

行列式と逆行列の計算課題

1 行列式を計算せよ

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{pmatrix}$$

解. (i) def を省略して、縦棒で表示する。行列式の右横には操作を示す。3 行と 4 行の (3,1),(4,1) 要素をゼロにした理由は、簡単に倍数でゼロとできるから。ほかにも簡単な式変形にできる操作があるかも知れない。

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc|l} 3 & 1 & 4 & 1 & : r_1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 & : r_2 \\ 5 & 3 & 5 & 8 & : r_3 \\ 9 & 7 & 9 & 3 & : r_4 \end{array} = \begin{array}{cccc|l} \boxed{3} & 1 & 4 & 1 & : r_1 \\ \boxed{5} & 9 & 2 & 6 & : r_2 \\ 0 & -6 & 3 & 2 & : r_2 * (-1) + r_1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & : r_1 * (-3) + r_4 \end{array} = \boxed{3} * \begin{array}{ccc|l} 9 & 2 & 6 & \\ -6 & 3 & 2 & \\ 4 & -3 & 0 & \end{array} + (-1)\boxed{5} * \begin{array}{ccc|l} 1 & 4 & 1 & \\ -6 & 3 & 2 & \\ 4 & -3 & 0 & \end{array} \\ = 3 * 106 - 5 * 44 = 98 \text{ (答え終り)} \end{array}$$

解. (ii) def を省略して、縦棒で表示。\$2^{n+1} - 2^n = 2^n, 3^{n+1} - 3^n = 3^n \cdot 2, 4^{n+1} - 4^n = 4^n \cdot 3, \dots\$ をもちいる。つぎのステップでも \$3^{n+1} \cdot 2 - 3^n \cdot 2 = 3^n \cdot 2^2, 4^{n+1} \cdot 3 - 4^n \cdot 3 = 4^n \cdot 3^2, \dots\$ としていく。

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 3 & 4 & : r_1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & : r_2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & : r_3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & : r_4 \end{array} = \begin{array}{cccc|l} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & : r_1 \\ 0 & 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 & : r_2 - r_1 \\ 0 & 2^2 \cdot 1 & 3^2 \cdot 2 & 4^2 \cdot 3 & : r_3 - r_2 \\ 0 & 2^3 \cdot 1 & 3^3 \cdot 2 & 4^3 \cdot 3 & : r_4 - r_3 \end{array} = \begin{array}{ccc|l} 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 & : r_5 \\ 2^2 \cdot 1 & 3^2 \cdot 2 & 4^2 \cdot 3 & : r_6 \\ 2^3 \cdot 1 & 3^3 \cdot 2 & 4^3 \cdot 3 & : r_7 \end{array} \\ = \begin{array}{ccc|l} \boxed{2 \cdot 1} & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 & : r_5 \\ 0 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \cdot 2 & : r_6 - 2r_5 \\ 0 & 3^2 \cdot 2 & 4^2 \cdot 3 & : r_7 - 2r_6 \end{array} = \boxed{2 \cdot 1} \begin{array}{cc|l} 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \cdot 2 & : r_8 \\ 3^2 \cdot 2 & 4^2 \cdot 3 & : r_9 \end{array} = \boxed{2 \cdot 1} \begin{array}{cc|l} \boxed{3 \cdot 2} & 4 \cdot 3 \cdot 2 & : r_8 \\ 0 & 4 \cdot 3 \cdot 2 & : r_9 - 3r_8 \end{array} \\ = \boxed{2 \cdot 1} * \boxed{3 \cdot 2} * 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2! * 3! * 4! \text{ (答え終り)} \end{array}$$

このようにすれば、\$3 \times 3\$ なら \$2! * 3! = 12\$、\$4 \times 4\$ ならば \$2! * 3! * 4!\$ が得られ、\$5 \times 5\$ ならば \$2! * 3! * 4! * 5!\$ となることが予想される。確かめよ。

2 逆行列をもとめよ

$$(i) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (ii) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解説. 単位行列の右横にならべ、掃き出し計算をすることが基本である。なぜならば常に逆行列が存在するとは限らないから。余因子を使う方法はすべての要素の場合を計算するとそれらがすべてゼロであれば、逆行列は存在しない。ここでは、はじめに余因子を求める場合と、掃き出しの操作を取り入れ、いくつかの要素をゼロと変形して、余因子展開を試みる。符号数 (\$\pm 1\$) にも注意。また逆行列の結果には、検証できることから確かめること。

$$\text{解. (i) (1,1) 要素: } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad (1,2) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1,3) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad (2,1)$$

$$\begin{aligned} \text{要素: } (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2,2) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad (2,3) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad (3,1) \text{ 要素: } \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad (3,2) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad (3,3) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

$$\text{以上により、余因子行列は } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ となる。逆行列 } A^{-1} \text{ には行列式}$$

$\det|A|$ を求めなければならない。2 行目に 3 行目を加えると、ゼロになる箇所が 2 か所できるので、この操作後に 2 行目で展開すると、一つの行列式に帰着される。

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} : r_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} : r_3 + r_2 = (-1)^{2+2} \boxed{1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{1} ((-3)(-1) - 2 \cdot 2) = -1$$

$$\text{したがって } A^{-1} = \frac{1}{\det|A|} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{答え終り})$$

$$\text{解. (ii) まず行列式の値は 4 行目が非ゼロ要素がひとつしかないから、} \det|B| = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$(-1)(-1) = 1$ である。つぎは余因子を 16 個計算しなければならない。(面倒ならば掃き出しでも試みよ。それも面倒かな?)

$$(1,1) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1,2) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1,3) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1,4) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(2,1) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} 0 & b & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad (2,2) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2,3) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2,4) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = c,$$

$$(3,1) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (3,2) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad (3,3) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b, \quad (3,4) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -bc,$$

$$(4,1) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad (4,2) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a, \quad (4,3) \text{ 要素: } (-1) \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = ab, \quad (4,4) \text{ 要素: } \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -abc \text{ となる。}$$

$$\text{したがって } \tilde{B} = \frac{1}{\det|B|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & -b & -bc \\ 1 & -a & ab & -abc \end{pmatrix}^t \text{ から、} B^{-1} = \frac{1}{\det|B|} \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -b & ab \\ 1 & c & -bc & -abc \end{pmatrix}$$

$$(\text{答え終り})$$