}^t\mathbf{b})(\mathbf{b}^t\mathbf{b}) = \frac{1}{k^2}\mathbf{b}({}^t\mathbf{b}\mathbf{b})^t\mathbf{b} = \frac{k}{k^2}\mathbf{b}^t\mathbf{b} = \frac{1}{k}C = D$ より $D^2 = D$ となる。

15.

(1) ${}^tB = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^{tt}A = {}^tA + A = A + {}^tA = B$. よって B は対称行列である。 ${}^tC = {}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^{tt}A = {}^tA - A = -(A - {}^tA) = -C$. よって C は交代行列である。

(2) (1) より $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ と対称行列と交代行列の和、逆に

$A = B + C$ (B は対称行列, C は交代行列) とすれば ${}^tA = B - C$. よって
 $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ となる.

$$(3) {}^tA_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ だから}$$

$$\frac{1}{2}(A_1 + {}^tA_1) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & 5 & 2 \\ \frac{7}{2} & 2 & 8 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}(A_1 - {}^tA_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & 5 & 2 \\ \frac{7}{2} & 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A_2 の場合も同様にして

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B の解答

$$1. {}^tAB \text{ の } (i, i) \text{ 成分は } \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ki} \text{ であるから } \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ki}$$

2. (1) 正しくない.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと } A^2 = B^2 = O \text{ だが}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ は巾零でない.}$$

(2) $A^k = O$, $B^\ell = O$ とするとき, $m = k + \ell - 1$ とおくと

$$(A + B)^m = \sum_{r=0}^m {}_m C_r A^{m-r} B^r$$

ここで $r \geq \ell$ のとき $B^r = O$, $r \leq \ell - 1$ のとき $m - r = k + \ell - 1 - r \geq k$ だから $A^{m-r} = O$ となる. よって

$$(A + B)^m = \sum_{r=0}^m {}_m C_r A^{m-r} B^r = O.$$

3. (1)

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

$$= A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B \\ + C(AB - BA) - (AB - BA)C = O$$

$$(2) {}^t[A, B] = {}^t(AB - BA) = {}^tB {}^tA - {}^tA {}^tB = (-B)(-A) - (-A)(-B) = \\ BA - AB = -[A, B]$$

$$(3) A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \text{ とおくと, } AB \text{ の } (i, i) \text{ 成分の和は } \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

で, BA の (i, i) 成分の和は $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$ である. よって $AB - BA$ の (i, i) 成分の和は 0 で, E の (i, i) 成分の和は n だから, $[A, B] \neq E$ となる.

4. ${}^tB = -B$ となることを示せばよい.

$${}^tB = (E + {}^tA) {}^t\{(E - A)^{-1}\}$$

ここで ${}^tA = A^{-1}$, ${}^t\{(E - A)^{-1}\} = \{{}^t(E - A)\}^{-1} = (E - {}^tA)^{-1}$ より

$${}^tB = (E + {}^tA)AA^{-1}(E - {}^tA)^{-1} = (A + {}^tAA)\{(E - {}^tA)A\}^{-1} \\ = (A + E)(A - E)^{-1}$$

ここで $A^2 - E = (A - E)(A + E) = (A + E)(A - E)$ より

$$(A + E)(A - E)^{-1} = (A - E)^{-1}(A + E)$$

より

$${}^tB = (A - E)^{-1}(A + E) = \{(-1)(E - A)\}^{-1}(A + E) \\ = -(E - A)^{-1}(A + E) = -B$$

5. (1) $A \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}$ である. これは

$\begin{pmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分にはかならない.

$$(2) \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix} \text{ の } (i, j) \text{ 成分 } (1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq n_1)$$

は $\sum_{k=1}^{\ell_1} a_{ik} d_{kj}$ である. これは $\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分にはかならない.

$$\text{同様に } \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix} \text{ の } (i, j) \text{ 成分 } (1 \leq i \leq m_1, n_1 + 1 \leq j \leq n_2)$$

は $\sum_{k=1}^{\ell_1} a_{ik} f_{kj} + \sum_{k=1}^{\ell_2} b_{ik} g_{kj}$ である. これは $\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分

にほかならない. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分 ($m_1 + 1 \leq i \leq m_2$,

$1 \leq j \leq n_1$) は0である. これは $\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分にほか

ならない. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分

($m_1 + 1 \leq i \leq m_2$, $n_1 + 1 \leq j \leq n_2$) は $\sum_{k=1}^{\ell_2} c_{ik} g_{kj}$ である. これは

$\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分にほかならない.

(3) $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)$ $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ は m 次元列ベクトルである. この第 i

成分は $\sum_{k=1}^n a_{ik} c_k$ である. これは m 次元列ベクトル $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n$

の第 i 成分にほかならない.

注: この間は行列を分割して積を計算する方法を示した. 行列の分割の仕方は他にもたくさんある.

2.2 連立1次方程式(掃き出し法)・行列の階数

次にあげる3つの例は与えられた連立1次方程式をそれと同値な方程式に変形して解く方法を紹介するものである。

例1. 連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \text{係数行列} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

上から2つの方程式を入れ換えると

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \quad \cdots \text{①} \\ 2x - 2y + z = 0 \quad \cdots \text{②} \\ -3x + 2y = 0 \quad \cdots \text{③} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

② + ① × (-2), ③ + ① × 3 を作ると

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \quad \cdots \text{①} \\ -6y + 9z = 0 \quad \cdots \text{④} \\ 8y - 12z = 0 \quad \cdots \text{⑤} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 9 \\ 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

④ × (-4/3) = ⑤ より⑤は不要.

④ × (-1/6) を作ると

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \quad \cdots \text{①} \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \quad \cdots \text{⑥} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

① + ⑥ × (-2) を作ると

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

この形の行列を階段行列という.

よって与えられた連立1次方程式は $x = z, y = \frac{3}{2}z$ となるから, その解は $z = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

となる. なお, $z = 2t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

となる.

例2. 連立1次方程式

拡大係数行列

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y - 3z + 3u = 10 \cdots \textcircled{2} \\ -x + 3y + 3z - 2u = 2 \cdots \textcircled{3} \\ x + 2y - u = -10 \cdots \textcircled{4} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -10 \end{array} \right)$$

②+①×(-2), ③+①, ④+①×(-1)
を作ると

↓

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ 2y + z = 7 \cdots \textcircled{6} \\ 3y + 2z - 3u = -15 \cdots \textcircled{7} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -15 \end{array} \right)$$

⑥+⑤×(-2), ⑦+⑤×(-3) を作ると

↓

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ -z + 2u = 7 \cdots \textcircled{8} \\ -z = -15 \cdots \textcircled{9} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -15 \end{array} \right)$$

⑨×(-1) を作り⑧と入れ換えると

↓

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ z = 15 \cdots \textcircled{10} \\ -z + 2u = 7 \cdots \textcircled{8} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

{⑧+⑩}× $\frac{1}{2}$ を作ると

↓

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ z = 15 \cdots \textcircled{10} \\ u = 11 \cdots \textcircled{11} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

⑤+⑩×(-1)+⑪ を作ると

↓

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y = -4 \cdots \textcircled{12} \\ z = 15 \cdots \textcircled{10} \\ u = 11 \cdots \textcircled{11} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

①+⑫+⑩×2+⑪×(-2) を作ると

↓

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -4 \\ z = 15 \\ u = 11 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

階段行列となる.

よって、与えられた連立1次方程式の解はただ一つで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

となる.

例 3.

連立1次方程式

拡大係数行列

$$\begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 7 \cdots \textcircled{1} \\ -2x + 3y - 13z + 2u = -2 \cdots \textcircled{2} \\ 3x + 3y - 3z + 2u = 13 \cdots \textcircled{3} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & -3 & 7 \\ -2 & 3 & -13 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & 2 & 13 \end{array} \right)$$

② + ① × 2, ③ + ① × (-3) を作ると

$$\begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 7 \cdots \textcircled{1} \\ -y + 3z - 4u = 12 \cdots \textcircled{4} \\ 9y - 27z + 11u = -8 \cdots \textcircled{5} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 9 & -27 & 11 & -8 \end{array} \right)$$

{⑤ + ④ × 9} × (-1/25), ④ × (-1) を作ると

$$\begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 7 \cdots \textcircled{1} \\ y - 3z + 4u = -12 \cdots \textcircled{6} \\ u = -4 \cdots \textcircled{7} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

① + ⑦ × 3, ⑥ + ⑦ × (-4) を作ると

$$\begin{cases} x - 2y + 8z = -5 \cdots \textcircled{8} \\ y - 3z = 4 \cdots \textcircled{9} \\ u = -4 \cdots \textcircled{7} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 8 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

⑧ + ⑨ × 2 を作ると

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 3z = 4 \\ u = -4 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

階段行列となる.

よって与えられた連立1次方程式は $x = 3 - 2z$, $y = 4 + 3z$, $u = -4$ となるから, $z = t$ とおけばその解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

となる.

例1~3の変形を係数行列または拡大係数行列に注目してまとめてみると次のようになる。

行に関する基本変形

$m \times n$ 型の行列 A に対し、次の (1)~(3) の変形を A の行に関する基本変形という。

- (1) A の2つの行を入れ換える。
- (2) A のある行を c 倍 ($c \neq 0$) する。
- (3) A のある行に他の行の c 倍を加える。

さて、一般の連立1次方程式 $Ax = b$ の解法についてふれてみよう。ここで、 x は未知数ベクトルで

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

であり、 A を係数行列、 $(A | b)$ を拡大係数行列といい、 A は $m \times n$ 型の行列、 $(A | b)$ は $m \times (n+1)$ 型の行列である。行に関する基本変形を $(A | b)$ に数回適用し簡単な形の連立1次方程式になっても同値性は保たれる。このようにして連立1次方程式の解を求める方法を掃き出し法という。

例1は $b = 0$ の場合であり、このような連立1次方程式を同次連立1次方程式と呼ぶ。同次連立1次方程式の場合は係数行列のみを基本変形して解くことができる。

階段行列と行列の階数

$m \times n$ 型の行列 A に対し、行に関する基本変形をして

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & & 1 & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} r \text{ 個の行}$$

となったとき、得られた行列を階段行列といい、 A の階数は r であるという。このとき $\text{rank } A = r$ とかく。

例1~3で得られた行列の階数は次のようになる.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} = 4,$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

注1. 階段のできる個数が行列の階数である.

注2. 行列の階数は変形の仕方によらず決まる数であるから階段行列になる前の時点で階数は求まる.

注3. $m \times n$ 型の行列 A に対し,

$$\text{rank } A \leq m, n$$

である.

定理1 (連立1次方程式 $Ax = b$ の解の存在).

- (1) $\text{rank } A = \text{rank}(A | b)$ ならば, $Ax = b$ は解をもつ.
- (2) $\text{rank } A < \text{rank}(A | b)$ ならば, $Ax = b$ は解をもたない.

定理2 (同次連立1次方程式の非自明解).

A を $m \times n$ 型の行列とする.

$Ax = 0$ が 0 でない解 (非自明解) をもつための必要十分条件は $\text{rank } A < n$ である.

例題 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & y \end{pmatrix} \text{ とするとき, } \text{rank } A = 2 \text{ となる } x, y \text{ を求めよ.}$$

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 & y-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 & y-3 \end{pmatrix}$$

よって

$$\text{rank } A = 2 \iff \begin{cases} x-4=0 \\ y-3=0 \end{cases}$$

より $x=4, y=3$.

例題 2.

$$\text{連立1次方程式} \begin{cases} x+3y & + u = 3 \\ x+2y+z & = 1 \\ -x+y-4z+3u & = a \end{cases} \text{を解け.}$$

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & | & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & | & a+3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a-5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a-5 \end{pmatrix}$$

よって

$$a=5 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ただし, t_1, t_2 は任意定数) $a \neq 5$ のとき 解なし.

A

1. 次の行列 A の階数を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -14 & -13 & 18 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列 A の階数を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & a-2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & a-3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & a-4 \end{pmatrix}$$

3. 次の連立1次方程式を解け.

$$\begin{aligned}
 (1) \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 7y + 5z = 24 \\ 2x + 4y + 2z = 14 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 5x + 6y - 7z = -3 \\ 4x + 7y + 3z = 4 \\ -3x - 9y + z = 4 \end{cases} \\
 (4) \begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 5x + y + 2z = 9 \\ x + y + z = 7 \\ 9x + y + 3z = 11 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x - 2y - 3z = -3 \\ -2x - 3z = -11 \\ x - y - 2z = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. 次の連立1次方程式を解け.

$$\begin{aligned}
 (1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 12 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases} \\
 (3) \begin{cases} x + 2y + z + 3u = 0 \\ 4x - y - 5z - 6u = 9 \\ x - 3y - 4z - 7u = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

5. 次の連立1次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3s + 4t = 2 \\ -x + 2y - 4z + s = 2 \\ 2x + y + 3z - 2s - 10t = -4 \\ -2x + y - 5z + s + 3t = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 4z + 2s + 9t = 0 \\ x + y + z + 2s + 3t = 3 \\ -2x + y - 5z + 2s + 6t = 4 \\ 2x + y + 3z - s - 7t = -4 \end{cases}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ とするとき連立1次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

および $A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を解け.

7. 連立1次方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + u = 1 \\ x + z + u = 1 \\ y + z + (c-2)u = 1 \end{cases}$ がただ1組の解をもつた

めの c の条件を求めよ. また, このときの解を求めよ.

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

き、連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつように a, b を定めよ。また、そのときの解 $\mathbf{x}$ を求めよ。

$$9. \quad \text{同次連立1次方程式} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \end{cases} \text{ が非自明解をもつための } a, b$$

の条件を求め、その条件を満たす (a, b) を ab 平面上に図示せよ。

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & -2 & 1-a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} \text{ とするとき、次の間に答えよ。}$$

(1) $\text{rank } A$ を求めよ。

$$(2) \text{ 連立1次方程式 } A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ が解をもつための } a, b \text{ の条件を求めよ。}$$

(3) (2) の条件が成立しているとき、この方程式の解を求めよ。

B

1. $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m), \mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m)$ に対して $A = {}^t\mathbf{ab}$ とおくと、 $\text{rank } A = 1$ であることを示せ。

$$2. \quad \text{行列 } A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ a & 2 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ の階数を求めよ。}$$

3. 次の行列 A の階数を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

A の解答

$$1. (1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank } A = 2.$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank } A = 1.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank } A = 3.
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -14 & -13 & 18 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -4 & -14 & -13 & 18 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -24 & -15 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

この段階で $\text{rank } A = 2$ がわかる.

2. (1)

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix},$$

ここで $x+2=0$ のとき

$$\begin{aligned}
 A &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となり } \text{rank } A = 2.
 \end{aligned}$$

 $x+2 \neq 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

となる. さらに $x=1$ または $x \neq 1$ で分けると $x=1$ のとき $\text{rank } A = 1$,

$x \neq 1$ のとき $\text{rank } A = 3$. 以上よりまとめると

$x = 1$ のとき $\text{rank } A = 1$

$x = -2$ のとき $\text{rank } A = 2$

$x \neq 1$ かつ $x \neq -2$ のとき $\text{rank } A = 3$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

より $a = 1$ のとき $\text{rank } A = 1$, $a \neq 1$ のとき $\text{rank } A = 3$.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & a-2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & a-3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & a-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 7 & 10 \\ 0 & 0 & a+3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

より $a = 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a + 3 = 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって

$a = 0$ または $a = -3$ のとき $\text{rank } A = 3$

$a \neq 0$ かつ $a \neq -3$ のとき $\text{rank } A = 4$.

$$\begin{aligned} \mathbf{3. (1)} \quad & \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -5 \\ 0 & -17 & 17 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \text{ より } x = 2, y = -1. \end{aligned}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 5 & 24 \\ 2 & 4 & 2 & 14 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

よって $\begin{cases} x - 3z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$ となるから, $z = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & -7 & -3 \\ 4 & 7 & 3 & 4 \\ -3 & -9 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 \\ -3 & -9 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 0 & 11 & 43 & 32 \\ 0 & -12 & -29 & -17 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & -12 & -29 & -17 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -24 & -22 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \\ 0 & 0 & -197 & -197 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -24 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } x = 2, \quad y = -1, \quad z = 1.$$

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \text{ より解なし.}$$

(5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & -26 \\ 0 & -8 & -6 & -52 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ より } \begin{cases} x + \frac{1}{4}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{3}{4}z = \frac{13}{2} \end{cases} \text{ となるから, } z = 4t \text{ とおけば}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(6)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & -11 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & -11 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & -17 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{より}
\end{aligned}$$

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3.$$

4. (1)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 3 & -5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 4 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 50 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -61 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 50 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 4 \end{array} \right) \text{より} \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 19 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 61 \\ -50 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).
\end{aligned}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

より解なし.

(3)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & -6 & 9 \\ 1 & -3 & -4 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数}).$$

5. (1)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -4 \\ -2 & 1 & -5 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 11 & 7 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 11 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数}).$$

(2)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -7 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -7 & -4 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 12 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -13 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 12 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -13 & -10 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right) \text{より解なし.}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -7 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 7 & 9 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{10}{7}z = \frac{5}{7} \\ y + \frac{9}{7}z = -\frac{1}{7} \end{cases}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u - \frac{10}{7}w = -\frac{3}{7} \\ v + \frac{9}{7}w = \frac{2}{7} \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (s \text{ は任意定数}).$$

7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & c-2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & c-2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c-1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & | & 1 \end{pmatrix}$$

より $c=0$ のとき解なし. $c \neq 0$ のとき, さらに変形して

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 - \frac{2}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \text{ となるから } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{c} \\ \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & | & a \\ -2 & -2 & -1 & -1 & | & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & | & a-3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & b+2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+1 \end{pmatrix}$$

よって $Ax = b$ が解をもつためには $a = 2, b = -1$. このとき $x_3 = t_1$,

$x_4 = t_2$ とすると

$$x_1 = -t_1, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2$$

したがって

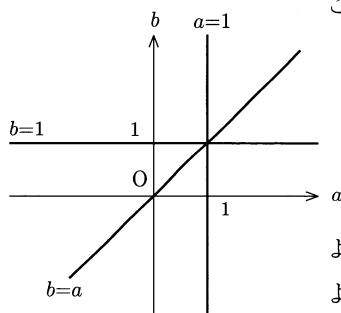
$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数}).$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & b-1 & b^2-1 \end{pmatrix}$$

ここで $a=1$ または $b=1$ のとき $\text{rank } A < 3$ となり、非自明解をもつ。 $a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

より $b-a=0$ ならば非自明解をもち、 $b-a \neq 0$ ならば非自明解をもたない。よって非自明解をもつ条件は $a=1$ または $b=1$ または $a=b$ 。図示すると欄外の図のようになる（太線部分）。

10.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & -2 & 1-a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

 $\text{rank } A = 2$.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b \end{array} \right) \text{ より}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ が解をもつためには } 2a-b=0. \text{ よって } b=2a.$$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & 2a & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ より}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

B の解答

1. $a_i \neq 0$ とするとき, A の第 j 行 ($j \neq i$) に第 i 行の $\left(-\frac{a_j}{a_i}\right)$ 倍を加えてみればよい.

2.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ a & 2 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & -(a+1)(a-2) & -2a-3 & a+2 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-9 & 4(a-1) \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-9 & 4(a-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $a+1=0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \end{pmatrix},$$

$a-9=0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix},$$

$a+1 \neq 0$ かつ $a-9 \neq 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{a+1} & \frac{3}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4(a-1)}{a-9} \end{pmatrix}$$

となる. 以上をまとめると $\text{rank } A = 3$.

(別解) $Ax = 0$ の変数ベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の変数の順序を変えると A の

列が入れ換わるが, そのようにしても最終的に得られる解に含まれる任意定数の

個数は同じであることが保証されているので, $A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & a-1 \\ 2 & -3 & a & 2 \\ 3 & 3 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$

とすると, $\text{rank } A = \text{rank } A'$ である.

$$A' \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2a \\ 0 & 9 & 3 & 4a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2a \\ 0 & 0 & -9a-15 & -14a-2 \end{pmatrix}$$

$-9a-15=0$ のとき $-14a-2 \neq 0$ であり, $\text{rank } A' = 3$.

3. (1) (i) $a=b=0$ のとき $\text{rank } A = 0$.

(ii) $a \neq 0$ のとき $A \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) $b \neq 0$ のとき $A \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

以上まとめて

$$a=b=0 \text{ のとき } \text{rank } A = 0$$

$$\text{それ以外のとき } \text{rank } A = 1.$$

(2) (i) $a=b=c=0$ のとき $\text{rank } A = 0$.

(ii) a, b, c のうち, 少なくとも1つが0でない場合, 例えば $a \neq 0$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以上まとめて

$$a=b=c=0 \text{ のとき } \text{rank } A = 0$$

$$\text{それ以外のとき } \text{rank } A = 1.$$

(3) (i) $a=b=c=0$ のとき $\text{rank } A = 0$.

(ii) $a=b=c \neq 0$ のとき $\text{rank } A = 1$.

(iii) $a=b=c$ でない場合

① $a+b+c=0$ のとき, a, b, c の中に0でないものが存在しているので, 例えば $a \neq 0$ とすると

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} & \frac{a^2-bc}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ここで $\frac{ac-b^2}{a} = \frac{1}{a}\{a(-a-b) - b^2\} = \frac{1}{a}\{-(a+\frac{b}{2})^2 - \frac{3}{4}b^2\} \neq 0$. よって
 $\text{rank } A = 2$.

② $a+b+c \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & c-b & a-b \end{pmatrix} \text{ となるが} \end{aligned}$$

a, b, c の中に異なるものがあるから $\text{rank } A = 3$.

2.3 逆行列

正則行列

n 次正方行列 A に対し, $AX = XA = E$ となる n 次正方行列 X が存在するとき A を正則行列という. このとき X を A の逆行列といい, $X = A^{-1}$ とかく. たとえば $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $\Delta = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則で,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ である.}$$

正則行列に対して, 次の性質が成り立つ.

- (1) A が正則行列ならば, A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$ である.
- (2) A, B が正則行列ならば, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である.
- (3) A が正則行列ならば tA も正則行列で, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である.

行列の負の累乗

正則行列 A の逆行列 A^{-1} を n 個掛け合わせた積を A^{-n} と表す. このとき, 0 以上の整数 m, n に対して成り立っていた

$$(1) \quad A^m A^n = A^{m+n} \quad (2) \quad (A^m)^n = A^{mn}$$

はすべての整数に対して成り立つことがわかる.

逆行列の求め方

A を n 次の正則行列とし, X を A の逆行列とすると $AX = XA = E$ となる.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \text{ の第 } j \text{ 列を } \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \text{ とおけば}$$

$$AX = E \iff A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

となる. よって $AX = E$ をみたす X を求めることは n 個の連立1次方程式 $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$ をみたす $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ を求めることと同値だから $(A|E)$ が行に関する基本変形で $(A|E) \rightarrow (E|B)$ となれば $X = B = A^{-1}$ である.

注1. 行列 X が $AX = E$ をみたせば $XA = E$ が成り立つことがわかっている (第3章3.2の定理5を参照せよ).

注2. 行に関する基本変形で $(A|E) \rightarrow (C|D)$ となり $\text{rank } C < n$ であれば A は正則行列でない.

例題 1.

n 次正方行列 A が $A^3 = O$ を満たせば $A + E$ は正則行列になることを示せ.

解答

$$(A + E)(A^2 - A + E) = (A^2 - A + E)(A + E) = A^3 + E = E.$$

よって $A + E$ は正則で, $(A + E)^{-1} = A^2 - A + E$ となる.

例題 2.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ は正則か. 正則ならば逆行列を求めよ.

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank } A = 2 < 3$ より A は正則でない.

例題 3.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & | & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right) \text{より}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A

1. 次を示せ.

(1) n 次正方行列 A が正則ならば逆行列 A^{-1} も正則で

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(2) n 次正方行列 A, B が正則ならば AB も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(3) n 次正方行列 A が正則ならば tA も正則で

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

2. $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次のことを示せ.

$$(1) A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$$

$$(2) A(\theta)^{-1} = A(-\theta)$$

$$(3) SA(\theta)S^{-1} = A(\theta)^{-1}$$

3. 正方行列 A が $A^2 - A + E = O$ をみたすとき A は正則であることを示せ. さらに A^{-1} を求めよ.

4. 正方行列 A が $A^m = O$ (m は自然数) となるとき $E - A$ の逆行列を求めよ.

5. 次の行列が正則であるかどうかを調べて正則ならばその逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

6. 次の行列 A の逆行列を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 2+2i & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

7. 次の行列 A の逆行列を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とするととき } A^{-1}, B^{-1},$$

$(AB)^{-1}$ を求めよ.

9. 次の行列 A の逆行列を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 \\ 0 & 1 & b & bc \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とするととき, 次の間に答えよ.}$$

(1) A が正則であるための c の条件を求めよ.

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき A の逆行列を求めよ.

B

1. A を m 次正方行列, D を n 次正方行列, B を $m \times n$ 型の行列, C を $n \times m$ 型の行列とし, $X = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$ とおく. A, D が正則行列のとき X および Y の逆行列を求めよ.

2. k を自然数とし, A を $m \times n$ 型の行列とするととき, 次の間に答えよ. ただし, E_m は m 次の単位行列を表す.

$$(1) \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k \text{ を求めよ.}$$

$$(2) \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} \text{ を求めよ.}$$

$$(3) \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-k} \text{ を求めよ.}$$

$$(4) B^2 = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \text{ となる行列 } B \text{ を1つ求めよ.}$$

A の解答

1. (1) A^{-1} が正則であるということは $A^{-1}X = XA^{-1} = E$ を満たす行列 X が存在するということである. ところが $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ だから A^{-1} は正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ である.

(2)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = E$$

よって AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である.

(3)

$${}^tA {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = E, \quad {}^t(A^{-1}) {}^tA = {}^t(AA^{-1}) = E$$

よって tA は正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である.

2. (1)

$$\begin{aligned} A(\theta_1)A(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = A(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

(2)

$$A(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = A(-\theta)$$

(3)

$$\begin{aligned} SA(\theta)S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A(\theta)^{-1} \end{aligned}$$

3. $A(E-A) = A - A^2 = E$, $(E-A)A = A - A^2 = E$. よって A は正則で,
 $A^{-1} = E - A$ である.

4.

$$\begin{aligned} E - A^m &= (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) \\ &= (E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})(E - A). \end{aligned}$$

$A^m = O$ より

$$\begin{aligned} &(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) \\ &= (E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})(E - A) = E \end{aligned}$$

となり $E - A$ の逆行列は $E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$ である.

5. (1) $3 \times 1 - (-1)(-2) = 1$ より $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $1 \times (-4) - 2 \times (-2) = 0$ より $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ は正則でない.

(3) $101^2 - 99^2 = 200 \times 2 = 400$ より $\begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{400} \begin{pmatrix} 101 & -99 \\ -99 & 101 \end{pmatrix}$

(4) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - (-\sqrt{3}) \cdot 0 = 1$ より $\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

6. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -12 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -1 & 5 \\ 10 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より逆行列は存在しない.}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

より

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 8 & -12 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 2+2i & 1 & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+3i & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1-i & \frac{3-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & i & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-i}{4} & \frac{1-i}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1-i & \frac{3-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & i & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{array} \right)
\end{aligned}$$

より

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1+i & 1-i \\ 4-4i & 6-2i & -2+2i \\ 4i & 2i & -2i \end{pmatrix}$$

7. (1)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \text{より}
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \text{より} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left(= \frac{1}{4} A \right)$$

$$\begin{aligned} 8. & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{より } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{より } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ -2 & -5 & 22 \\ 8 & 22 & -95 \end{pmatrix}.$$

9. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{より } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -ab & -a & | & 1 & -a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & | & 1 & -a & ab-1 \end{pmatrix}$$

 $a \neq 0$ のとき, さらに変形して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{a} - b \end{pmatrix}$$

となる. よって $a \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{a} - b \end{pmatrix}$$

$a = 0$ のとき A の逆行列は存在しない.

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & bc & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -a & 0 & abc \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & abc \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & -1 & | & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 - 1 & | & c & -1 & -c & 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

A が正則である条件は $c^2 - 1 \neq 0$ である. よって $c \neq \pm 1$.

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき (1) の最終の変形に代入すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{array} \right) \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2\sqrt{2} & 3 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{array} \right) \text{より} \\
&A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{2} & 3 & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bの解答

1. $X^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix}$ であろうと予想すると

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & AQ + BR \\ O & DR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

より $P = A^{-1}$, $R = D^{-1}$, $AQ + BR = O$, $Q = -A^{-1}BD^{-1}$ とならねばならない. 実際に計算すれば

$$\begin{aligned}
X \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BD^{-1} + BD^{-1} \\ O & DD^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}. \\
\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1}A & A^{-1}B - A^{-1}BD^{-1}D \\ O & D^{-1}D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}.
\end{aligned}$$

よって

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

同様に $Y^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$ であることも確かめられる.

2. (1) $\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法を用いて示す.

$k=1$ のときは成り立っている. $k-1$ で成り立つと仮定すれば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{k-1} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & (k-1)A \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & (k-1)A + A \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって k のときも成り立つ.

(2)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}, \\ \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-k} &= \left\{ \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-1} \right\}^k \\ &= \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E_m & -kA \\ O & E_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) $B = \begin{pmatrix} E_m & \frac{1}{2}A \\ O & E_n \end{pmatrix}$ とすると

$$B^2 = \begin{pmatrix} E_m & \frac{1}{2}A \\ O & E_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E_m & 2 \cdot \frac{1}{2}A \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}$$