

工学を志す人の 線形代数

阿部吉弘・伊藤 博・酒井政美
長 宗雄・永野與彦・堀口正之
矢島幸信・山崎文明

東京 教 学 社

序

この本で取り上げる話題のひとつの最も素朴な形は

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{3}y = 1 \\ -\frac{2}{5}x + 4y = -3 \end{cases}$$

のような、連立方程式である。このような連立方程式は、すでに中学校以来おなじみのように、1つの未知数を消去することによって解を求めることができる。すなわち、第1の式を4倍したものから、第2の式を $\sqrt{3}$ 倍したものを引けば x だけの式が残し、解を求めることができる。このとき、 x の係数として現れるもの、すなわち $2 \times 4 - (-\frac{2}{5}) \times \sqrt{3}$ から行列式の発見につながった、というのであれば話はわかりやすいのであるが、歴史は必ずしもこのようには展開しなかった。ただ、和算(西洋数学の影響を受ける以前の日本で独自の発展をとげた数芸をこうよぶ)の歴史の中で、関孝和(1642? - 1708)が行列式を見出した経緯は、連立方程式の取り扱いの中からだったらしい。関孝和の行列式の発見は、その西洋数学の中での発見者とされるライプニッツ(1646 - 1716)に先んずるとして、和算史の中でのひとつの誇らしい挿話となっている。しかし、ライプニッツを行列式の第一発見者とするのは、例えその端緒が著書の中にほのめかされているとはいえ、疑問視されている(ブルバキ(村田全訳), 数学史 77頁)。実際には、解析幾何を研究する中で座標変換のようなことから、クラメル(1704 - 1752)やベズー(1739 - 1783)などによって導入され、コーシー(1789 - 1857)、ヤコビ(1804 - 1851)によって、少なくとも、この本で解説する程度にまでは発展させられた。

また数学的なある対象の集まりが線形的かどうかという問いかけの仕方も、歴史的には連立1次方程式系の解の空間についてではなく、むしろある種の微分方程式の解の空間のあり方から導入されたという方が事実に近いだろう。

いわば、連立1次方程式自体は順次未知数を消去していきさえすれば、解ける(あるいは解けないことの判定がつく)ということ、これ自体を目的に研究するということはほとんどなかったように見える。

しかし、現在では多少状況は異なっている。工学などの実用上では大きなサイズの連立1次方程式を、可能ならば、具体的に解けることが望ましいし、近年の計算機の発達により、実際に望みもでてきた。この場合はいかに効率的に解くかということも時間、費用の面から重要になり、この方向の研究もいまや数多くある。また情報通信の分野では、スカラーの区域を有限体とよばれるものに取り替えるのではあるが、行列や行列式の理論的側面を駆使している。

このような時代にふさわしい教科書として本書が読者の役に立つことを願っている。

2000年9月

著者

目次

1	行列	3
1	行列とその和・スカラー倍	3
2	行列の積	5
3	種々の行列	8
2	行列の基本変形と連立 1 次方程式	13
1	行列の基本変形	13
2	階段行列への変形	16
3	行列の階数, 標準形	19
4	連立 1 次方程式の解法	22
5	連立 1 次方程式の解と係数行列の階数	26
6	逆行列	28
3	行列式	33
1	順列	33
2	行列式の定義	36
3	行列式の性質 (1)	38
4	行列式の性質 (2)	41
5	行列式の乗法性	44
6	展開公式	46
7	展開公式の応用	49
8	小行列式と行列の階数	53
4	固有値と固有ベクトル	57
1	1 次独立と 1 次従属	57
2	階数	60
3	行列の階数, 正則性との関係	62
4	固有値と固有ベクトル (1)	65
5	固有値と固有ベクトル (2)	68
6	行列の対角化	69

2 目次

5	線形写像	75
1	ベクトル	75
2	ベクトル空間	78
3	ベクトル空間の基底と次元	80
4	線形写像と1次変換	83
5	線形写像の表現行列	86
6	複素ベクトル空間と正規直交基底	92
7	直交変換と直交行列	96
8	実対称行列と2次形式	100
6	正規行列とJordanの標準形	109
1	正規行列	109
2	巾零行列	112
3	Jordanの標準形	115
4	行列の絶対値と不等式	123
7	工学への応用	133
1	線形システムと状態方程式	133
2	システムの安定性	136
3	線形計画法	138
4	2次形式と固有値	142
5	その他の応用	144
	付録	145
1	付録1: 階段行列の一意性	145
2	付録2: 2次・3次の行列式と面積・体積	146
3	付録3: 多項式	149
	解答	151

第1章

行列

1 行列とその和・スカラー倍

数を下のように長方形上に並べて括弧でくくったものを行列という:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列において、横の並びを行といい、縦の並びを列という。上の行列 A は、行が m 個、列が n 個あるので、 m 行 n 列の行列、または (m, n) 行列という。行列 A の第 i 行と第 j 列の交わりの位置にある数を A の (i, j) 成分という。 (i, j) 成分が a_{ij} である行列を (a_{ij}) と書く。

例 1.1. $a_{ij} = i^2 - j$ であるとき、 $(4, 5)$ 行列 $A = (a_{ij})$ の成分を並べて書き表すと

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

となる。

$(1, n)$ 行列を n 次元行ベクトル、 $(m, 1)$ 行列を m 次元列ベクトルといい、これらを総称して数ベクトルという。特に、すべての成分が 0 の数ベクトルを零ベクトルといい、 $\mathbf{0}$ とかく。 (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ の第 i 行の成分からできる行ベクトルを A の第 i 行ベクトルといい、 A の第 j 列の成分からできる列ベクトルを A の第 j 列ベクトルという。たとえば、例 1.1 の A について、第 3 行ベクトルは

$$(8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4),$$

4 第1章. 行列

第4列ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

である.

成分がすべて0の行列を**零行列**といい, O で表す. (m, n) 行列であることを明示したいときは $O_{m,n}$ と書く.

2つの (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ について, $A = B$ であるとは,

$$\text{すべての } i, j \text{ について } a_{ij} = b_{ij}$$

となることである.

例 1.2.

$$\begin{pmatrix} 2a - 4b & c + d \\ 3b + c & a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

となるように a, b, c, d を定めよ.

解. 連立方程式

$$2a - 4b = 6, \quad c + d = 1, \quad 3b + c = 7, \quad a - d = 8$$

を解いて,

$$a = 5, \quad b = 1, \quad c = 4, \quad d = -3.$$

2つの (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ について, その和 $A + B$ とその差 $A - B$ を

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

として定める. また実数 λ について,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

と定める (スカラー倍).

例 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

また,

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 6 & 12 \\ 12 & -6 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1.1. A, B, C を同じ型の行列, λ, μ を実数とする.

- (1) $A + B = B + A,$
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C),$
- (3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A),$
- (4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$
- (5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$

証明. 証明はどれも容易である. 例えば, (4) は $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とすれば,

$$\lambda(A + B) = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = (\lambda(a_{ij} + b_{ij})) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda A + \lambda B$$

となって証明される. (2), (4) から $A + B + C, \lambda\mu A$ などと記しても混乱が生じないことになる. □

問 1.1. 3次元ベクトル

$$\begin{pmatrix} -3j \\ j \\ 2j - 1 \end{pmatrix}$$

を第 j 列ベクトルとする $(3, 3)$ 行列 A を書け. また, A の第 3 行ベクトルを書け.

2 行列の積

$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列, $B = (b_{ij})$ を (n, l) 行列とする. 行列 A と B の積 AB は $n = k$ のときに限り定義され, このとき,

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pj}$$

を (i, j) 成分とする (m, l) 行列 $C = (c_{ij})$ を AB と定める.

例 2.1.

6 第1章. 行列

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

上の例からもわかるように, 行列の積については, 交換法則が成り立たない. また, $A \neq O$, $B \neq O$ でも $AB = O$ となることがある.

例 2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$$

とする. $AB = BA$ となる k があれば求めよ.

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 23 & 5k - 10 \\ -9 & k + 15 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ -3k + 6 & k + 15 \end{pmatrix}$$

であるので, $AB = BA$ となる条件は,

$$\begin{cases} 5k - 10 = 15 \\ -3k + 6 = -9. \end{cases}$$

これを解いて $k = 5$.

定理 2.1. A, B, C を行列, λ を実数とする.

$$(1) (AB)C = A(BC),$$

$$(2) (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC,$$

$$(3) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

証明. (1) のみ示す. $A = (a_{ij})$ を (k, l) 行列, $B = (b_{ij})$ を (l, m) 行列, $C = (c_{ij})$ を (m, n) 行列とする. $AB = (d_{ij})$, $BC = (e_{ij})$ とすると,

$$d_{ij} = \sum_{q=1}^l a_{iq}b_{qj}, \quad e_{ij} = \sum_{p=1}^m b_{ip}c_{pj}$$

となり, $(AB)C$ の (i, j) 成分は

$$\sum_{p=1}^m d_{ip}c_{pj} = \sum_{p=1}^m \left(\sum_{q=1}^l a_{iq}b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{q=1}^l a_{iq} \left(\sum_{p=1}^m b_{qp}c_{pj} \right) = \sum_{q=1}^l a_{iq}e_{qj}.$$

これは $A(BC)$ の (i, j) 成分に等しい. $\square$

(n, n) 行列を n 次正方行列ともいう. n 次正方行列

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を n 次単位行列という. (m, n) 行列 A について,

$$E_m A = A, \quad A E_n = A$$

が成り立つ.

例 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

であるとき, 行列 B を求めよ.

解. B は $(2, 3)$ 行列である.

$$B = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

とすると,

$$AB = \begin{pmatrix} a-2b & c-2d & e-2f \\ -2a+5b & -2c+5d & -2e+5f \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{cases} a - 2b = -1 \\ -2a + 5b = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} c - 2d = 2 \\ -2c + 5d = -9 \end{cases}, \quad \begin{cases} e - 2f = -1 \\ -2e + 5f = 3 \end{cases}.$$

これから,

$$a = 7, \quad b = 4, \quad c = -8, \quad d = -5, \quad e = 1, \quad f = 1.$$

ゆえに,

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2.1. 次の各行列を A とするとき, $A = B^2$ となる行列 B をすべて求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3 種々の行列

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ について, A の (j, i) 成分 a_{ji} を (i, j) 成分とする (n, m) 行列を tA と書いて, A の転置行列という. ${}^tA = (b_{ij})$ とすれば, $b_{ij} = a_{ji}$ である.

例 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ならば,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

また

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ならば,

$${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

定理 3.1.

- (1) ${}^t({}^tA) = A,$
- (2) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,$
- (3) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$

証明. (1), (2) については容易であるので略する. (3) を示す. $A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列, $B = (b_{ij})$ を (n, l) 行列とすると,

$$AB = \left(\sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj} \right), \quad {}^t(AB) = \left(\sum_{p=1}^n a_{jp} b_{pi} \right).$$

一方で,

$${}^tB = (b_{ji}), \quad {}^tA = (a_{ji}), \quad {}^tB {}^tA = \left(\sum_{p=1}^n b_{pi} a_{jp} \right).$$

よって,

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

□

n 次正方行列 A について

$$AX = XA = E_n$$

となるような n 次正方行列 X が存在するとき, A は正則行列であるといい, この X を A の逆行列といって A^{-1} で表す.

例 3.2. 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

は $ad - bc \neq 0$ ならば正則で, このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

証明. $D = ad - bc \neq 0$ のとき,

$$X = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$AX = XA = E_2$$

となる. よって A は正則で $A^{-1} = X$. $\square$

問 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

は正則行列でないことを示せ.

例 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

解. $AX = E$, $X = (x_{ij})$ とすると,

$$AX = \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 4x_{11} & 4x_{12} & 4x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $XA = E$ となることも確かめられる. ゆえに

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 3.2. n 次正方行列 A, B と実数 $\lambda (\neq 0)$ について, 次が成り立つ.

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A,$
- (2) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1},$
- (3) $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}),$
- (4) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$

証明. (4) のみ示す. A, B が正則であるとき, $X = B^{-1} A^{-1}$ とすれば

$$(AB)X = ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = E,$$

$$X(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = E.$$

よって AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\square$

問 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ において

$$i > j \text{ ならば } a_{ij} = 0$$

となっているとき, A を上三角行列という. また,

$$i < j \text{ ならば } a_{ij} = 0$$

となっているとき, A を下三角行列という. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を A の対角成分という. 対角成分以外の成分がすべて 0 であるとき, A を対角行列という.

例 3.4.

- (1) 上三角行列の積は上三角行列である,
 (2) 下三角行列の積は下三角行列である,
 (3) 対角行列の積は対角行列である.

証明. (1) のみ示す. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を n 次の上三角行列とする. $AB = (c_{ij})$ とすると,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

$i > j$ ならば,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^j a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^j 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} \cdot 0 = 0.$$

よって, AB も上三角行列である. $\square$

問 3.3. 上三角行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

第 1 章 練習問題

1. 次の計算をなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) (2 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^n \quad (8) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}^n$$

2. $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2-a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1+2b \\ b & -1 \end{pmatrix}$ のとき, 次の関係式が成り立つような実数 a, b の値または関係式を求めよ.

$$(1) A^2 = A \quad (2) B^2 = -B \quad (3) AB = BA \quad (4) AB = -BA$$

$$(5) (A+B)^2 = O \quad (6) (A-B)^2 = E_2.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & a_1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & a_2 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & a_3 \end{pmatrix}$ とするとき, ${}^tAA = E_3$ の成り立つ a_1, a_2, a_3 を求めよ.

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -a+3 \\ a+4 & a+1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないように a の値を定めよ.

5. 次の行列の逆行列を求めよ

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. 次の行列 A について, A^2, A^3, A^4 および A^{10} を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$$

7. n 次正方行列 A, B に対して, $E_n - AB$ が正則ならば $E_n - BA$ も正則で

$$(E_n - BA)^{-1} = E_n + B(E_n - AB)^{-1}A$$

となることを証明せよ.

第2章

行列の基本変形と連立1次方程式

1 行列の基本変形

行列に対して行われる、次のような操作を行基本変形という。

- [行 1] 第 i 行を c 倍する ($c \neq 0$),
- [行 2] 第 i 行と第 j 行を交換する ($i \neq j$),
- [行 3] 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える ($i \neq j$).

本書ではこれらをそれぞれ

$$i \text{ 行} \times c, i \text{ 行} \leftrightarrow j \text{ 行}, i \text{ 行} + j \text{ 行} \times c$$

と略記する. 同様に、次のような列に関する操作を、列基本変形という.

- [列 1] 第 i 列を c 倍する ($c \neq 0$),
- [列 2] 第 i 列と第 j 列を交換する ($i \neq j$),
- [列 3] 第 i 列に第 j 列の c 倍を加える ($i \neq j$).

これらをそれぞれ

$$i \text{ 列} \times c, i \text{ 列} \leftrightarrow j \text{ 列}, i \text{ 列} + j \text{ 列} \times c$$

と略記する.

行基本変形と列基本変形を総称して、基本変形という.

例 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

のとき

$$E_n \xrightarrow{i \text{ 行} + j \text{ 行} \times c} H_n(i, j; c), E_n \xrightarrow{j \text{ 列} + i \text{ 列} \times c} H_n(i, j; c).$$

行列の積の定義を考えれば、次の定理が成り立つことがわかる。

定理 1.1. A を (m, n) 行列とする。

(1) A に行基本変形 [行 1], [行 2], [行 3] を施した行列はそれぞれ

$$F_m(i; c)A, G_m(i, j)A, H_m(i, j; c)A$$

である。

(2) A に列基本変形 [列 1], [列 2], [列 3] を施した行列はそれぞれ

$$AF_n(i; c), AG_n(i, j), AH_n(j, i; c)$$

である。

例 1.2. 例 1.1 の A について、

$$F_2(2; 3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix},$$

$$G_2(1, 2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$H_2(1, 2; -2)A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$AF_3(3; -1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$AG_3(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$AH_3(2, 3; 2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

定理 1.2. 次が成り立つ。特に基本行列は正則行列である。

$$(1) F_n(i; c)F_n(i; 1/c) = E_n,$$

$$(2) G_n(i, j)^2 = E_n,$$

$$(3) H_n(i, j; c)H_n(i, j; -c) = E_n.$$

証明. 定理 1.1 よりわかる. 例えば, $F_n(i; c)F_n(i; 1/c)$ は $F_n(i; 1/c)$ の第 i 行を c 倍した行列ゆえ, E_n に等しい. $\square$

定理 1.3. (m, n) 行列 A に何回かの行基本変形 (列基本変形) を施して行列 B が得られるとき, ある m 次 (n 次) 正則行列 P があって,

$$B = PA \quad (B = AP)$$

が成り立つ.

証明. 行基本変形により, A が A_1 に, A_1 が A_2 に, $\dots$, A_{k-2} が A_{k-1} に, A_{k-1} が B に変形されたとすると, m 次の基本行列 $M_1, M_2, \dots, M_k$ があって,

$$B = M_k A_{k-1} = M_k M_{k-1} A_{k-2} = \dots = M_k \dots M_1 A.$$

$P = M_k \dots M_1$ とすれば, P は m 次正則行列で, $B = PA$. 列基本変形についても同様. $\square$

例 1.3. 行基本変形により,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -8 & 12 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行} \leftrightarrow 3 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -8 & 12 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-6)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 36 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

したがって,

$$P = H_3(3, 2; -6)H_3(2, 1; -1)G_3(1, 3)$$

とすると

$$B = PA$$

となり

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2 階段行列への変形

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ の (p, q) 成分 a_{pq} が 0 でないとき, $m-1$ 個の行基本変形

$$i \text{ 行} + p \text{ 行} \times \left(-\frac{a_{iq}}{a_{pq}} \right) \quad (1 \leq i \leq m, i \neq p)$$

を行うことにより, A の第 q 列ベクトルを,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{pq} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots (p)$$

とすることができる. この操作を, (p, q) 成分による第 q 列の掃き出しという. 同様に $n-1$ 個の列基本変形

$$j \text{ 列} + q \text{ 列} \times \begin{pmatrix} -a_{pj} \\ a_{pq} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq n, j \neq q)$$

により, A の第 p 行ベクトルを

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{pq} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ (q)$$

とすることができる (第 p 行の掃き出し).

例 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

の $(1, 2)$ 成分で第 2 列を掃き出すと,

$$A \xrightarrow{2 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times (-2), 3 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times (-1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -5/2 & -3 \end{pmatrix}$$

$(2, 3)$ 成分で第 2 行を掃き出すと,

$$A \xrightarrow{1 \text{ 列}+3 \text{ 列} \times 2, 2 \text{ 列}+3 \text{ 列} \times (-4), 4 \text{ 列}+3 \text{ 列} \times (-3)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

次の形の (m, n) 行列 A を, 階数 r の階段行列という.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdots (r) \quad (2.1)$$

正確に述べれば次のようになる:

$$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$$

である整数 $k_1, k_2, \dots, k_r$ があって,

$$(A \text{ の第 } i \text{ 行}) = \begin{cases} (0 \cdots 0 \ 1 \ * \cdots *) & (1 \leq i \leq r) \\ \vdots & \\ (k_i) & \\ (0 \cdots \cdots \cdots 0) & (r < i \leq m). \end{cases}$$

さらに,

$$(A \text{ の第 } k_j \text{ 列}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots (j) \quad (1 \leq j \leq r).$$

例 2.2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は階数 2 の階段行列. また,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は階数 3 の階段行列.

定理 2.1. (m, n) 行列 A は, 何回かの行基本変形を施すことによって, 階段行列に変形することができる. したがって, PA が階段行列になるような m 次正則行列 P が存在する.

証明. 次の (i-1)~(i-3) の操作を, $i = 1, 2, \dots$ に対して順に行う.

(i-1) 行列の第 i 行目以下のみを見て, 左から最初の 0 ベクトルでない列を第 m_i 列とする.

(i-2) 行基本変形により, (i, m_i) 成分を 1 にする.

(i-3) 第 m_i 列を (i, m_i) 成分で掃き出す.

i 行目以下を見たときに, 成分がすべて 0 になっているか, または $i = m$ となれば, 階段行列への変形が完了している. $\square$

例 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により, 階段行列 B に変形せよ. また $B = PA$ となる正則行列 P を求めよ.

解.

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-5), 3\text{行}+1\text{行}\times(-9)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{2\text{行}\times(-1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-2), 3\text{行}+2\text{行}\times 8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

したがって,

$$P = H_3(1, 2; -2)H_3(3, 2; 8)F_3(2; -1/4)H_3(2, 1; -5)H_3(3, 1; -9)$$

とするとき $B = PA$ となる.

$$P = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 0 \\ 5/4 & -1/4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

問 2.1. 次の行列を階段行列に変形せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -9 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 7 \\ -4 & -11 & 16 \\ 5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -21 & 5 \end{pmatrix}$$

3 行列の階数, 標準形

この節の主な目的は, 行列の基本変形に慣れることである.

前節で見たように (m, n) 行列 A は, 何回かの行基本変形によって, 階段行列 B に変形される. 階段行列 B は, 行基本変形の仕方によらず, A のみで定まることが示せる. そこで, B が階数 r の階段行列であるときに, A の階数は r であるといい, $\text{rank } A = r$ と書くことにする.

例 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$A \xrightarrow{1\text{行} \leftrightarrow 2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{行}+1\text{行} \times (-7)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+2\text{行} \times (-1), 3\text{行}+2\text{行} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\text{rank } A = 2.$$

問 3.1. 次の行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

基本変形によって与えられた行列を階段行列以外の標準的な形に変形して考える場合もある.

定理 3.1. (m, n) 行列 A は, 何回かの行基本変形と列の交換によって, 次の形の行列に変形できる.

$$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ここで, $r = \text{rank } A$ である. したがって, PAQ がこの形の行列になるような, m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する.

証明. A を行基本変形によって, (2.1) の形にしたのちに, 列基本変形

$$1\text{列} \leftrightarrow k_1\text{列}, 2\text{列} \leftrightarrow k_2\text{列}, \dots, r\text{列} \leftrightarrow k_r\text{列}$$

を施せばよい. 最後の主張は, 定理 1.3 による. $\square$

例 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$A \xrightarrow{2 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times 2, 3 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times 4, 4 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1 \text{ 行}+2 \text{ 行}, 3 \text{ 行}+2 \text{ 行} \times 6, 4 \text{ 行}+2 \text{ 行} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 列} \leftrightarrow 3 \text{ 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$P = H_4(4, 2; -2)H_4(3, 2; 6)H_4(1, 2; 1)H_4(4, 1; -2)H_4(3, 1; 4)H_4(2, 1; 2)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 6 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = G_3(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 3.2. (m, n) 行列 A は, 何回かの行および列の基本変形によって,

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

の形の行列に変形できる. ここで, $r = \text{rank } A$ である. したがって, PAQ が上の形になるような, m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する.

証明. 行および列の基本変形によって, A を (2.2) の形にした後に, さらに列基本変形によって, 第 1 行を $(1, 1)$ 成分で, 第 2 行を $(2, 2)$ 成分で, $\dots$, 第 r 行を (r, r) 成分で, それぞれ掃き出せばよい. $\square$

とすれば $\tilde{A} = (A \ b)$ で, (2.4) は

$$Ax = b$$

となる.

定理 4.1. 連立1次方程式 (2.4) の拡大係数行列を $\tilde{A}$ とする. 何回かの行基本変形で, $\tilde{A}$ が $\tilde{A}'$ に変形されるとき, (2.4) は $\tilde{A}'$ を拡大係数行列とする連立1次方程式と同値である.

証明. $\tilde{A}'$ の第1列から第 n 列までを並べた行列を A' , $\tilde{A}'$ の第 $n+1$ 列ベクトルを b' とすると, $\tilde{A}'$ に対応する連立1次方程式は

$$A'x = b'$$

である. いま, 定理 1.3 から, ある正則行列 P があって,

$$\tilde{A}' = P\tilde{A}$$

となっており, よって,

$$A' = PA, \ b' = Pb$$

である. したがって

$$A'x = b' \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow Ax = b$$

□

この定理により, 連立1次方程式を解くには, 行基本変形によって, 拡大係数行列を簡単な行列 (たとえば階段行列) に変形して, それに対応する連立1次方程式を解けばよいことになる.

例 4.1. 連立1次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3y - 4z = 6 \end{cases}$$

を解け.

解. 拡大係数行列は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

である. これは次のように階段行列に変形される:

$$\tilde{A} \xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times 1/3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}, 3\text{行}+2\text{行}\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{行}\times(-1/5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{1\text{行}+3\text{行}\times 5/3, 2\text{行}+3\text{行}\times(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

この階段行列に対応する連立1次方程式は,

$$\begin{cases} x & = & 1/3 \\ y & = & -2/3 \\ z & = & -2. \end{cases}$$

よって, 求める解は,

$$x = 1/3, y = -2/3, z = -2.$$

上の例では, 係数行列を A とするとき,

$$\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 3$$

である.

連立1次方程式では, 解をもたない場合も, 無数に多くの解をもつ場合もある. もう少し例を見よう.

例 4.2.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

を解け.

解. 拡大係数行列は次のように変形される:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}, 3\text{行}+1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times 2/3} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times 1/2, 3\text{行}+2\text{行}\times 3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

最後の行列に対応する連立 1 次方程式は,

$$\begin{cases} x & -z = 1 \\ y & -z = 1. \end{cases}$$

$z = c$ とすれば, 求める解は,

$$x = c + 1, y = c + 1, z = c \quad (c \text{ は任意の定数}).$$

例 4.3.

$$\begin{cases} 2x & - y & - z = 1 \\ -x & + 2y & - z = 1 \\ -x & - y & + 2z = 1 \end{cases}$$

を解け.

解. 係数行列は例 4.2 の場合と同じである. そこで例 4.2 と同様な行基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる. 最後の行列に対応する連立 1 次方程式の第 3 式は,

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$$

となるから, 連立 1 次方程式は解をもたない.

係数行列を A , 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とすると, 例 4.2 では

$$\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 2,$$

例 4.3 では

$$\text{rank } A = 2, \text{rank } \tilde{A} = 3$$

となっていることに注意しておこう.

問 4.1. 次の連立 1 次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 2x & - y & - z = -5 \\ 4x & - 5y & - 2z = -1 \\ -2x & + 3y & + z = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 & + 2x_2 & & - x_4 = -4 \\ -2x_1 & - x_2 & + 6x_3 & + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 & + 4x_2 & + 2x_3 & + 3x_4 = -10 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x & + 2y & - 2z = 0 \\ 2x & - y & + 3z = 2 \\ 3x & & + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (r+1)$$
$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1$$
[illegible]
$$x_i = c_i \quad (1 \leq i \leq n, \quad i \neq k_1, \dots, k_r)$$
[illegible]

定理 5.1. 連立 1 次方程式 (2.4) の係数行列を A , 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とする.

- (1) (2.4) が解をもつための条件は, $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A}$ である.
- (2) (2.4) が解をもつとき, $r = \text{rank } A$ とおけば解は $n - r$ 個の任意定数を含む. 特に, $n = r$ ならば, 解はただ 1 つである.

問 5.1. 前節の例 4.1 ~ 4.3 を, 上の定理 5.1 に即して再検討してみよ.

例 5.1. 連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = a_1 \\ 2x \quad \quad + 2z = a_2 \\ x + y + 2z = a_3 \end{cases}$$

が解をもつためには, 定数 a_1, a_2, a_3 の間にどのような関係があればよいか.

解. 拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \ b)$ は行基本変形により次のように変形される.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & a_1 \\ 2 & 0 & 2 & a_2 \\ 1 & 1 & 2 & a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行} \leftrightarrow 3 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_3 \\ 2 & 0 & 2 & a_2 \\ 2 & 1 & 3 & a_1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-2), 3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_3 \\ 0 & -2 & -2 & a_2 - 2a_3 \\ 0 & -1 & -1 & a_1 - 2a_3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a_3 \\ 0 & -2 & -2 & a_2 - 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2/2 - a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに, $\text{rank } A = 2$ で,

$$\text{rank } \tilde{A} = \begin{cases} 2 & (a_1 - a_2/2 - a_3 = 0) \\ 3 & (a_1 - a_2/2 - a_3 \neq 0). \end{cases}$$

したがって与えられた連立1次方程式が解をもつための条件は,

$$a_1 - a_2/2 - a_3 = 0$$

である.

例 5.2.

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 1 \\ 4x + 2y - 4z + 5w = 3 \\ -2x - y + 3z - 2w = -2 \\ 2x + y + z + 4w = 0 \end{cases}$$

の解に含まれる任意定数の個数を求めよ.

解. 拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \ b)$ は次のように変形される.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-2), 3 \text{ 行} + 1 \text{ 行}, 4 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 \text{ 行} + 2 \text{ 行}, 4 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 2$. いま, 変数の個数は 4 であるから, 連立 1 次方程式の解に含まれる任意定数の個数は $4 - 2 = 2$ である.

問 5.2. 次の連立 1 次方程式が解をもつためには, a_1, a_2, a_3 の間にどのような関係式が成り立っていればよいか.

$$(1) \begin{cases} 2x + y - z = a_1 \\ x + y = a_2 \\ 3x + 2y - z = a_3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = a_1 \\ 3x + 4y + 7z = a_2 \\ x + 3y - z = a_3 \end{cases}$$

問 5.3. 次の連立 1 次方程式の解は任意定数をいくつ含むか.

$$(1) \begin{cases} 3x + 6y + 9z = 12 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - z = -6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + y - z + 3w = 1 \\ 4x + 2y - 4z + 5w = 3 \\ -2x - y + 3z - 2w = -2 \\ 2x + y + z + 4w = 0 \end{cases}$$

6 逆行列

n 次正方行列 A の逆行列の求め方について考える. まず, A が逆行列をもつための条件を整理しておく.

定理 6.1. n 次正方行列 A について, 次の条件はすべて同値である.

- (1) A は正則行列である,
- (2) $\text{rank } A = n$,
- (3) A は行基本変形により, 単位行列 E_n に変形される,
- (4) A は基本行列の積として表される.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) A を行基本変形により階段行列 B に変形したとする. 定理 1.3 から,

$$B = PA \tag{2.5}$$

となる正則行列がある. A が正則ならば B も正則でなければならず, よって B の階数は n となる. ゆえに $\text{rank } A = n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\text{rank } A = n$ なら, A は行基本変形により階数 n の階段行列 B に変形される. ここで, n 次正方行列 B が階数 n の階段行列ならば, $B = E_n$ でなければならない. よって (3) が成り立つ.

(3) $\Rightarrow$ (4) 定理 1.1 (1) による.

(4) $\Rightarrow$ (1) 定理 1.2 による. $\square$

例 6.1. 次の行列は正則であるか?:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

解. (1) 行基本変形により,

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times 2, 3\text{行}+2\text{行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{1\text{行}+3\text{行}\times(-3), 2\text{行}+3\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $\text{rank } A = 3$ で, A は正則である.

(2) についても同様に行基本変形により $\text{rank } B = 2$ がわかるので B は正則でない.

定理 6.2. n 次正方行列 A が何回かの行基本変形によって単位行列 E_n に変形されるとする. このとき, 同じ行基本変形によって E_n は逆行列 A^{-1} に変形される.

証明. 行基本変形が k 回行われたとし, i 回目の行基本変形に定理 1.1 (1) によって対応する基本行列を M_i とする ($i = 1, \dots, k$). また, これらの行基本変形により E_n が B に変形されるとする. このとき,

$$E_n = M_k \cdots M_1 A,$$

$$B = M_k \cdots M_1 E_n = M_k \cdots M_1.$$

よって,

$$BA = E_n.$$

前定理により A は正則行列である. よって上の式の両辺に右から A^{-1} をかけて,

$$B = A^{-1}.$$

$\square$

例 6.2. 例 6.1 (1) の A について, それに対する解で行った行基本変形を E_3 に対し行うと, 次のようになる:

$$E_3 \xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times 2, 3\text{行}+2\text{行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+3\text{行}\times(-3), 2\text{行}+3\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

実際に逆行列を求めるには, A と E_n を並べた $(n, 2n)$ 行列 $(A \ E_n)$ に行基本変形を施して, A を E_n に変形してみればよい.

例 6.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めてみる.

$$(A \ E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-1), 3\text{行}+1\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\leftrightarrow 3\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}+3\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これから,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 6.1. 次の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

第 2 章 練 習 問 題

1. 次の行列の階数を求めよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 9 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

(5)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(6)
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -6 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(7)
$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

(8)
$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$$

(9)
$$\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \end{pmatrix}$$

2. 次の連立 1 次方程式を解け.

(1)
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x - 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} -2x + 2y - z - w = 3 \\ 2x + y + 3z + w = 6 \\ x + 3y + z + 2w = 9 \\ -3x - y + 4z - 3w = -6 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 1 \\ 2y + 4z = -2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} 3x - 6y + 9z = 6 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ -2x + 4y - 6z = -4 \end{cases}$$

(5)
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -4x + y + 5z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

(6)
$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 2w - u = 0 \\ 3x + 6y + 3z + 9w - 6u = 0 \\ 2x + 4y + 7z + w + u = 0 \end{cases}$$

(7)
$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 12 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - z = -1 \end{cases}$$

(8)
$$\begin{cases} x + 2y + 2z - 3w = -2 \\ 2x + 4y + z = 2 \\ 3x + 6y + z + w = 4 \\ 4x + 8y + 3z - 2w = 2 \end{cases}$$

(9)
$$\begin{cases} 2y + 3z = 5 \\ 2x + 4y + 2z = 8 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + 3y + z = 7 \end{cases}$$

(10)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ x + 8z = 0 \end{cases}$$

3. 次の連立1次方程式が解をもつために a_1, a_2, a_3 の間に成り立つ関係式を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = a_1 \\ 2x \quad \quad + 2z = a_2 \\ x + y + 2z = a_3 \end{cases}$$

4. 次の連立1次方程式が解をもつように a, b を定め, 解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + w = a \\ x - 9y - 8z + 5w = -4 \\ 4x - 11y - 7z + 5w = -1 \\ x + y + 2z - w = b \end{cases}$$

5. 次の連立1次方程式の解に含まれる任意定数の個数を調べよ.

$$(1) \begin{cases} x + 3y + z + w = 0 \\ x + 5y - z - w = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 9x - 3y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ 6x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

6. 次の行列の逆行列を求めよ

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第3章

行列式

この章では、正方行列に対して定義される行列式を論ずる。逆行列の存在条件や、それを直接に求める公式が示される。

1 順列

行列式を定義するための準備として、ここでは順列について説明する。1 から n までの n 個の整数を、任意の順序で1列に並べたものを、 n 個の数の順列という。 n 個の数の順列は、 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ のように表す。たとえば、 $\langle 3, 2, 4, 1 \rangle$ は4個の数の順列である。 n 個の数の順列は全部で $n!$ 個ある。

n 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ において

$$i < j \quad \text{かつ} \quad p_i > p_j$$

であるとき、2数の組 (p_i, p_j) を **転倒** という。たとえば、 $\langle 3, 2, 4, 1 \rangle$ の順列には

$$(3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1)$$

の4個の転倒が含まれている。 n 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ が偶数個の転倒を含むとき、この順列を**偶順列**といい、奇数個の転倒を含むとき、**奇順列**という。 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ が偶順列であるか奇順列であるかに従って、その符号 $\text{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ を、1 または -1 と定める。たとえば、 $\langle 3, 2, 4, 1 \rangle$ は偶順列なので

$$\text{sgn}\langle 3, 2, 4, 1 \rangle = 1$$

である。

例 1.1. 5 個の数の順列 $\langle 2, 1, 5, 3, 4 \rangle$ に含まれる転倒は

$$(2, 1), (5, 3), (5, 4)$$

の3個であるので

$$\text{sgn}\langle 2, 1, 5, 3, 4 \rangle = -1.$$

問 1.1. 次の順列の符号を求めよ.

- (1) $\langle 3, 4, 1, 2 \rangle$ (2) $\langle 4, 5, 3, 1, 2 \rangle$
 (3) $\langle 1, 6, 3, 4, 5, 2 \rangle$ (4) $\langle 3, 5, 7, 6, 2, 1, 4 \rangle$

n 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ において, 2つの数 p_i と p_j を入れかえることを互換といい, $p_i \leftrightarrow p_j$ で表す. たとえば

$$\langle 3, 4, 1, 2 \rangle \xrightarrow{3 \leftrightarrow 1} \langle 1, 4, 3, 2 \rangle \xrightarrow{4 \leftrightarrow 2} \langle 1, 2, 3, 4 \rangle,$$

$$\langle 2, 3, 5, 1, 4 \rangle \xrightarrow{2 \leftrightarrow 1} \langle 1, 3, 5, 2, 4 \rangle \xrightarrow{3 \leftrightarrow 2} \langle 1, 2, 5, 3, 4 \rangle \xrightarrow{5 \leftrightarrow 3} \langle 1, 2, 3, 5, 4 \rangle \xrightarrow{5 \leftrightarrow 4} \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle.$$

この例からも明らかなように, 次の定理が成り立つ.

定理 1.1. n 個の数の順列 $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ は, 何回かの互換によって, $\langle 1, \dots, n \rangle$ にすることができる. 逆にどのような順列も, $\langle 1, \dots, n \rangle$ に何回かの互換を行うことにより得られる.

定理 1.2. n 個の数の順列 $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ に, 2数 p_k と p_ℓ ($k < \ell$) の互換を行うと, 順列の偶・奇が入れかわる. よって

$$\operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_\ell, \dots, p_k, \dots, p_n \rangle = -\operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_k, \dots, p_\ell, \dots, p_n \rangle.$$

証明. $a = p_k, b = p_\ell$ とし, a と b の互換を行ったときの転倒の増減について考える. $a > b$ の場合もほぼ同様に考えられるので, 以下では $a < b$ のときのみを考える. p_i ($k < i < \ell$) のうちで,

- ・ a より小さいものは r 個,
- ・ a と b の間にあるものは s 個,
- ・ b より大きいものは t 個

であるとする. すると, a と b の互換による転倒の増減は, 次の通りである (ただし, 下で $*$ は a, b 以外の数を表す).

- ・ $(*, a)$ の形の転倒は, $s + t$ 個増える.
- ・ $(a, *)$ の形の転倒は, r 個減る.
- ・ $(*, b)$ の形の転倒は, t 個減る.
- ・ $(b, *)$ の形の転倒は, $r + s$ 個増える.
- ・ (b, a) が増える.

ゆえに, 全部で

$$(s + t) - r - t + (r + s) + 1 = 2s + 1$$

だけ転倒が増える. $2s + 1$ は奇数だから, 定理は示された. $\square$

定理 1.3. n 個の数の順列で, 偶順列と奇順列の個数は同数で, それぞれ $\frac{n!}{2}$ 個である.

証明. 偶順列の個数を a , 奇順列の個数を b とする. 偶順列に, たとえば 1 と 2 の互換を行えば奇順列になるから, $a \leq b$. 同様に, 奇順列に 1 と 2 の互換を行えば偶順列になるから, $a \geq b$. 従って $a = b$. $a + b = n!$ であるから, 定理が示された. $\square$

例 1.2. 3 個の数の偶順列は

$$\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 2, 3, 1 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle$$

奇順列は

$$\langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 3, 2, 1 \rangle, \langle 1, 3, 2 \rangle$$

で, どちらも $\frac{3!}{2} = 3$ だけである.

定理 1.4.

(1) 順列 $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ に互換を k 回行って, 順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ が得られるならば,

$$\operatorname{sgn} \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = (-1)^k.$$

(2) 順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ に互換を k 回行って, 順列 $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ が得られるならば,

$$\operatorname{sgn} \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = (-1)^k.$$

証明. (1) 定理 2 により, 互換を 1 回行うごとに順列の符号が変わる. よって

$$\operatorname{sgn} \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = (-1)^k \operatorname{sgn} \langle 1, 2, \dots, n \rangle = (-1)^k.$$

(2) も同様. $\square$

例 1.3. 5 個の数の順列 $\langle 2, 1, 5, 3, 4 \rangle$ の符号を求める.

$$\langle 2, 1, 5, 3, 4 \rangle \xrightarrow{2 \leftrightarrow 1} \langle 1, 2, 5, 3, 4 \rangle$$

$$\xrightarrow{5 \leftrightarrow 3} \langle 1, 2, 3, 5, 4 \rangle \xrightarrow{5 \leftrightarrow 4} \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$$

よって $\operatorname{sgn} \langle 1, 2, 5, 3, 4 \rangle = (-1)^3 = -1$.

問 1.2. 定理 1.4 にもとづいて, 問 1.1 の各順列の符号を求めよ.

次の定理は, 正方行列 A について, A の行列式と ${}^t A$ の行列式とが等しいことを示すときに用いる.

定理 1.5. n 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ が与えられたとし、これらの数の組

$$(1) \quad (1, p_1), (2, p_2), \dots, (n, p_n)$$

を作る. これらの数の組を、各組の 2 番目の数が $1, 2, \dots, n$ の順になるように並べかえると、

$$(2) \quad (q_1, 1), (q_2, 2), \dots, (q_n, n)$$

となるとする. このとき、

$$\operatorname{sgn}\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = \operatorname{sgn}\langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle.$$

証明. 順列 $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ に互換を k 回行って $\langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle$ が得られるとすると、定理 1.4 から

$$\operatorname{sgn}\langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle = (-1)^k.$$

いま、 a と b を入れかえるという互換に応じて、数の組 $(a, *)$ と $(b, *)$ を入れかえるという操作を順に考えて、 k 回の互換に対応するこの操作を順に定理 1.5 の (1) に行えば、(2) が得られる. ゆえに、順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ に k 回の互換を施すと、順列 $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ になる. 従って定理 1.4 から

$$\operatorname{sgn}\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = (-1)^k. \quad \square$$

2 行列式の定義

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式について考える. n 個の数の順列 $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ について、

$$\operatorname{sgn}\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

という量を考える. これは順列の符号と A の $(1, p_1)$ 成分, $(2, p_2)$ 成分, $\dots$, (n, p_n) 成分を掛け合わせたものである. この量をすべての順列について考え加えたものを、 A の行列式といい、 $|A|$ あるいは $\det A$ などとかく. すなわち

$$|A| = \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

A の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とかくこともある. 以下、この節では $n = 2, 3, 4$ のときに、定義に従って行列式 $|A|$ について考えてみる. まず、2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式について考える. 定義に

より

$$|A| = \sum_{\langle p_1, p_2 \rangle} \text{sgn}\langle p_1, p_2 \rangle a_{1p_1} a_{2p_2}.$$

いま、2個の数の順列は $\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle$ の2つであるから、

$$\begin{aligned} |A| &= \text{sgn}\langle 1, 2 \rangle a_{11} a_{22} + \text{sgn}\langle 2, 1 \rangle a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

次に、3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式について、定義により、

$$|A| = \sum_{\langle p_1, p_2, p_3 \rangle} \text{sgn}\langle p_1, p_2, p_3 \rangle a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

例 1.2 から

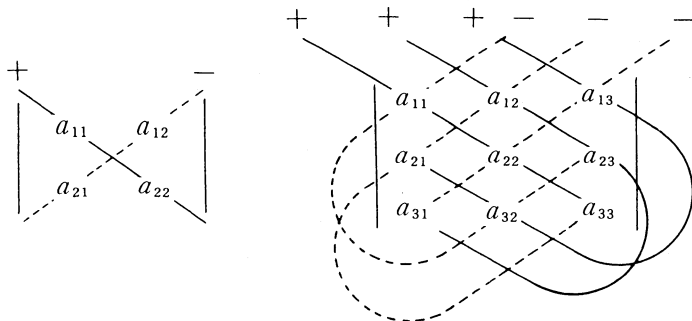
$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

右辺は、下図において、各矢印の上の成分の積をつくり、表示されている符号をつけて加えたものと見ると、覚えやすい (サラスの方法)。



例 2.1. (1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = -10.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 7 \cdot 0 = 55.$

4 次以上の正方行列の行列式については、サラスの方法のような簡明な規則はない。通常は、次節以降で説明する行列式の性質を用いて計算される。ここでは、行列式の定義式に慣れるために、簡単な行列について行列式を計算してみる。

例 2.2. $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ のときの行列式 $|A|$ を計算してみる。定義から

$$|A| = \sum_{\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle} \text{sgn} \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}.$$

ここで、和は $4! = 24$ 個の順列についての和であるが、 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} \neq 0$ となる順列 $\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$ は $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle, \langle 3, 2, 4, 1 \rangle$ の 2 つのみである。ゆえに、

$$\begin{aligned} |A| &= \text{sgn} \langle 1, 2, 3, 4 \rangle a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} + \text{sgn} \langle 3, 2, 4, 1 \rangle a_{13} a_{22} a_{34} a_{41} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 264. \end{aligned}$$

問 2.1. 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

問 2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ の値を、定義に従って求めよ。

3 行列式の性質 (1)

次の定理から始める。

定理 3.1. n 次正方行列 A について、 $|A| = |{}^t A|$ 。

証明. $A = (a_{ij}), {}^t A = (b_{ij})$ とすると $b_{ij} = a_{ji}$ で、よって

$$\begin{aligned} |{}^t A| &= \sum_{\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle} \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle} \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}. \end{aligned}$$

ここで積の順番をかえて

$$a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = a_{1 q_1} a_{2 q_2} \cdots a_{n q_n}$$

とすると、定理 1.5 から、

$$\operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle = \operatorname{sgn}\langle q_1, \dots, q_n \rangle.$$

また、 $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ がすべての順列を動くとき、 $\langle q_1, \dots, q_n \rangle$ もすべての順列を動く。ゆえに、

$$|{}^t A| = \sum_{\langle q_1, \dots, q_n \rangle} \operatorname{sgn}\langle q_1, \dots, q_n \rangle a_{1 q_1} a_{2 q_2} \cdots a_{n q_n} = |A|. \quad \square$$

定理 3.2. (1) A の第 j 列ベクトルが 2 つの列ベクトルの和 $\mathbf{a}'_j + \mathbf{a}''_j$ であれば、 $|A|$ は第 j 列ベクトルが $\mathbf{a}'_j$ である行列式と $\mathbf{a}''_j$ である行列式の和になる。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} + a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} + a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) A の第 j 列を c 倍した行列の行列式は $c \cdot |A|$ に等しい。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3) A の相異なる 2 つの列を入れ換えた行列の行列式は、 $-|A|$ に等しい。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{(i)}{a_{1j}} & \cdots & \overset{(j)}{a_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{(i)}{a_{1i}} & \cdots & \overset{(j)}{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意. 上の定理で、「列」であるところをすべて「行」で置き換えても、主張は正しい。

証明. 上の注意を踏まえて、証明は「行」について行う。(1) 定義 から

$$|A| = \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1 p_1} \cdots (a'_{j p_j} + a''_{j p_j}) \cdots a_{n p_n}$$

であることに注意する。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1 p_1} \cdots a'_{j p_j} \cdots a_{n p_n} \\ &\quad + \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1 p_1} \cdots a''_{j p_j} \cdots a_{n p_n} = (\text{右辺}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (左辺)} &= \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} \cdots (c \cdot a_{jp_j}) \cdots a_{np_n} \\
 &= c \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = \text{(右辺)}.
 \end{aligned}$$

(3) 順列 $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ に p_i と p_j の互換を施した順列を $\langle q_1, \dots, q_n \rangle$ とする.

$\text{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle = -\text{sgn} \langle q_1, \dots, q_n \rangle$ で, また $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ がすべての順列を動くとき $\langle q_1, \dots, q_n \rangle$ もすべての順列を動くから,

$$\begin{aligned}
 \text{(左辺)} &= \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \\
 &= - \sum_{\langle q_1, \dots, q_n \rangle} \text{sgn} \langle q_1, \dots, q_n \rangle a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} \\
 &= -|A| \quad \square
 \end{aligned}$$

例 3.1. 上の定理により,

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+5 & 2+3 & 3+1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}, \\
 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}, \\
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

が成り立つ. これらの等式はサラスの方法によって行列式の値を計算して確かめることもできる.

注意. n 次元列ベクトルとは $(n, 1)$ 行列のことであるから, その和は行列の和の特別な場合としてすでに定義されている. すなわち

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{ならば} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

4 行列式の性質 (2)

この節では、前節の定理を再確認してその系を導き、これらの性質の使い方を例で見る。

(m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ を表すのに、 A の第 j 列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ をたとえばひとつの文字 $\mathbf{a}_j$ で表して、

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$$

のようにかくことがある。また、 A の第 i 行ベクトル $(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ をたとえばひとつの文字 $\mathbf{b}_i$ で表して、

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}$$

とかくことがある。これらの記法によれば、前節の定理 3.2 (1),(2),(3) は次のようになる。

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}'_j + \mathbf{a}''_j \cdots \mathbf{a}_n)$$

$$= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}'_j \cdots \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}''_j \cdots \mathbf{a}_n)$$

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) = c \cdot \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n)$$

$$(*) \quad \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n)$$

$$= -\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n)$$

ただし、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は n 次元列ベクトルである。

定理 4.1. 正方行列 A において、2つの列 (行) が等しければ、 $|A| = 0$ である。

証明. $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ とし、 $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ であったとする。(*) から

$$|A| = -|A|,$$

よって、 $|A| = 0$ 。行が等しいときについても同様である。 $\square$

定理 4.2. n 次正方行列の 1 つの列 (あるいは行) に, 他の列 (あるいは行) の c 倍を加えても, 行列式の値は変わらない. すなわち

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n).$$

また

$$\det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + cb_j \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cdots (i) \\ \cdots (j) \end{matrix}$$

ただし, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は n 次元列ベクトル, $b_1, \dots, b_n$ は n 次元行ベクトルである.

証明. 定理 3.2 を順番に使うと

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \cdots c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) + c \cdot \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) = (\text{右辺}). \quad \square \end{aligned}$$

例 4.1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

問 4.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 3 \\ x^2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$ となる x を求めよ.

問 4.2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$ を例 4.1 と同様に因数分解してみよ.

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ において

$$i > j \implies a_{ij} = 0$$

であるとき, A を上三角行列という. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

また

$$i < j \implies a_{ij} = 0$$

であるとき, A を下三角行列という. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

例 4.2. $A = (a_{ij})$ が上三角行列であるときは

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

A が下三角行列であるときも, 同じ式が成り立つ.

証明. 行列式の定義から

$$|A| = \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

いま, $i > j$ なら $a_{ij} = 0$ となっているから, $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \neq 0$ なら

$$1 \leq p_1, 2 \leq p_2, \dots, n \leq p_n$$

で, このとき $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ となっている. ゆえに

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \quad \square$$

正方行列は行基本変形により上三角行列に変形することができる (正方行列の場合, 階段行列も上三角行列の一種であるから). 行列の行基本変形により行列式がどのように影響されるかがわかるので, 行列式は行基本変形により行列を上三角行列に変形することにより計算できる (後に, もっと一般的な行列式の計算方法を学ぶ).

例 4.3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -11 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -28 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -39 \end{vmatrix} = 39.$$

最初の等号: 4行 + 1行 $\times (-3)$, 2番目の等号: 3行 + 2行 $\times (-1)$, 4行 + 2行 $\times (-3)$,
3番目の等号: 4行 + 4行 $\times (-11)$, 4番目の等号: 4行 + 4行 $\times (11)$.

問 4.3. 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

5 行列式の乗法性

例 5.1. 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ について

$$AB = \begin{pmatrix} ax + bz & cx + dz \\ ay + bu & cy + du \end{pmatrix}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} |AB| &= (ax + bz)(cy + du) - (ay + bu)(cx + dz) \\ &= (ad - bc)(xu - yz) = |A||B|. \end{aligned}$$

この性質は実は一般の n 次正方行列についても成り立つ. そのことを見るのが, この節の主目的である.

補題 5.1. $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ を n 次正方行列とし, $\langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ を n 個の数の順列とする. このとき,

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{a}_{p_1} \ \mathbf{a}_{p_2} \ \cdots \ \mathbf{a}_{p_n}) \\ &= \operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle \det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

証明. 順列 $\langle 1, \dots, n \rangle$ が, k 回の互換によって, 順列 $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ になるとすると

$$\operatorname{sgn}\langle p_1, \dots, p_n \rangle = (-1)^k.$$

一方

$$\det(\mathbf{a}_{p_1} \ \mathbf{a}_{p_2} \ \cdots \ \mathbf{a}_{p_n}) = (-1)^k \det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n).$$

よって補題 5.1 が成り立つ。□

注意. 行ベクトルの並べかえについても, 同様に成り立つ.

定理 5.2. 2つの n 次正方行列 A, B について,

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

証明. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とする. AB の第 i 行ベクトルは

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k1} \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k2} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kn} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{k1} \ b_{k2} \ \cdots \ b_{kn}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \mathbf{b}_k. \end{aligned}$$

よって

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} \mathbf{b}_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} \mathbf{b}_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} \mathbf{b}_k \end{pmatrix}$$

であり,

$$|AB| = \sum_{p_1, \dots, p_n=1}^n a_{1p_1} \cdots a_{np_n} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{p_1} \\ b_{p_2} \\ \vdots \\ b_{p_n} \end{pmatrix}.$$

ここで, $p_1, \dots, p_n$ の中に同じものがあれば $\det \begin{pmatrix} b_{p_1} \\ b_{p_2} \\ \vdots \\ b_{p_n} \end{pmatrix} = 0$ であるから, 和は順列 $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ についての和としてよい. よって補題 5.1 から

$$|AB| = \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \operatorname{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} |B| = |A| \cdot |B|.$$

□

例 5.2. 行列の等式

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \beta b & -\alpha b - \beta a \\ \beta a + \alpha b & -\beta b + \alpha a \end{pmatrix}$$

から

$$(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = (\alpha a - \beta b)^2 + (\alpha b + \beta a)^2$$

がわかる.

例 5.3.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & bc & ac \\ bc & a^2 + c^2 & ab \\ ac & ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = B^2$$

$$\text{ただし } B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \text{ で}$$

$$|B| = 2abc.$$

ゆえに,

$$|A| = 4a^2b^2c^2.$$

例 5.4. ${}^tAA = E$ となる正方行列 A を 直交行列 という. たとえば,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

などである. 直交行列について,

$$|A| = \pm 1.$$

例 5.5. ${}^tA = -A$ となる正方行列 A を 交代行列 という. 奇数次の交代行列の行列式は 0 である.

6 展開公式

行列式を計算する際に基本的な役割を果たす, 展開公式について学ぶ. これは, 理論的にも重要である.

補題 6.1.

$$(1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ について, } |A| = a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}.$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ について, } |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

証明. (1) 行列式の定義から,

$$|A| = \sum_{\langle p_1, \dots, p_n \rangle} \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_n \rangle a_{1p_1} \cdots a_{np_n}.$$

いま, $p_n \neq n$ なら $a_{np_n} = 0$. ゆえに, 上の和は $\langle p_1, \dots, p_{n-1}, n \rangle$ の形の順列についての和としてよい. また転倒の個数を考えて,

$$\text{sgn} \langle p_1, \dots, p_{n-1}, n \rangle = \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_{n-1} \rangle.$$

よって

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\langle p_1, \dots, p_{n-1} \rangle} \text{sgn} \langle p_1, \dots, p_{n-1} \rangle a_{1p_1} \cdots a_{n-1p_{n-1}} a_{nn} \\ &= a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 行と列の入れかえで (1) の形になる. $\square$

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ において, 第 i 行と第 j 列を除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A_{ij} の行列式 $\det A_{ij}$ を A の (i, j) 小行列式という. さらに

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

を行列 A の (i, j) -余因子 という.

定理 6.2. (展開公式). $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする.

(1) $i = 1, \dots, n$ について

$$\det A = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}.$$

(2) $j = 1, \dots, n$ について

$$\det A = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}.$$

証明. (2) のみを証明する. (1) は (2) と定理 3.1 から得られる. $j = 1$ とする. 定理 3.2 (1) を反復利用して

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

補題 6.1 により

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 j 項はその第 j 行をその上の行と交換して順次に第 1 行に移してから, 上と同様に考えれば $(-1)^{j-1} a_{1j} \det A_{1j} = a_{1j} \tilde{a}_{1j}$ となる. これから $\det A = a_{11} \tilde{a}_{11} + a_{12} \tilde{a}_{12} + \cdots + a_{1n} \tilde{a}_{1n}$. 一般の j については

$$\det A = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

として, この和の第 k 項 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ を計算する. 行の交換を $(k-1)$ 回, 列の

交換を $(j-1)$ 回行えば,

$$\text{第 } k \text{ 項} = (-1)^{k+j} \begin{vmatrix} a_{kj} & 0 \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & A_{kj} & \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}| = a_{kj} \tilde{a}_{kj}$$

が得られ, $\det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} \tilde{a}_{kj}$ が得られる. $\square$

例 6.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を第 1 行について展開すると,

$$|A| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

サラスの方法により右辺を計算して,

$$|A| = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 18 + (-22) = -67.$$

行列式の実際の計算においては, 行列式の性質を用いて行列式を簡単な形にしてから展開公式を用いることが多い.

例 6.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

問 6.1. 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ -10 & -8 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

7 展開公式の応用

前節の展開公式の応用として, 余因子を用いた逆行列の表示と連立 1 次方程式に関するクラメル公式について説明する. 記号 $\delta_{k\ell}$ を,

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & (k = \ell \text{ のとき}) \\ 0 & (k \neq \ell \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める. $\delta_{k\ell}$ を クロネッカーのデルタ という.

定理 7.1. $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とし, $\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子とする. $k, \ell = 1, 2, \dots, n$ に対して次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $a_{k1}\tilde{a}_{\ell 1} + a_{k2}\tilde{a}_{\ell 2} + \dots + a_{kn}\tilde{a}_{\ell n} = \delta_{k\ell} \det A.$

(2) $a_{1k}\tilde{a}_{1\ell} + a_{2k}\tilde{a}_{2\ell} + \dots + a_{nk}\tilde{a}_{n\ell} = \delta_{k\ell} \det A.$

証明. (2) も同様であるので, (1) のみ示す. $k = \ell$ ならば前節の展開公式の主張である. $k \neq \ell$ とし, A の第 ℓ 行を第 k 行でおきかえた行列 A' を考える.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots (k) \\ \cdots (l) \end{matrix}$$

明らかに $|A'| = 0$. 一方で, $|A'|$ を第 ℓ 行で展開すれば,

$$|A'| = a_{k1}\tilde{a}_{\ell 1} + a_{k2}\tilde{a}_{\ell 2} + \cdots + a_{kn}\tilde{a}_{\ell n}.$$

ゆえに, 右辺は 0 に等しい. $\square$

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, その (i, j) 余因子 $\tilde{a}_{ji}$ を (i, j) 成分とする $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ji})$ を, A の余因子行列 という.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

である.

例 7.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ならば

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

よって,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

証明. (1) は

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とかける. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

ゆえに,

$$x_j = \frac{1}{|A|} (\tilde{a}_{1j} b_1 + \tilde{a}_{2j} b_2 + \cdots + \tilde{a}_{nj} b_n).$$

右辺の分子は (2) の右辺の分子の行列式を第 j 列について展開したものである. よって, (2) が成り立つ. $\square$

Point. j 番目の未知数 x_j を求めたいときは, 第 j 列を取り替えればよい.

例 7.3. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2z = -1 \end{cases}$ の係数行列は, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ で,
 $|A| = 2$. ゆえに, 方程式の解は

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-12}{2} = -6, y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{23}{2}, z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{17}{2}.$$

問 7.2. 次の連立 1 次方程式を $\begin{cases} 3x - 2y + z = 11 \\ 2x + y + 3z = 12 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$ をクラームルの公式を用いて解け.

問 7.3. 次の連立 1 次方程式をみたす z を求めよ.

$$\begin{cases} x + 4y + z + 4w = 0 \\ 2x + y + 3z + 5w = 0 \\ 6x + 2y + 3z + 7w = 3 \\ 3x \quad + 9z + 5w = 1 \end{cases}$$

8 小行列式と行列の階数

行列の階数を行列式によって解釈することもできる. (m, n) -行列 A に対して, A の r 個の行と r 個の列を取り出して作った A の r 次正方行列の行列式を, r 次小行列式という. A の r 次小行列式は全部で ${}_m C_r \cdot {}_n C_r$ 個ある.

例 8.1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 12 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ の 3 次の小行列式は,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 12 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 12 & -7 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 12 & -2 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

すべて 0 である. 2 次の小行列式は

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 12 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \dots$$

などで, 全部で ${}_3 C_2 \cdot {}_4 C_2 = 18$ だけある.

(m, n) 行列 A について, A の 0 でない小行列式の次数のうちで最大のものを $s(A)$ で表す. 例 6.1 の A については $s(A) = 2$ である.

補題 8.1. A が階数 r の階段行列であるとき, $s(A) = r$.

証明. A が (5.1) の形の階段行列であるとする. A の第 1 行から第 r 行と第 k_1 列, 第 k_2 列, ..., 第 k_r 列を取り出して作った行列は r 次単位行列で, その行列式は 1 であるから, $s(A) \geq r$.

また, A から r 個より多い行ベクトルを取り出せば, 行ベクトルのうち少なくとも 1 つは零ベクトルになるから, A の r 次より大きい次数の小行列式はすべて 0 である. よって $s(A) \leq r$. $\square$

補題 8.2. 行列 A に基本変形を施して行列 B が得られたとすると, $s(A) = s(B)$ である.

証明. 基本変形が [行 1], [行 2], [列 1], [列 2] のどれかであるとき, B の d 次小行列式は, A の d 次小行列式の定数倍である. 基本変形が [行 3] または [列 3] のときには, B の d 次小行列式は

$$c_1 \Delta_1 + c_2 \Delta_2$$

(c_1, c_2 は定数, Δ_1, Δ_2 は A の d 次小行列式) の形である.

$d > s(A)$ のとき, A の d 次小行列式はすべて 0 であるから, 上のことから B の d 次小行列式もすべて 0 となる. よって

$$s(B) \leq s(A).$$

基本変形によって B を A に変形することもできるから,

$$s(A) \leq s(B).$$

ゆえに, $s(A) = s(B)$. $\square$

定理 8.3. (m, n) 行列 A について, $\text{rank } A = s(A)$. すなわち, A の階数は, A の 0 でない小行列式の最大次数に等しい.

証明. 何回かの行基本変形により, A が階段行列 B に変形されたとし, B の階数を r とする. このとき, 階数の定義から,

$$\text{rank } A = r.$$

8.1 から, $s(B) = r$. 補題 8.2 から $s(A) = s(B)$. ゆえに, $\text{rank } A = s(A)$. $\square$

例 8.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ について,

$|A| = 0$, また, A のひとつの 3 次小行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0.$$

よって, $\text{rank } A = 3$.

問 8.1. 次の行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

問 8.2. (m, n) 行列 A について, A の r 次小行列式がすべて 0 ならば, A の $r+1$ 次小行列式もすべて 0 であることを示せ. ただし, $r+1 \leq m, r+1 \leq n$ とする.

第 3 章 練習問題

1. 次の順列の符号を求めよ.

$$(1) \langle 2, 3, 4, 1 \rangle \quad (2) \langle 4, 3, 1, 2 \rangle \quad (3) \langle 4, 5, 2, 1, 3 \rangle$$

$$(4) \langle 2, 5, 4, 3, 1 \rangle \quad (5) \langle 2, 3, 6, 1, 4, 5 \rangle \quad (6) \langle n, n-1, n-2, \dots, 2, 1 \rangle$$

2. 次の行列の行列式を計算せよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ -10 & -8 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(5)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(6)
$$\begin{pmatrix} 11 & -12 & 13 & -14 \\ -15 & 16 & -17 & 18 \\ 19 & -20 & 21 & -22 \\ -23 & 24 & -25 & 26 \end{pmatrix}$$

(7)
$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 \end{pmatrix}$$

(9)
$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 0 & & 2 \\ & & 3 & \\ & & & 0 \\ n-1 & & & \end{pmatrix}$$

3. 次の行列の行列式を計算せよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ca & bc \\ ca & b^2 + c^2 & ab \\ bc & ab & c^2 + a^2 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & d & d & d \\ a & b & e & e \\ a & b & c & f \end{pmatrix}$$

(5)
$$\begin{pmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{pmatrix}$$

(6)
$$\begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(7)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ b & b & x & b \\ c & c & c & x \end{pmatrix}$$

(8)
$$\begin{pmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{pmatrix}$$

4. 定理 7.2 を用いて次の行列の逆行列を求めよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(5)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(6)
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(7)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

(9)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. 次の等式を証明せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad (\text{これをヴァンデルモンドの行列式という.})$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n$$

6. クラームルの公式を用いて次の連立1次方程式を解け.

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y-4z=-4 \\ 2x-y+z=2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x+2y+5z=9 \\ 4x+3z=-5 \\ 2x-3y=-13 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} -3x+9y+6z=51 \\ 9y+4z=32 \\ 8x-2y+6z=24 \end{cases} \\ (4) \begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 3x+6y+4z=7 \\ 2x+7y+2z=9 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 3x+6y+z=4 \\ 4x+9y+2z=3 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 2x+y+4z=-1 \\ 3x+2y+z=7 \\ 4x+3y+2z=7 \end{cases} \\ (7) \begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=4 \\ x+3y+5z=3 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 2x+7y-3z=13 \\ 3x+8y+2z=38 \end{cases} \quad (9) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{4} \\ x+y+z=3 \end{cases} \end{aligned}$$

7. 平面上の3点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ が1直線上にあるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であることを示せ.

8. 平面上の3直線

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

が1点で交わるか, または平行であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

であることを示せ.

第4章

固有値と固有ベクトル

この章では、自然科学の広い分野で用いられている固有値問題を取り上げる。正方行列の固有値と固有ベクトルを用いて、行列の対角化を調べる。

1 1次独立と1次従属

すべての成分が0のベクトルを0とかき、零ベクトルと呼んだ。

定義 1.1. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ を n 次元ベクトルとし、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ を実数とする。

- (1) ベクトル $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の 1次結合 または 線形結合 という。
- (2) “ $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ ならば $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ ” が成り立つとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は 1次独立 または 線形独立 であるという。
- (3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ が 1次独立にならないとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は 1次従属 または 線形従属 であるという。すなわち、少なくとも1つは0でない $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ に対して

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

が成り立つとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は 1次従属 である。

例 1.1. (1) $k=1$ の場合. ベクトル $\mathbf{a}$ が 1次独立 $\Leftrightarrow \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. $\mathbf{a}$ が 1次従属 $\Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(2) $k=2$ の場合. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が 1次従属 $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の一方が他方のスカラー倍に等しい。実際 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が 1次従属とすれば、ともに0にならない $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ があって、

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}.$$

$\lambda_1 \neq 0$ ならば, $\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2$, $\lambda_2 \neq 0$ ならば, $\mathbf{a}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathbf{a}_1$ となる. 逆に $\mathbf{a}_1$ が $\mathbf{a}_2$ のスカラー倍とすれば, $\mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{a}_2$ だから $1 \cdot \mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ となるから, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は 1 次従属である. $\mathbf{a}_2$ が $\mathbf{a}_1$ のスカラー倍となるときも同様.

例 1.2. $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 1, 1)$ は 1 次独立となるかどうか判定してみる. これを解くために, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

とする. これは, $(-\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_3) = \mathbf{0}$ を意味するから, 次の連立方程式が得られる.

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

これを解けば, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. すなわち, (4.1) は $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ のときのみ成り立つ. これは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が 1 次独立であることを示している.

問 1.1. 上の例題において, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ となることを確かめよ.

例 1.3. $\mathbf{R}^4$ の 2 つのベクトルを $\mathbf{b}_1 = (2, -1, 1, -3)$, $\mathbf{b}_2 = \left(-1, \frac{1}{2}, r, \frac{3}{2}\right)$ とする. $r = -\frac{1}{2}$ の場合に限り, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ の一方が他方のスカラー倍となる. これから, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は $r = -\frac{1}{2}$ のとき 1 次従属であり, $r \neq -\frac{1}{2}$ ならば 1 次独立となる.

定理 1.2. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ をベクトルとする.

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の中の少なくとも 1 個が $\mathbf{0}$ ならば $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は 1 次従属である.
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ が 1 次独立ならば, これらの一部分も 1 次独立である.
- (3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ が 1 次従属ならば, これに任意の r 個のベクトルを加えた $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+r}$ も 1 次従属である.

証明. (1) $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ とすれば, $\lambda_i \neq 0$ にとって

$$0\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{a}_i + \dots + 0\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

が成り立つから, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は 1 次従属となる.

(2) は定義から明らかである.

(3) $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ ならば, $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k + 0\mathbf{a}_{k+1} + \dots + 0\mathbf{a}_{k+r} = \mathbf{0}$ となるから, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k+r}$ は 1 次従属となる. $\square$

定理 1.3. ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ について

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}, \quad \lambda_1 \neq 0$$

が成り立つ必要十分条件は、 $\mathbf{a}_1$ が $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の1次結合となることである。

証明. $\lambda_1 \neq 0$ より、 $\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \mathbf{a}_k$ 、すなわち $\mathbf{a}_1$ は $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の1次結合である。逆に、 $\mathbf{a}_1$ が $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の1次結合ならば、 $\mathbf{a}_1 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$ となるから、書き変えて

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}, \quad \lambda_1 = -1 \neq 0$$

が得られる。□

系 1.4. ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ について

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ が1次独立となる必要十分条件は、この中のどのベクトルも残りのベクトルの1次結合とならないことである。
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ が1次従属となる必要十分条件は、この中の少なくとも1つが残りのベクトルの1次結合で表されることである。

定理 1.5. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ を1次独立とし、これに1つのベクトル $\mathbf{a}$ を加えた $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ が1次従属ならば、 $\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の1次結合となる。

証明. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ は1次従属だから、

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k + \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

となり、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda$ の少なくとも1つは0でない。もし $\lambda = 0$ ならば、 $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ となり、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は1次独立であるから、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ 、すなわち、 λ_i, λ のすべては0となり仮定に反する。これから $\lambda \neq 0$ 。定理 1.3 より、 $\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の1次結合となる。□

例 1.4. $\mathbf{R}^3$ において、 $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -3)$, $\mathbf{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2}\right)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -6, 0)$ の3つのベクトルは、 $\mathbf{a}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{a}_3$ となるから、1次従属となる。

問 1.2. 次のベクトルは1次独立であるか1次従属であるかを判定せよ。

- (1) $\mathbf{a} = (-1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$
- (2) $\mathbf{a} = (0, 1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 2, -1)$
- (3) $\mathbf{a} = (3, 7, -3, -9)$, $\mathbf{b} = (1, 3, -1, -3)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1, 2)$
- (4) $\mathbf{a} = (1, -1, 2, 0, 5)$, $\mathbf{b} = (-2, 0, 1, 1, -1)$, $\mathbf{c} = (4, 1, 1, -3, -7)$

2 階数

定義 2.1. $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ を n 次元数ベクトルの集合とする. $a_1, a_2, \dots, a_k$ の中の 1 次独立なベクトルの最大の個数 r を $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ の **階数** といい,

$$r = \text{rank} \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

と表す. すなわち, $a_1, a_2, \dots, a_k$ の中に 1 次独立な r 個のベクトルは存在するが, 任意の $r+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属になるということである.

定義より $\text{rank} \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \leq k$ となる. また $a_1, a_2, \dots, a_k$ が 1 次独立ならば

$$\text{rank} \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = k.$$

例 2.1. R^2 のベクトルの集合 $M = \left\{0, (-1, 2), \left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\}$ を考える. M の中の任意の 2 つのベクトルは 1 次従属である. 例えば, $(-1, 2) = -2\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. ゆえに, $\text{rank } M < 2$. また M は 0 でないベクトル $(-1, 2)$ を含むから, $\text{rank } M \geq 1$. よって, $\text{rank } M = 1$ となる.

例 2.2. R^3 において, $a_1 = (-1, 0, 2), a_2 = (1, 2, 0), a_3 = (-2, 1, 1), a_4 = (2, 1, 1)$ とする. $a_4 = a_1 + a_2 - a_3$ となるから, a_1, a_2, a_3, a_4 は 1 次従属. また, a_1, a_2, a_3 は例 1.2 より 1 次独立となる. ゆえに, $\text{rank} \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 3$ である.

定理 2.2 (階数定理). $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_k$ を n 次元数ベクトルとする. 各 $j = 1, 2, \dots, k$ に対して b_j が $a_1, a_2, \dots, a_m$ の 1 次結合となるならば,

$$\text{rank} \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \geq \text{rank} \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

が成り立つ.

証明. $\text{rank} \{a_1, a_2, \dots, a_m\} = s$ とする. $\text{rank} \{b_1, b_2, \dots, b_k\} > s$ とした時に, 矛盾が生じることを示せばよい.

$a_1, a_2, \dots, a_s$ が 1 次独立であると仮定すると, 定理 1.5 により, $s < k$ について a_k は $a_1, a_2, \dots, a_s$ の 1 次結合として表せる. これから, 各 b_j は $a_1, a_2, \dots, a_s$ の 1 次結合となる.

ここで, $b_1, b_2, \dots, b_s$ が 1 次独立であると仮定する. もし, $a_1, a_2, \dots, a_s$ が $b_1, b_2, \dots, b_s$ の 1 次結合で表現される事が示されれば, 各 b_j が $b_1, b_2, \dots, b_s$ の 1 次結合で表現されることが分かり, $\text{rank} \{b_1, b_2, \dots, b_k\} = s$ となり, $\text{rank} \{b_1, b_2, \dots, b_k\} > s$ に矛盾することがわかる. よって $a_1, a_2, \dots, a_s$ が $b_1, b_2, \dots, b_s$ の 1 次結合で表現される事を示せばよい.

いま, $b_1, b_2, \dots, b_s$ が次のように $a_1, a_2, \dots, a_s$ の 1 次結合として表されているとする.

$$\begin{aligned} b_1 &= r_{11}a_1 + r_{12}a_2 + \dots + r_{1s}a_s \\ b_2 &= r_{21}a_1 + r_{22}a_2 + \dots + r_{2s}a_s \\ &\vdots \\ b_s &= r_{s1}a_1 + r_{s2}a_2 + \dots + r_{ss}a_s. \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2) において, ベクトル $a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_s$ をそれぞれ普通の数として考えれば, (4.2) は次のように書き換える事ができる.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \dots & r_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}.$$

ここで, 行列

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \dots & r_{ss} \end{pmatrix}$$

の行基本変形を考える.

$b_1, b_2, \dots, b_s$ は 1 次独立であるので, R にどんな行基本変形を施しても, 全てが 0 となる行はできない. つまり第 2 章定理 3.2 より R は正則であることが分かる. よって, (4.2) の両辺左側から R^{-1} をかければ,

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & q_{s2} & \dots & q_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}.$$

を得る, ここで

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s1} & q_{s2} & \dots & q_{ss} \end{pmatrix}$$

とした. よって, 各 a_i, b_j をそれぞれベクトル a_i, b_j として考えれば

$$\begin{aligned} a_1 &= q_{11}b_1 + q_{12}b_2 + \dots + q_{1s}b_s \\ a_2 &= q_{21}b_1 + q_{22}b_2 + \dots + q_{2s}b_s \\ &\vdots \\ a_s &= q_{s1}b_1 + q_{s2}b_2 + \dots + q_{ss}b_s. \end{aligned}$$

を得る事ができ, $a_1, a_2, \dots, a_s$ が $b_1, b_2, \dots, b_s$ の 1 次結合で表現されることが示された.
□

系 2.3. R^n における任意のベクトルの集合の階数は n 以下である.

証明. $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ を R^n のベクトルの集合とする. また, n 個の数ベクトルの集合 B を

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とする. (これらのベクトルを基本ベクトルと呼び, 第 i 成分が 1 で他の成分が 0 である基本ベクトルを e_i で表す.) $e_1, e_2, \dots, e_n$ は 1 次独立であるから, $\text{rank } B = n$, 各 a_i , $i = 1, 2, \dots, m$ は $e_1, e_2, \dots, e_n$ の 1 次結合であるから, 階数定理 (定理 2.2) より $\text{rank } M \leq n$ となる. □

問 2.1. 次のベクトルの集合の階数を求めよ.

- (1) $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 1)\}$
- (2) $\{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$
- (3) $\{(1, 1, -1), (2, 2, -1), (-3, -3, 3), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

3 行列の階数, 正則性との関係

この節では第 2 章 3 節で学習した行列の階数が, 1 次独立なベクトルの数で表されることを説明しよう.

定義 3.1. A を (m, n) 行列とする.

- (1) A の行ベクトルの集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ において, 1 次独立であるベクトルの最大個数を A の行階数といい, $\text{r-rank } A$ と書く.
- (2) A の列ベクトルの集合 $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\}$ において, 1 次独立であるベクトルの最大個数を A の列階数といい, $\text{c-rank } A$ と書く.

第 2 章 3 節では行列の階数を, 階段行列で定義した. 階段行列における定義と上で述べた定義との関係を以下示そう.

定理 3.2. A を (m, n) 行列とする. B を n 次正則行列, C を m 次正則行列としたとき, 次が成り立つ.

- (1) $\text{r-rank } A = \text{r-rank } AB = \text{r-rank } CA$.
- (2) $\text{c-rank } A = \text{c-rank } AB = \text{c-rank } CA$.

証明. $\text{c-rank } A = \text{r-rank } {}^tA$ より, (1) だけを示せばよい.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \text{ r-rank } A = r$$

とする.

(a) $\text{r-rank } A = \text{r-rank } AB$ を示す.

AB の第 i 行ベクトルは,

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})B = \mathbf{a}_i B.$$

ここで $\text{r-rank } A = r$ より $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ が 1 次独立であると仮定する.

そして $\{\mathbf{a}_1 B, \mathbf{a}_2 B, \dots, \mathbf{a}_r B\}$ が 1 次独立であることを示せばよい.

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 B + \lambda_2 \mathbf{a}_2 B + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r B = \mathbf{0}$$

とすれば, B の正則性より,

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r \\ &= (\lambda_1 \mathbf{a}_1 B + \lambda_2 \mathbf{a}_2 B + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r B) B^{-1} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

よって, 仮定より $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ となるので, $\{\mathbf{a}_1 B, \mathbf{a}_2 B, \dots, \mathbf{a}_r B\}$ は 1 次独立. つまり $\text{r-rank } A \geq \text{r-rank } AB$. よって, 任意の n 次正則行列 B に対して

$$\text{r-rank } A \geq \text{r-rank } AB \geq \text{r-rank } (AB)B^{-1} = \text{r-rank } A \quad (4.3)$$

となり, $\text{r-rank } A = \text{r-rank } AB$ が示された.

(b) $\text{r-rank } A = \text{r-rank } CA$ を示す.

$C = (c_{ij})$ とする. 第 3 章 5 節の定理 16.2 の証明と同様の計算により, CA の第 i 行ベクトルは

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} \mathbf{a}_j$$

となる. よって CA の各行ベクトルが $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ の 1 次結合で表されているので, 階数定理より

$$\text{r-rank } A \geq \text{r-rank } CA.$$

よって, C は正則であるので (4.3) と同様の計算により $\text{r-rank } A = \text{r-rank } CA$ を得る. $\square$

定理 3.3. 任意の行列 A に対して

$$\text{r-rank } A = \text{c-rank } A = \text{rank } A$$

が成り立つ.

証明. $r\text{-rank } A = r$ とする. 第2章3節より, ある正則行列 P, Q を用いて

$$PAQ = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right)$$

とできる. よって定理 3.2 より

$$\begin{aligned} \text{rank } A &= r\text{-rank } PAQ = r\text{-rank } A \\ \text{rank } A &= c\text{-rank } PAQ = c\text{-rank } A \quad \square \end{aligned}$$

定理 3.3 によって, 1 次独立という言葉を用いて行列 A が正則であるための同値条件を得る.

系 3.4. A を n 次正方行列とし, その列ベクトルを $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ とする. 次は同値.

- (1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が 1 次独立.
- (2) $\text{rank } A = n$.
- (3) A は正則

証明は定理 3.3 と 第2章の定理 6.1 より直ちに得られる. $\square$

定理 3.3 によって, ベクトルの 1 次独立性を簡単に判別することができる.

例 3.1.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が 1 次独立かどうか調べてみよう.

$$A = (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とにおいて $\text{rank } A$ を求める.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3\text{行}+2\text{行} \\ 4\text{行}+2\text{行} \times (-2)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \text{ 行} \leftrightarrow 2 \text{ 行} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-1) \\ 4 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times 4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

よって, $\text{rank } A = 2$ となり, $\{a, b, c\}$ は 1 次独立ではない.

4 固有値と固有ベクトル (1)

この節では, 行列の固有値と固有ベクトルの定義と具体的な求め方を紹介する.

定義 4.1 (固有値, 固有ベクトル). A を n 次正方行列とする. このとき, 数 α と n 次元数ベクトル x ($\neq 0$) があって,

$$Ax = \alpha x$$

となるとき, α を A の固有値, x を α に対する A の固有ベクトルという.

例 4.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって, 3 は A の固有値, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 3 に対する A の固有ベクトル. また,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって, 1 は A の固有値, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 に対する A の固有ベクトルである.

定理 4.2. A を n 次正方行列とする. α を A の固有値とし, x, y を α に対する A の固有ベクトルとする. このとき, 任意の数 a, b に対して, $ax + by$ も α に対する A の固有ベクトルとなる.

証明. $A(ax + by) = \alpha(ax + by)$ を示せばよい. x, y が α に対する A の固有ベクトルなので,

$$Ax = \alpha x, \quad Ay = \alpha y.$$

よって,

$$\begin{aligned} A(ax + by) &= aAx + bAy \\ &= a \cdot \alpha x + b \cdot \alpha y = \alpha(ax + by). \quad \square \end{aligned}$$

数 α とベクトル $\mathbf{x}$ が行列 A の固有値と固有ベクトルであることを確認することは、例 4.1 のように定義にしたがって確認すればよい。

次に、行列 A の固有値、固有ベクトルを具体的に求める方法を紹介しよう。

定義 4.3. n 次正方行列 A に対して、

$$f_A(x) = |xE - A|$$

を A の固有多項式、 $f_A(x) = 0$ を A の固有方程式という。

定理 4.4. n 次正方行列 A に対して、方程式

$$f_A(x) = 0$$

の解は A の固有値となる。

証明. $f_A(x) = 0$ の 1 つの解を α とすると、

$$f_A(\alpha) = |\alpha E - A| = 0.$$

よって、第3章、定理 5.2 より $\alpha E - A$ は正則でないので、

$$(\alpha E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる数ベクトル $\mathbf{x}$ ($\neq \mathbf{0}$) が存在する。つまり

$$A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$$

となり、 α は A の固有値である。□

例 4.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよう。

解答. A の固有多項式 $f_A(x)$ は

$$\begin{aligned} f_A(x) = |xE - A| &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)^2 - 2(x-1) \\ &= (x-2)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

よって、定理 4.4 より A の固有値は $f_A(x) = 0$ の解なので $1, -1, 2$ 。

以下、それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよう。

(1) 固有値 1 に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ とすると、定義より

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1.$$

よって,

$$\mathbf{0} = (A - E)\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 - y_1 + z_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

より, $y_1 = 0, x_1 + z_1 = 0$. ここで, $x_1 = c$ とおくと, $z_1 = -c$ となり固有値 1 に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ は

$$\mathbf{x}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0).$$

(2) 固有値 -1 に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とすると、定義より

$$A\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_2.$$

よって,

$$\mathbf{0} = (A + E)\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + y_2 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ y_2 + 2z_2 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}.$$

ここで, $x_2 = c$ とおくと, 固有値 1 に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_2$ は

$$\mathbf{x}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0).$$

(3) 固有値 2 に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とすると、定義より

$$A\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_3.$$

よって,

$$\mathbf{0} = (A - 2E)\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + y_3 \\ x_3 - 2y_3 + z_3 \\ y_3 - z_3 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{cases} -x_3 + y_3 = 0 \\ x_3 - 2y_3 + z_3 = 0 \\ y_3 - z_3 = 0 \end{cases}$$

ここで, $x_3 = c$ とおくと, 固有値 2 に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_3$ は

$$\mathbf{x}_3 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0).$$

問 4.1. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 固有値と固有ベクトル (2)

この節では, 行列の固有値と固有多項式の性質を紹介しよう.

定義 5.1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の対角成分の和

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

を A のトレースといい, $\text{tr}(A)$ で表す.

定理 5.2. n 次正方行列 A の固有多項式 $f_A(x)$ は x^{n-1} の係数が $-\text{tr}(A)$, 定数項が $(-1)^n |A|$ となる.

証明. (i) $f_A(x) = |xE - A|$ より, $f_A(0) = |-A| = (-1)^n |A|$. よって定数項は $(-1)^n |A|$.

(ii) $A = (a_{ij})$ とすると,

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}) + (n-2 \text{ 次以下の多項式}) \\ &= x^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})x^{n-1} + (n-2 \text{ 次以下の多項式}) \\ &= x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + (n-2 \text{ 次以下の多項式}). \quad \square \end{aligned}$$

定義 5.3. 2つの n 次正方行列 A, B に対して, ある正則行列 P が存在して

$$B = P^{-1}AP$$

となるとき, A と B は相似であるといい, $A \sim B$ で表す.

例 5.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

より, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

定理 5.4. 2つの n 次正方行列 A, B に対して, $A \sim B$ ならば $f_A(x) = f_B(x)$. よって, 定理 5.2 より $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, $|A| = |B|$ が成り立つ.

証明. $A \sim B$ より, ある正則行列 P が存在して

$$B = P^{-1}AP$$

となる. よって,

$$f_B(x) = |xE - B| = |xE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE - A)P| = |P^{-1}| \cdot |xE - A| \cdot |P| = f_A(x). \quad \square$$

例 5.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ とすれば, 例 5.1 より $A \sim B$ である. よって,

$$f_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -4 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6.$$

$$f_B(x) = |xE - B| = \begin{vmatrix} x+2 & 6 \\ -4 & x-9 \end{vmatrix} = (x+2)(x-9) - 24 = x^2 - 7x + 6.$$

となり, $f_A(x) = f_B(x)$.

6 行列の対角化

前節で述べたように, 行列の固有多項式は相似な行列同士では一致することが分かった. この節では, 行列が対角行列と相似となるような条件を紹介する.

定義 6.1. n 次正方行列 A は, 対角行列に相似となるとき, すなわち n 次正則行列 P を適当にとり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

とできるとき, 対角化可能 であるという. また, A は P によって 対角化される という.

対角化可能となる条件を調べてみよう.

定理 6.2. A を n 次正方行列, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を A の相異なる固有値, $\mathbf{x}_i$ を α_i に対する固有ベクトルとする. このとき, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ は 1 次独立となる.

証明. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ が 1 次従属であることを仮定して矛盾を示す. この仮定より,

- (i) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ が 1 次独立,
- (ii) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ が 1 次従属

となる k ($k \leq r$) が存在する. 定理 1.5 より

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} \quad (4.5)$$

とかける. ここで, (4.5) の両辺の左側から A をかける. $A\mathbf{x}_i = \alpha_i \mathbf{x}_i$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_k &= \lambda_1 A\mathbf{x}_1 + \lambda_2 A\mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k-1} A\mathbf{x}_{k-1} \\ \iff \alpha_k \mathbf{x}_k &= \lambda_1 \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \alpha_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

一方, (4.5) の両辺に α_k をかければ,

$$\alpha_k \mathbf{x}_k = \lambda_1 \alpha_k \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \alpha_k \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \alpha_k \mathbf{x}_{k-1}. \quad (4.7)$$

よって, (4.6)-(4.7) より,

$$\mathbf{0} = \lambda_1(\alpha_1 - \alpha_k)\mathbf{x}_1 + \lambda_2(\alpha_2 - \alpha_k)\mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)\mathbf{x}_{k-1}. \quad (4.8)$$

となって, 条件 (i) と α_i が全て異なる実数であることより,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$$

となり, (4.5) は

$$\mathbf{x}_k = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

となって, $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ に矛盾.

よって, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ は 1 次独立である. $\square$

定理 6.3. n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ をもつとする. そして α_i に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_i$ とし,

$$P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

とする. このとき, P は正則行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

証明. 定理 6.2 から, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ は 1 次独立であるので, 系 3.4 より P は正則となる. また, 各 i に対して, $A\mathbf{x}_i = \alpha_i\mathbf{x}_i$ であるので,

$$\begin{aligned} AP &= A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n) \\ &= (A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2 \ \cdots \ A\mathbf{x}_n) \\ &= (\alpha_1\mathbf{x}_1 \ \alpha_2\mathbf{x}_2 \ \cdots \ \alpha_n\mathbf{x}_n) \\ &= (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 6.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は, 異なる 2 個の固有値 -1 と 4 をもつから, 対角化可能である. 具体的には, 属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ をとり, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

定理 6.3 の証明をよく吟味することによって, 行列 A の固有値が全て異なっていなくても対角化できる場合もある事が分かる.

定理 6.4. A を n 次正方行列とする. このとき, 次は同値:

- (1) A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在する.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) の証明. A の n 個の固有値 α_i に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_i$ とする (このとき, α_i は全て異なっていなくてもよい). $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n)$ とおく. (1) より $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ は 1 次独立であるので, 系 3.4 より P は正則となる. $P^{-1}AP$ が対角行列になることは系 6.3 の証明と同様.

(2) $\Rightarrow$ (1) の証明. 条件より

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる. これにより

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となる. ここで,

$$P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n)$$

とおけば, P は正則なので, 系 3.4 より $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ は 1 次独立となる. また, (4.9) より $A\mathbf{x}_i = \alpha_i\mathbf{x}_i$ が成り立つので, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ は A の固有ベクトルとなる. $\square$

例 6.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の対角化を求めてみよう.

(A) A の固有値は 1 (重解) と 5 である.

(1) 1 に属する固有ベクトルとしては, $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($c_1, c_2 \neq 0$).

(2) 5 に属する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($c \neq 0$).

ここで, $c_1 = c_2 = c = 1$ とおいて得られる固有ベクトル

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は 1 次独立となる. これは $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $|P| = 4 \neq 0$ となるからである. よって, 定理 6.4 により A は対角化可能となる. 実際に計算すれば,

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

だから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(B) B の固有値 1, 2 (重解) をもち, 固有ベクトルは

$$\mathbf{u} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = c' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c, c' \neq 0)$$

である. c と c' の任意の値について, $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の形のベクトルは, 3 個の 1 次独立のベクトルとならないから, B は対角化可能ではない.

問 6.1. 次の行列を A とするとき, 適当な正則行列 P を求めて, $P^{-1}AP$ が対角行列となるようにせよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

行列を対角化をすることによって, 行列の n 乗を計算する事ができる.

例 6.3. 例 6.2 の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, A^n を求めてみよう.

例 6.2 より正則行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{であり,} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

となる. ここで,

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$A^n = P(P^{-1}A^nP)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3+5^n & 1-5^n & -1+5^n \\ 2-2 \cdot 5^n & 2+2 \cdot 5^n & 2-2 \cdot 5^n \\ -1+5^n & 1-5^n & 3+5^n \end{pmatrix}.$$

第 4 章 練 習 問 題

1. 次のベクトルが 1 次独立であるか調べよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 次のベクトルの組が一次従属になるように m の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. ベクトル a, b, c, d が 1 次独立のとき, 次のベクトルの組は 1 次独立か.

(a) $a + b, b + c, c + d, d + a$

(b) $a - b, b - c, c - d, d - a$

(c) $a + b + c, b + c + d, c + d + a, d + a + b$

(d) $a + b + c - d, a + b - c + d, a - b + c + d, -a + b + c + d$

4. ベクトルの集合 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の階数が 1 のとき, α と β を求めよ.

5. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad (a \neq 0)$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. 正方行列 A が $A^2 = A$ をみたすとき, A の固有値は 0 と 1 であることを示せ.

7. 次の行列 A は正則行列 P を用いて対角化可能か? もし可能ならば, $P^{-1}AP$ と P を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

第5章

線形写像

この章では、ベクトル空間と基底について調べ、ベクトル空間上の線形写像の次元定理を示し、行列で表現することができることを述べる。最後に対称行列の対角化を調べ、2次形式の標準形を調べる。

1 ベクトル

空間のベクトルについて、もう一度繰り返すと、空間のベクトルとは、 n 個の実数の組 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を n 次元数ベクトルまたは単にベクトルといい、

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

であった。前者の横書きのベクトルを **行ベクトル**、後者の縦書きのベクトルを **列ベクトル**といい、 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) をベクトルの第 i -成分と呼んだ。

2つのベクトルを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ とするとき、ベクトルの相等、加法、スカラー倍を次のように定義する。

相等： $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$

加法： $\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n)$ (複号同順)

スカラー倍： $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ (λ は実数)

これらの演算をもつ n 次元数ベクトル全体の集合を n 次元数ベクトル空間、または n 次元ユークリッド空間 とよび、 R^n で表す。

$$R^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}.$$

ここで R はすべての実数の集合である.

すべての成分が 0 となるベクトル $(0, 0, \dots, 0)$ を **零ベクトル** と呼んで, $\mathbf{0}$ で表した.

ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対して

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (5.1)$$

を $\mathbf{a}$ の **長さ** という. 長さが 1 のベクトルを **単位ベクトル** という. ベクトルの長さに関しては, 次のことが成り立つ.

$$|\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}| \quad (5.3)$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad (3 \text{ 角不等式}) \quad (5.4)$$

第 i 成分が 1 で他の成分が 0 のベクトルを $\mathbf{e}_i$ と表す. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ を **基本ベクトル** とよぶ (列ベクトルも同じ記号で書く).

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

ベクトル $\mathbf{a}$ は, その成分 $a_1, a_2, \dots, a_n$ と基本ベクトルにより

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n \quad (5.5)$$

と表される.

2 つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対し

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (5.6)$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の **内積** という. ベクトル $\mathbf{a}$ の長さは

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geq 0 \quad (5.7)$$

と表せる. 任意のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ と任意の実数 t に対して, 次のことが成り立つ.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (5.9)$$

$$t(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (t\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, t\mathbf{b}) \quad (5.10)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (5.11)$$

また任意のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \quad (\text{Schwarz (シュワルツ) の不等式}) \quad (5.12)$$

が成り立つ.

シュワルツの不等式を証明してみよう. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときは, 両辺とも 0 で成立する. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ とする. t を任意の実数とすると

$$0 \leq (t\mathbf{a} + \mathbf{b}, t\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a})t^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})t + (\mathbf{b}, \mathbf{b})$$

ここで $t = -\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ とおけば,

$$0 \leq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} - \frac{2(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \{(\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2\}$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ であるから

$$0 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$$

これから (5.12) が得られる.

問 1.1. 3 角不等式 (5.4) を証明せよ.

シュワルツの不等式で, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がともに $\mathbf{0}$ でないとき

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \leq 1$$

となるから

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

をみたす θ がただ 1 つ定まる. この θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角という. このとき, 次の 2 つの条件

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

は同値である. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ のとき, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は直交するという. R^n の n 個の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ はすべて単位ベクトル (長さが 1) で, たがいに直交している. すなわち, クロネッカーのデルタ とよばれた記号 δ_{ij} を用いれば

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つ.

行ベクトルの代わりに, 列ベクトルを R^n の要素と考えると, すべての定義, 定理等はほとんど変更なしに成り立つ. 本章では主に行ベクトルを用いているが, 後章では行ベクトル, 列ベクトルの両方を使用する.

問 1.2. 次の 2 つのベクトルの内積およびなす角を求めよ.

$$(1) \mathbf{a} = (3, 1), \mathbf{b} = (2, -1)$$

$$(2) \mathbf{a} = (1, 0, 2), \mathbf{b} = (-1, \sqrt{10}, 3)$$

$$(3) \mathbf{a} = (1, 0, 2, 2, 3), \mathbf{b} = (1, 3, 0, 1, 5)$$

問 1.3. $\mathbf{a} = (1, \alpha, -1), \mathbf{b} = (0, 1, 2)$ とする.

(1) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交するように α を定めよ.

(2) (1) で求めた $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ 両方に直交する単位ベクトルを求めよ.

$\mathbf{R}^3$ の 2 つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を

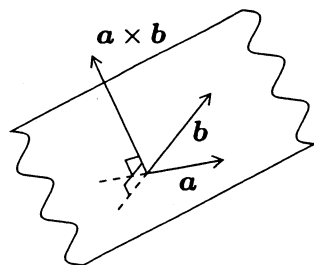
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

と定義する. 従って, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトルであり, 次の等式が成り立つ.

$$(1) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad (2) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(3) (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) \quad (4) \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$(5) (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \text{ただし, } \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3).$$



問 1.4. ベクトルの外積について, 次を示せ.

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で張られる平面に垂直である.

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の長さは $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.

(3) $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$ の絶対値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積に等しい.

2 ベクトル空間

$\mathbf{R}$ を実数の集合とする. 集合 V が次の条件をみたすとき, V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間 (または線形空間) または単に実ベクトル空間 という.

(I) 加法: V の任意の元 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して, 和 とよばれる V の元 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ がきまり, 次の条件をみたす.

$$\mathbf{V1} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V) \quad (\text{交換法則})$$

$$\mathbf{V2} \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V) \quad (\text{結合法則})$$

$$\mathbf{V3} \quad V \text{ に一定の元 } \mathbf{0} \text{ が存在して, 任意の元 } \mathbf{x} \in V \text{ に対して}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

(零元の存在)

$$\mathbf{V4} \quad \text{任意の元 } \mathbf{x} \in V \text{ に対して, ある元 } \mathbf{x}' \in V \text{ が存在して}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

(逆元の存在)

この元 $\mathbf{x}'$ を $\mathbf{x}$ の逆元 または 逆ベクトル といい, $-\mathbf{x}$ と書く.

(II) スカラー倍: 任意のスカラー $\lambda \in \mathbf{R}$ と任意の元 $x \in V$ に対し, x のスカラー倍とよばれる V の元 λx がきまり, 次の条件をみたとす.

$$\text{V5} \quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad (\lambda \in \mathbf{R}, x, y \in V)$$

$$\text{V6} \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}, x \in V)$$

$$\text{V7} \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}, x \in V)$$

$$\text{V8} \quad 1x = x \quad (x \in V)$$

V の元を ベクトル という.

定理 2.1. V を実ベクトル空間とするとき

$$(1) \quad V \text{ の任意の元 } x \text{ に対して } 0x = 0$$

$$(2) \quad \text{任意の } \lambda \in \mathbf{R} \text{ に対して } \lambda 0 = 0$$

実際, $0x = (0+0)x = 0x + 0x$. 両辺に $0x$ の逆元 $-0x$ を加えれば, $0 = 0x$.

また, $\lambda x = \lambda(x+0) = \lambda x + \lambda 0$. 両辺に $-\lambda x$ を加えれば, $0 = \lambda 0$.

例 2.1. $\mathbf{C}$ を複素数全体の集合とする, すなわち, $\mathbf{C} = \{z = \alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. $z = \alpha + \beta i$, $z' = \alpha' + \beta' i$ ならば, $z + z' = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')i$. また, $\lambda \in \mathbf{R}$ について $\lambda z = \lambda\alpha + \lambda\beta i$ となるので通常の和と実数との積で, $\mathbf{C}$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる.

例 2.2. x に関する実係数の高々 n 次の多項式全体 $P_n(x)$ は実ベクトル空間となる. ここでのベクトルは n 次またはそれ以下の次数の多項式である.

例 2.3. 閉区間 $[-1, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ で定義された連続実数値関数全体を $\mathcal{C}[-1, 1]$ で表す. 任意の $f, g \in \mathcal{C}[-1, 1]$ および $x \in [-1, 1]$ に対して

$$\begin{array}{ll} \text{和} & f+g : (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \text{スカラー倍} & \lambda f : (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \end{array}$$

と定義すれば, $\mathcal{C}[-1, 1]$ は実ベクトル空間となる. この場合, つねに 0 の値をとる定値関数が零元である (関数もベクトルとなる).

例 2.4. 空間 $\mathbf{R}^3$ あるいは平面 $\mathbf{R}^2$ におけるベクトル全体は, 定理 1.1 で定義された和とスカラー倍によって実ベクトル空間となる.

ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が

$$\text{S1} \quad x, y \in W \text{ ならば, } x + y \in W$$

$$\text{S2} \quad \text{任意の } x \in W \text{ と } \lambda \in \mathbf{R} \text{ に対して } \lambda x \in W$$

をみたすとき, W を V の 部分空間 とよぶ. 条件 S1, S2 は, W が V におけるベクトルの演算, 和とスカラー倍について閉じていること, すなわち W はそれ自身ベクトル空間となることを示している. あきらかに, V 自身は V の部分空間であり, また V の零ベクトル 0 のみからなる集合 $\{0\}$ も V の部分空間である. $\{0\}$ は 零空間 といわれる.

上の条件 S1, S2 は 1 つの条件 S3 と同値である.

S3 任意の $x, y \in W$ と $\lambda, \mu \in R$ に対して

$$\lambda x + \mu y \in W$$

問 2.1. **S1**, **S2** と **S3** が同値となることを示せ.

例 2.5. 平面 R^2 (または空間 R^3) の 0 でないベクトル a に対して

$$L(a) = \{\lambda a \mid \lambda \in R\}$$

は, R^2 (または R^3) の部分空間となる. 実際, $\lambda, \mu \in R$ に対し

$$\lambda a + \mu a = (\lambda + \mu)a \in L(a), \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a \in L(a)$$

となり, $L(a)$ は **S1** と **S2** をみたしている.

例 2.6. 例 2.2 における n 次以下の多項式からなるベクトル空間 $P_n(x)$ を考える. 任意の整数 k ($0 \leq k \leq n$) について, $P_k(x)$ は $P_n(x)$ の部分空間である. $k = 0$ の場合 $P_0(x)$ は定数のみの多項式として R に等しい.

3 ベクトル空間の基底と次元

ベクトル空間 V において, 次の2条件をみたす順序を考えた組 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を V の基底 という.

B1 $a_1, a_2, \dots, a_n$ は1次独立である.

B2 $a_1, a_2, \dots, a_n$ は V を生成する. すなわち

$$V = L(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R\}.$$

条件 **B2** は, V の任意のベクトルが $a_1, a_2, \dots, a_n$ の一次結合で表されることを意味する. **B2** をみたすとき, $a_1, a_2, \dots, a_n$ は V の生成系 であるという. V の基底とは, 1次独立な V の生成系のことである. **B1**, **B2** は次の条件 **B3** と同値である.

B3 V の任意のベクトル x は $a_1, a_2, \dots, a_n$ の1次結合

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

として一意的に表される.

これは, x がもう一つの形 $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n$ と表された場合, $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$ が成り立つということである. **B1**, **B2** の仮定の下に $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n$ とすれば, $(\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)a_n = 0$ が得られる. **B1** より $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$, すなわち $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$ となる. 逆に, **B3** を仮定すると, **B2** は明らかであるから **B1** を示せばよい. $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$ とする. 0 の表し方として $0 = 0a_1 + \dots + 0a_n$ を考えれば, **B3** より $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ が示される.

例 3.1. R^n 上において n 個の基本ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は R^n の基底をなす. 任意のベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ は

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

と表される. この表し方は一意的であるから, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ は R^n の基底となる. これを R^n の標準基底という.

例 3.2. R^2 において, 基本ベクトル e_1, e_2 とベクトル $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすると, $e_1 = a_2 - a_1$, $e_2 = a_2 - 2a_1$ だから, a_1, a_2 は R^2 の生成系となる. また, a_1, a_2 は 1 次独立であるから, $\{a_1, a_2\}$ は $\{e_1, e_2\}$ と異なる R^2 の基底である.

定理 3.1. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ と $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ がともに V の基底ならば, 構成するベクトルの数は等しい. すなわち, $n = m$.

証明. B1 より, $a_1, a_2, \dots, a_n$ と $b_1, b_2, \dots, b_m$ はともに 1 次独立であるから,

$$\text{rank}\{a_1, \dots, a_n\} = n, \text{rank}\{b_1, \dots, b_m\} = m$$

となる. B2 より, 各 b_j は $a_1, \dots, a_n$ の 1 次結合であり, また各 a_i は $b_1, \dots, b_m$ の一次結合であるから, 階数定理 (第 4 章定理 2.2) より $m \leq n$ かつ $n \leq m$ となる. すなわち $n = m$ である. $\square$

この定理より, ベクトル空間 V の基底に属するベクトルの数 n は, 基底の選び方に無関係に V により一意的に定まる. この数 n を V の次元とよび, $\dim V$ と書く. $\mathbf{0}$ ベクトルだけの空間 $\{0\}$ の次元は 0 と定める. $V \neq \{0\}$ ならば $\dim V > 0$ である.

例 3.3. C を第 1 章例 2.1 における複素数全体からなるベクトル空間とする. 任意の複素数は $\alpha + \beta i$ ($\alpha, \beta \in R$) と表され, $1, i$ は 1 次独立であるから, $\{1, i\}$ は C の基底となる. これから, $\dim C = 2$ となる.

例 3.4. 数ベクトル空間 R^n については, $\dim R^n = n$ となる.

例 3.5. n 次以下の多項式からなるベクトル空間 $P_n(x)$ においては, $\{x^0 (=1), x, x^2, \dots, x^n\}$ が基底をなす. これから $\dim P_n(x) = n+1$ である.

このように, 有限個のベクトルからなる基底をもつとき, **有限次元** ベクトル空間という. これに対して, 多項式全体からなるベクトル空間においては, $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ が基底をなす. このように無限に多くの1次独立なベクトルを含むとき, ベクトル空間の次元は **無限** であるので, **無限次元** ベクトル空間という.

定理 3.2. $\dim V = n$ ならば, V の任意のベクトルの集合 $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ の階数は n を越えない. すなわち, $\text{rank}\{b_1, b_2, \dots, b_p\} \leq n$.

証明. $\{a_1, \dots, a_n\}$ を V の基底とすれば, 各 b_j は $a_1, \dots, a_n$ の1次結合となるから, 階数定理より

$$\text{rank}\{b_1, b_2, \dots, b_p\} \leq n$$

となる. $\square$

定理 3.3. $\dim V = n$ ならば, 任意の V の n 個の1次独立なベクトルの集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は V の基底をつくる.

証明. x を V の任意のベクトルとすれば, 定理 3.2 より $\text{rank}\{a_1, a_2, \dots, a_n, x\} \leq n$, すなわち, $a_1, \dots, a_n, x$ は1次従属となる. 第4章定理 1.5 により x は $a_1, \dots, a_n$ の1次結合として表される. $\{a_1, \dots, a_n\}$ は条件 B1, B2 をみたすから基底をなす. $\square$

定理 3.4. $0 \leq m < n = \dim V$ とする. m 個のベクトル $a_1, \dots, a_m$ が1次独立ならば, $(n-m)$ 個のベクトル $a_{m+1}, \dots, a_n$ をこれに加えて $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$ が V の基底をつくるようにできる.

証明. $\text{rank}\{a_1, \dots, a_m\} = m < n$ だから, $a_1, \dots, a_m$ の1次結合とならない V のベクトル a_{m+1} が存在する. $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}\}$ は1次独立となる. $m+1 < n$ ならば, 上と同じように a_{m+2} を選んで $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}\}$ が1次独立になるようにできる. これを繰返せば定理が示される. $\square$

系 3.5. $\dim V = n$ とする. 任意のベクトル $x \neq 0$ に対して, $(n-1)$ 個のベクトル $a_1, \dots, a_{n-1}$ を選んで $\{x, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ が V の基底をつくるようにできる.

系 3.6. $\dim V = n$, W を V の部分空間とする. $\dim W = m < n$ ならば, V の基底 $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$ を $\{a_1, \dots, a_m\}$ が W の基底をなすようにつくれる.

任意のベクトル $x \neq 0$ は1次独立であるから, 系 3.5 は $m=1$ の場合の定理 3.4 である. 系 3.6 は, まず系 3.5 により W の基底 $\{a_1, \dots, a_m\}$ を選び, さらに定理 3.4 を適用して得られる.

問 3.1. $\mathbf{R}^3$ において, ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含む基底を選べ.

問 3.2. $\mathbf{R}^3$ の次のベクトルを考えよ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) $1 \leq i \leq 6$ に対して, L_i を i 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i$ により生成された $\mathbf{R}^3$ の部分空間とする. $\dim L_i$ を求めよ.

(2) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i$ の中から L_i の基底を選べ.

(3) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6$ の中から $\mathbf{R}^3$ の基底を2種類選べ.

4 線形写像と1次変換

M と N を集合とすると, M の任意の元 $\mathbf{x}$ に対して, N の元 $f(\mathbf{x})$ がただ1通り定まるような M から N への対応を M から N への写像といい, $f: M \rightarrow N$ で表す. $f(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ の像, $\mathbf{x}$ を $f(\mathbf{x})$ の原像という. N の部分集合

$$R(f) = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\}$$

を f の像という. $R(f)$ を $f(M)$ で表すこともある. また, A が M の部分集合であるとき $f(A) = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\}$ を A の像という. $R(f) = N$ となるとき, f を M から N の上への写像または全射という. M の任意の相異なる元 $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ に対して, $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}')$ が成り立つとき, f を M から N への1対1写像または単射という. f が全射かつ単射のとき, f を全単射または上への1対1写像という. $f: M \rightarrow N$ が全単射のとき, N の元 $\mathbf{y}$ に $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ となる M の元 $\mathbf{x}$ を対応させれば, N から M への写像が定まる. これを f の逆写像といい, f^{-1} で表す.

M, N, L を集合とし, $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow L$ を写像とする. このとき, f と g の合成写像 $g \circ f: M \rightarrow L$ は

$$g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{x} \in M)$$

によって定義される.

例 4.1. $M = L = \mathbf{R}$ とし, $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbf{R}$) によって $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を定義する. $R(f) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ であるから全射ではない. また, $x > 0$ ならば $f(\sqrt{x}) = f(-\sqrt{x}) = x$ だから f は単射ではない.

例 4.2. $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $g(x) = e^x$ ($x \in \mathbf{R}$) と定義すれば, $R(g) = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ となり g は全射ではないが単射となる.

例 4.3. $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $h(x) = ax + b$ (a, b は定数) と定義する. $a \neq 0$ ならば h は全単射となり, 逆写像は $h^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$ で定義される.

V, W をベクトル空間とする. V から W への写像 $f: V \rightarrow W$ が次の条件をみたすとき, f を **線形写像** または **1次写像** という.

L1 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

L2 任意のベクトル $\mathbf{x}$ とスカラー $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$.

特に $V = W$ の場合, f を V の **線形変換** または **1次変換** という. A が n 次正方行列で, V が n 次元数ベクトル空間のとき, $\mathbf{x} \in V$ に対して $A\mathbf{x} \in V$ となり, A は V の線形写像とみることができる.

条件 **L1, L2** は次の1つの条件と同値である.

L3 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ とスカラー $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}).$$

問 4.1. **L1, L2** と **L3** の同値を証明せよ.

$f: V \rightarrow W$ を線形写像とする. W の部分集合 B に対して, $f^{-1}(B) = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) \in B\}$ を B の **原像** とよぶ. 特に, B が零ベクトル $\mathbf{0}$ のみからなるとき, $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ を f の **核** とよび, $\text{Ker}(f)$ で表す.

定理 4.1. $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする.

(1) A が V の部分空間ならば, A の像 $f(A)$ は W の部分空間となる.

(2) B が W の部分空間ならば, B の原像 $f^{-1}(B)$ は V の部分空間となる. 特に f の核 $\text{Ker}(f)$ は V の部分空間となる.

証明. (1) $f(A)$ が **S3** をみたすことを示す. $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in f(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ とする. $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \mathbf{y}' = f(\mathbf{y})$ となる $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ をとれば, A が部分空間であることから, $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in A$ となる. これから, $\lambda\mathbf{x}' + \mu\mathbf{y}' = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) = f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \in f(A)$ となる.

(2) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(B)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ とする. B は部分空間で $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \in B$ だから, $f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) \in B$, すなわち $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in f^{-1}(B)$ となる. $\square$

n 次正方行列 A は n 次元数ベクトル空間 V の線形写像であるので, α を A の固有値とすると

$$W(\alpha) = \{\mathbf{x} : (A - \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

は $W(\alpha) = \text{Ker}(A - \alpha E)$ より, 部分空間となっている. これを α の **固有空間** という.

定理 4.2 (次元定理). $f: V \rightarrow W$ を線形写像とすれば、次の等式が成り立つ。

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{R}(f).$$

注. 次元定理は種々の情報を得ることができる重要な定理である。

証明. $\dim \operatorname{Ker}(f) = m, \dim \operatorname{R}(f) = n$ とする. V が $m+n$ 個のベクトルからなる基底をもつことを示せばよい. $\operatorname{R}(f)$ の基底 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ と $\operatorname{Ker}(f)$ の基底 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+m}\}$ を選ぶ (定理 3.4). 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して b_i の原像 $a_i \in f^{-1}(b_i)$ を任意にとる. このとき $(n+m)$ 個のベクトル $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}\}$ は V の基底をなす. これを示すために, $\{a_i\}$ が **B1** と **B2** をみたすことをいう. まず

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} + \dots + \lambda_{n+m} a_{n+m} = 0 \quad (5.13)$$

f で写せば, $f(a_i) = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $f(a_j) = 0$ ($j = n+1, \dots, n+m$) だから

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i a_i\right) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

となる. $b_1, \dots, b_n$ は1次独立であるから, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. (5.13) より $\lambda_{n+1} a_{n+1} + \dots + \lambda_{n+m} a_{n+m} = 0$ となる. $a_{n+1}, \dots, a_{n+m}$ は1次独立であるから, $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m} = 0$ となり, **B1** が成り立つ. 次に **B2** を示すために, V の任意のベクトル x をとる. W のベクトル $f(x)$ をその基底 $\{b_1, \dots, b_n\}$ で表して, $f(x) = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$ とする. このとき,

$$f\left(x - \sum_{i=1}^n \mu_i a_i\right) = f(x) - \sum_{i=1}^n \mu_i f(a_i) = f(x) - \sum_{i=1}^n \mu_i b_i = 0$$

となるから, $x - \sum_{i=1}^n \mu_i a_i \in \operatorname{Ker}(f)$ となる. $\{a_{n+1}, \dots, a_{n+m}\}$ は $\operatorname{Ker}(f)$ の基底であるから,

$$x - \sum_{i=1}^n \mu_i a_i = \mu_{n+1} a_{n+1} + \dots + \mu_{n+m} a_{n+m}$$

と表せる. すなわち $x = \sum_{i=1}^{n+m} \mu_i a_i$ となる. これで **B2** は示された. $\square$

問 4.2. 次の線形写像について答えよ.

(1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix}$ について $\operatorname{R}(f)$ と $\operatorname{Ker}(f)$ を明示し, その次元を求めよ.

(2) $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y \\ x-z \\ 2x-y-z \end{pmatrix}$ について $\operatorname{R}(g)$ と $\operatorname{Ker}(g)$ の次元を求めよ.

5 線形写像の表現行列

V, W を n 次元, m 次元のベクトル空間, $f: V \rightarrow W$ を線形写像とし, V と W の基底をそれぞれ $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ と $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ とする. V のベクトル $\mathbf{x}$ とその像 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = y_1 \mathbf{b}_1 + \dots + y_m \mathbf{b}_m \quad (5.14)$$

と一意的に表せる. 行列の記法を使えば

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

f は線形写像だから (5.14) より

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{a}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{a}_n), \quad (5.15)$$

すなわち

$$\mathbf{y} = (f(\mathbf{a}_1) \cdots f(\mathbf{a}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる. $f(\mathbf{a}_j)$ は $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ の 1 次結合となるから

$$f(\mathbf{a}_j) = a_{1j} \mathbf{b}_1 + a_{2j} \mathbf{b}_2 + \dots + a_{mj} \mathbf{b}_m \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5.16)$$

これから

$$(f(\mathbf{a}_1) \cdots f(\mathbf{a}_n)) = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

となる. (5.15) と (5.16) より

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{b}_i.$$

したがって, (5.14) より

$$\mathbf{y} - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^m \left(y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$$

となる. $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ は 1 次独立であるから

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

となる. すなわち,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

(5.17) または (5.18) の右辺の行列を, 基底 $\{a_j\}, \{b_i\}$ に関する線形写像 f の表現行列とよび, A_f とかく.

逆に任意の (m, n) -行列 $A = (a_{ij})$ が与えられれば, 線形写像 $f: V \rightarrow W$ を (5.15) と (5.16) により定義すれば, f の基底 $\{a_j\}, \{b_i\}$ に関する表現行列は A となる. すなわち $A = A_f$ である.

Point: 要するに, 基底 $\{a_j\}, \{b_i\}$ に関する線形写像 f の表現行列 A_f を求めるときには, まず最初のベクトル a_1 を f で写して基底 $\{b_i\}$ で表す, すなわち $f(a_1) = a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \cdots + a_{m1}b_m$ このときの係数 $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ を 1 列目に順序を間違わずにかく. 同じ作業を a_n までしてできた行列である. したがって基底 $\{a_j\}, \{b_i\}$ がどちらも標準基底のときは簡単に表現行列を求めることができる.

次に, U を l 次元ベクトル空間, その基底を $\{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ とする. 線形写像 $g: W \rightarrow U$ に対して, 基底 $\{b_i\}, \{c_k\}$ に関する g の表現行列を $A_g = (b_{st})$ とする. W のベクトル $y = \sum_{j=1}^m y_j b_j$ の像を $g(y) = z = \sum_{k=1}^l z_k c_k$ とすれば

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

となる. (5.18) と (5.19) から

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

これは, 合成写像 $g \circ f: V \rightarrow U$ の基底 $\{a_j\}, \{c_k\}$ に関する表現行列 $A_{g \circ f}$ が行列の積 $A_g A_f$ となることを示している. これから次の定理が得られる.

定理 5.1. V, W をそれぞれ n 次元, m 次元のベクトル空間とし, V から W への線形写像全体の集合を $L(V, W)$ とする. $M(m, n)$ を (m, n) -行列全体の集合とする. V と W の基底 $\{a_j\}$ と $\{b_i\}$ を選び, 対応 $\Theta : L(V, W) \rightarrow M(m, n)$ を

$$\Theta(f) = A_f, f \in L(V, W)$$

によって定義すれば, Θ は全単射となる.

定理 5.2. V, W, U をそれぞれ n 次元, m 次元, l 次元のベクトル空間とし, その基底を $\{a_j\}, \{b_i\}, \{c_k\}$ とする. $f \in L(V, W), g \in L(W, U)$ とし, A_f と A_g をそれぞれ $\{a_j\}, \{b_i\}$ と $\{b_i\}, \{c_k\}$ に関する f と g の表現行列とする. このとき, 対応 $\Theta : L(V, U) \rightarrow M(n, l)$ は $\Theta(g \circ f) = A_g A_f$ をみたす. すなわち, 合成写像は表現行列の積に対応する.

例 5.1. 1次写像 $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$ を考える.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad \text{とすれば,}$$

$$y_1 = x_1 - x_2, y_2 = -2x_1 + 2x_2, y_3 = 3x_1 - 3x_2. \quad (5.20)$$

$\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ の基底として標準基底 $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_2, e_3\}$ をとれば, f の表現行列は $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

となる. また, (5.20) より $y_2 = -2y_1, y_3 = 3y_1$ だから,

$$R(f) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} : y_1 = -\frac{y_2}{2} = \frac{y_3}{3} \right\}. \quad \text{Ker}(f) \text{ を求めるために, } x_1 - x_2 = -2x_1 + 2x_2 =$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0 \text{ をといて, } x_1 = x_2. \text{ すなわち, } \text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\}.$$

例 5.2. $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ -2x + y - 3z \end{pmatrix}$ とする. $\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2$ の基底として

$\{e_1, e_2, e_3\}$ および $\left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ を選ぶ. この2つの基底に関する g の表現行列を求めるために, まず $g(e_i)$ ($i = 1, 2, 3$) を計算する. 例えば,

$$g(e_3) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2$ とおけば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$. これから, $\lambda = -\frac{1}{3}, \mu = -\frac{4}{3}$. すなわち, $g(\mathbf{e}_3) = -\frac{1}{3}\mathbf{a}_1 - \frac{4}{3}\mathbf{a}_2$. 同様にして, $g(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{a}_2, g(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. ゆえに, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ となる. また任意の $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して, 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y + z = b_1 \\ -2x + y - 3z = b_2 \end{cases}$$

は解をもつから, $R(g) = \mathbf{R}^2$, すなわち g は全射となる. $b_1 = b_2 = 0$ とすれば,

$$\text{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \frac{x}{5} = y = -\frac{z}{3} \right\}$$

が得られる.

例 5.3. 2つの線形変換 $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ および $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow$

$\mathbf{R}^3 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3 \\ 2y_2 - y_3 \end{pmatrix}$ を考える. $\mathbf{R}^3$ の基底をすべて標準基底とすれば, f と

g の表現行列は $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ となる. 合成写像 $g \circ f$ は

$$g \circ f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = g \left(\begin{pmatrix} -y + z \\ 2x - z \\ y + z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x + z \\ y + z \\ 4x - y - 3z \end{pmatrix}$$

となるから, その表現行列は, $A_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ となり, $A_{g \circ f} = A_g A_f$ が成り立つ.

n 次元ベクトル空間 V の 2つの基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}, \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ を考える. 各 $\mathbf{b}_i$ を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合で表して

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = p_{11}\mathbf{a}_1 + p_{21}\mathbf{a}_2 + \dots + p_{n1}\mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_2 = p_{12}\mathbf{a}_1 + p_{22}\mathbf{a}_2 + \dots + p_{n2}\mathbf{a}_n \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n = p_{1n}\mathbf{a}_1 + p_{2n}\mathbf{a}_2 + \dots + p_{nn}\mathbf{a}_n \end{cases}$$

とする. 行列で表して,

$$(b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)P; \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

この P を $\{a_i\}$ から $\{b_j\}$ への基底変換の行列という. 基底変換の行列は正則となる. なぜなら, $\{b_j\}$ から $\{a_i\}$ への基底変換の行列を Q とすれば, $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)Q$ となり, (5.21) から

$$\begin{aligned} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) &= (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)QP \\ (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) &= (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)PQ. \end{aligned}$$

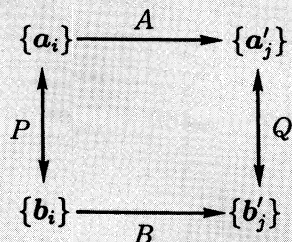
$a_1, \dots, a_n$ と $b_1, \dots, b_n$ はともに 1 次独立であるから, $QP = PQ = E$. これから $Q = P^{-1}$ となる.

最後に, 線形変換と基底変換の行列の関係を調べる. 次の定理がその関係を与える.

定理 5.3. V, W を n 次元, m 次元ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする. $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\}$ を V の基底, $\{a'_1, \dots, a'_m\}, \{b'_1, \dots, b'_m\}$ を W の基底として, $\{a_i\}$ から $\{b_i\}$ への基底変換の行列を P , $\{a'_j\}$ から $\{b'_j\}$ への基底変換の行列を Q とする. このとき, f の $\{a_i\}, \{a'_j\}$ に関する表現行列を A , $\{b_i\}, \{b'_j\}$ に関する表現行列を B とすれば,

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ.



証明. (5.21) より $(b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)P$. f が 1 次写像であるから

$$(f(b_1) \ \cdots \ f(b_n)) = (f(a_1) \ \cdots \ f(a_n))P$$

が得られる. (5.17) より $(f(a_1) \ \cdots \ f(a_n)) = (a'_1 \ \cdots \ a'_m)A$. これを上式に代入して

$$(f(b_1) \ \cdots \ f(b_n)) = (a'_1 \ \cdots \ a'_m)AP \quad (5.22)$$

また, $\{b_i\}, \{b'_i\}, \{a'_j\}$ に同様の計算を行えば, $(b'_1 \ \cdots \ b'_m) = (a'_1 \ \cdots \ a'_m)Q$ だから,

$$(f(b_1) \ \cdots \ f(b_n)) = (b'_1 \ \cdots \ b'_m)B = (a'_1 \ \cdots \ a'_m)QB. \quad (5.23)$$

(5.22) と (5.23) の右辺を比較すれば, $a'_1, \dots, a'_m$ が 1 次独立であることから, $AP = QB$ となる. これから, $B = Q^{-1}AP$ が成り立つ. $\square$

例 5.4. $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\mathbf{R}^3$ の $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ から $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ への基底変換の行列 P と $\mathbf{R}^2$ の $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ から $\{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2\}$ への基底変換の行列 Q を求めよ.

(2) f の $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}_j\}$ に関する表現行列 A と $\{\mathbf{b}_i\}, \{\mathbf{b}'_j\}$ に関する表現行列 B を求めよ.

解.

(1) $(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{b}'_1 \ \mathbf{b}'_2) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ だから,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

だから,

$$(f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2) \ f(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2)A$$

より,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

また

$$f(\mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}'_1, f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}'_2, f(\mathbf{b}_3) = 2\mathbf{b}'_1 + 2\mathbf{b}'_2$$

となるから

$$(f(\mathbf{b}_1) \ f(\mathbf{b}_2) \ f(\mathbf{b}_3)) = (\mathbf{b}'_1 \ \mathbf{b}'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{b}'_1 \ \mathbf{b}'_2)B$$

より,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Q^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

だから,

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

となり, 定理 5.3 が確認できる. $\square$

問 5.1. R^3 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と R^2 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して,
 $f: R^3 \rightarrow R^2; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x+y+z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$ の表現行列を求めよ.

6 複素ベクトル空間と正規直交基底

行列の固有値を求めると, 複素数となることもある. これを扱うためにはベクトルの成分を複素数に広げておく必要がある. V をベクトル空間とする. V の任意のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積とよばれる数 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ がきまり, 次の条件をみたすとき, V を内積空間という.

$$\text{I1} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$$

$$\text{I2} \quad (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\lambda \in C)$$

$$\text{I3} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad (\text{分配法則})$$

$$\text{I4} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0; (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

内積空間 V のベクトル $\mathbf{a}$ に対して $\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ を $\mathbf{a}$ の長さまたはノルムといい, $\|\mathbf{a}\|$ で表す. 内積の定義できるベクトル空間がいろいろある.

例 6.1. 数ベクトル空間 C^n : 内積は $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \cdots + a_n \overline{b_n}$$

により C^n は内積空間となる. $(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}) = \overline{\lambda} (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ となることに注意する.

例 6.2. 閉区間 $[-1, 1]$ 上の連続な実数値関数のつくるベクトル空間 $C[-1, 1]$: (第2章 例 2.3) を考える. $f, g \in C[-1, 1]$ に対して, f と g の内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

と定義する. 明らかに **I1**~**I4** をみたすから, $C[-1, 1]$ は内積空間となる. この場合, 係数 λ は実数である.

定理 6.1. 内積空間 V において, ノルムは次の性質をもつ.

- (1) $\|a\| \geq 0$; $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- (2) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|$ は λ の絶対値)
- (3) $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$ (Schwarz(シュワルツ)の不等式)
- (4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (三角不等式)

証明. (1) はノルムの定義と **I4** より得られる. (2) は **I1**, **I2** とノルムの定義より簡単に分かる. (3) を示すために, α を任意の複素数とする. $\operatorname{Re} \alpha$ は α の実数部をかく. **I1**~**I4** より

$$(\alpha a + b, \alpha a + b) = |\alpha|^2 (a, a) + 2\operatorname{Re}(\alpha(a, b)) + (b, b) \geq 0.$$

ここで $(a, b) = 0$ ならば不等式は明らかに成り立つので, $(a, b) \neq 0$ とする. $\alpha = t \overline{(a, b)}$ (t は実数) とおくと, 上の式は

$$t^2 |(a, b)|^2 \|a\|^2 + 2t |(a, b)|^2 + \|b\|^2 \geq 0$$

がすべての実数 t に対して成り立つので判別式を考えれば, $|(a, b)|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \leq 0$ となり, (3) が成り立つ. 最後に,

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= (a + b, a + b) = (a, a) + 2\operatorname{Re}(a, b) + (b, b) \\ &\leq (a, a) + 2|(a, b)| + (b, b) = \|a\|^2 + 2|(a, b)| + \|b\|^2. \end{aligned}$$

(3) を使用して,

$$\|a + b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\| \|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2.$$

これで (4) は証明された. $\square$

ベクトル a と b がともに 0 でなく, $(a, b) = 0$ のとき, a と b は直交するという. このことを, もう少し一般的にしたものが次の定義である.

定義 6.2 (直交補空間). 内積空間 V の部分集合 W に対して,

$$W^\perp = \{x \in V; \text{すべての } y \in W \text{ に対して, } (x, y) = 0\}$$

を, 部分空間 W の直交補空間 という (W が部分空間でなくても $W^\perp$ は部分空間になる).

問 6.1. W を内積空間 V の部分空間とする. このとき, 次を示せ.

- (1) $W^\perp$ は V の部分空間である.
- (2) W_1, W_2 を V の部分空間とし, $W_1 \subset W_2$ ならば, $W_1^\perp \supset W_2^\perp$.

なお, 直交補空間に関しては第6章で再び触れる.

例 6.3. 内積空間 $C[-1, 1]$ (例 6.2) において, 任意の整数 m, n に対して $f(x) = \cos m\pi x$, $g(x) = \sin n\pi x$ とおけば

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \cos m\pi x \cdot \sin n\pi x dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 \sin(m+n)\pi x dx - \int_{-1}^1 \sin(m-n)\pi x dx \right).$$

右辺の積分はともに 0 となり, $(f, g) = 0$. すなわち, f と g は直交する.

定理 6.3. 内積空間 V において, 0 でないベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の任意の 2 つが直交するならば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は 1 次独立である.

証明. $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ とする. $\mathbf{a}_i$ との内積をつくれれば, $i \neq j$ のとき $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$ だから,

$$0 = \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i \right) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i) = \lambda_i \|\mathbf{a}_i\|^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

これから, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ となる. $\square$

V の単位ベクトルの集合 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ は, 任意の 2 つが直交しているとき, すなわち,

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, k)$$

となるとき, **正規直交系** といわれる. また正規直交系をなす基底を**正規直交基底** という.

例 6.4. $\mathbf{R}^2$ において, 任意の θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に対してベクトル $\mathbf{a}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$,

$\mathbf{b}_\theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ を考えよ. $\|\mathbf{a}_\theta\| = \|\mathbf{b}_\theta\| = 1$, $(\mathbf{a}_\theta, \mathbf{b}_\theta) = 0$ であるから, $\{\mathbf{a}_\theta, \mathbf{b}_\theta\}$ は $\mathbf{R}^2$ の正規直交基底となる.

例 6.5. $\mathbf{R}^n$ の標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ は正規直交基底である.

正規直交系をつくる **Gram-Schmidt (グラム・シュミット)** の直交化法とよばれる便利な方法がある. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を V の 1 次独立なベクトルとせよ. ベクトル $\mathbf{b}'_i, \mathbf{b}_i$ を順次に次のように定義する. $i = 1$ に対して, $\mathbf{b}'_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b}'_1}{\|\mathbf{b}'_1\|}$ とおく. $\|\mathbf{b}_1\| = 1$ と

なる. $i = 2$ に対して $b'_2 = a_2 - (a_2, b_1)b_1$, $b_2 = \frac{b'_2}{\|b'_2\|}$ とおく. $\|b_1\| = 1$ より $(b'_2, b_1) = (a_2, b_1) - (a_2, b_1)(b_1, b_1) = 0$ だから, $(b_2, b_1) = 0$ かつ $\|b_2\| = 1$ となる. 一般に, b_k ($1 \leq k < n$) が $(b_i, b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$) となるように定義されたとすると

$$b'_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k (a_{k+1}, b_i)b_i \quad \text{および} \quad b_{k+1} = \frac{b'_{k+1}}{\|b'_{k+1}\|} \quad (5.24)$$

とおく. $j = 1, 2, \dots, k$ に対して

$$(b'_{k+1}, b_j) = (a_{k+1}, b_j) - \sum_{i=1}^k (a_{k+1}, b_i)(b_i, b_j) = (a_{k+1}, b_j) - (a_{k+1}, b_j)(b_j, b_j) = 0.$$

これから, $(b_{k+1}, b_j) = 0$ ($j = 1, \dots, k$) かつ $\|b_{k+1}\| = 1$. この構成で $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ は正規直交系となる. さらに (5.24) より, 任意の k について $\{b_1, \dots, b_k\}$ は $a_1, \dots, a_k$ から構成される部分空間 $L(a_1, \dots, a_k)$ の基底をなしている. これから次の定理が得られる.

定理 6.4. $a_1, \dots, a_n$ を内積空間 V の 1 次独立なベクトルとする. このとき, 正規直交系 $\{b_1, \dots, b_m\}$ を構成して, 各 $k = 1, \dots, n$ について $\{b_1, \dots, b_k\}$ が部分空間 $L(a_1, \dots, a_k)$ の正規直交基底をなすようにできる.

次の系は定理から明らかである.

系 6.5. $0 \leq k \leq n$ とする. V を n 次元内積空間とし, $\{a_1, \dots, a_k\}$ を V の正規直交系とする. このとき, ベクトル $a_{k+1}, \dots, a_n$ を選んで, $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ が V の正規直交基底をなすようにできる.

例 6.6. R^3 の 1 次独立なベクトルの集合 $\left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ より正規直交基底をつくる.

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \quad b'_2 = a_2 - (a_2, b_1)b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \frac{b'_2}{\|b'_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}; \quad b'_3 = a_3 - (a_3, b_1)b_1 - (a_3, b_2)b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$\{b_1, b_2, b_3\}$ が求める正規直交基底である.

問 6.2. R^3 の基底 $\left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ から正規直交基底をつくれ.

問 6.3. $\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ を含む $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底をつくれ.

7 直交変換と直交行列

内積空間 V の 1 次変換 f が内積を変えないとき, すなわち V の任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.25)$$

をみたすとき, f を 直交変換 という.

定理 7.1. 1 次変換 $f : V \rightarrow V$ が直交変換であるための必要十分条件は, 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \quad (5.26)$$

が成り立つこと, すなわち f がベクトルの長さを変えないことである.

証明. $\operatorname{Re} \alpha$ を α の実数部, $\operatorname{Im} \alpha$ は α の虚数部とする. f を直交変換とする. (5.25) で $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ とおけば, $\|f(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$, すなわち $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ が得られる. 逆に, f が (5.26) をみたすとする. ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して $\|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ となるから

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 &= (f(\mathbf{x} + \mathbf{y}), f(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) \\ &= \|f(\mathbf{x})\|^2 + 2\operatorname{Re}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) + \|f(\mathbf{y})\|^2. \end{aligned}$$

また

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2$$

であるから右辺を比較して, $\operatorname{Re}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \operatorname{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. 次に, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ の代わりに $i\mathbf{x} + \mathbf{y}$ を代入すれば, 同じように $\operatorname{Re}(f(i\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \operatorname{Re}(i\mathbf{x}, \mathbf{y})$ となるので $\operatorname{Im}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \operatorname{Im}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を得る. $\square$

例 7.1. $\mathbf{R}^2$ の線形変換 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha' x_1 + \beta' x_2 \end{pmatrix}$ を直交変換とする. 定理 7.1 より

$$\begin{aligned} (\alpha x_1 + \beta x_2)^2 + (\alpha' x_1 + \beta' x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2, \text{ すなわち} \\ (\alpha^2 + \alpha'^2)x_1^2 + 2(\alpha\beta + \alpha'\beta')x_1x_2 + (\beta^2 + \beta'^2)x_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

が任意の x_1, x_2 について成り立つ. これから,

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = \beta^2 + \beta'^2 = 1, \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' = 0. \quad (5.27)$$

(5.27) は $\mathbf{R}^2$ の点 $A = (\alpha, \alpha')$ と $B = (\beta, \beta')$ が単位円周上にあり, 半径 OA と OB が直交することを意味するから, θ, θ' が定まって $(-\pi \leq \theta, \theta' \leq \pi)$,

$$\alpha = \cos \theta, \alpha' = \sin \theta, \beta = \cos \theta', \beta' = \sin \theta', \theta' = \theta \pm \frac{\pi}{2}.$$

これから, $\begin{cases} \alpha = \cos \theta, & \beta = -\sin \theta \\ \alpha' = \sin \theta, & \beta' = \cos \theta \end{cases}$ または $\begin{cases} \alpha = \cos \theta, & \beta = \sin \theta \\ \alpha' = \sin \theta, & \beta' = -\cos \theta \end{cases}$ すなわち, $\mathbf{R}^2$ の直交変換は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

の形をもつ.

f を V の直交変換, $\{a_1, \dots, a_n\}$ を V の正規直交基底とする.

$$(f(a_i), f(a_j)) = (a_i, a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

となるから, $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ は V の正規直交基底となる. 逆に, 1 次変換 f が正規直交基底を正規直交基底に移すとすれば, f は直交変換となる. これを示すために, $\{a_1, \dots, a_n\}$ を V の正規直交基底として, 任意のベクトル x に対して, $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ とする. $f(x) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$ で $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ は正規直交基底であるから

$$\begin{aligned} (f(x), f(x)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j (f(a_i), f(a_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = (x, x). \end{aligned}$$

これから, $\|f(x)\| = \|x\|$ となる. よって, 次の定理が成り立つ.

定理 7.2. 内積空間の線形変換 f が直交変換となる必要十分条件は, f が正規直交基底を正規直交基底に移すことである.

例 7.2. 例 7.1 より任意の θ に対して, 写像 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}$ は $\mathbf{R}^2$ の直交変換である. $\mathbf{R}^2$ の標準基底 $\{e_1, e_2\}$ は $f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ に移る. $\left\{\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}\right\}$ が正規直交基底となることはたやすく確認できる.

成分が実数の正方行列 A が

$${}^tAA = A{}^tA = E \quad ({}^tA \text{ は } A \text{ の転置行列})$$

をみたすとき, すなわち $A^{-1} = {}^tA$ となるとき, A を **直交行列** と呼んだ.

問 7.1.

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

は直交行列であることを示せ.

定理 7.3. 直交行列について次のことが成り立つ.

- (1) 単位行列 E は直交行列である.
- (2) A が直交行列ならば, $|A| = \pm 1$ となる.
- (3) A, B が直交行列ならば, その積 AB も直交行列である.
- (4) n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ とする. A が直交行列となる必要十分条件は,

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (5.28)$$

となることである.

証明. (1) は明らかである. ${}^tAA = E$ ならば $|A|^2 = |{}^tA||A| = |{}^tAA| = |E| = 1$ となるから, $|A| = \pm 1$. これで (2) は示された. また (3) は, A, B が直交行列ならば, ${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = E$, $AB{}^t(AB) = AB{}^tB{}^tA = E$ より得られる. 最後に

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \right)$$

に注意すれば, (5.28) が ${}^tAA = E$ と同値になることが確認できる. 同様にして $A{}^tA = E$ も確認できる. これで (4) は示された. $\square$

直交変換と直交行列の関連を示す次の定理がある.

定理 7.4. 1 次変換 $f: R^n \rightarrow R^n$ が直交変換となる必要十分条件は, R^n の標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ に関する f の表現行列が直交行列となることである.

証明. $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とする. $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する f の表現行列は, 定義により $\mathbf{a}_i$ を列ベクトルとする行列 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ である. f が直交変換ならば, $i, j = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = (f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

定理 7.3 (4) より A は直交行列となる. 逆に, A が直交行列であるとすれば, 再び定理 7.3 (4) より $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$ となる. 任意のベクトル $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$ に対して, $f(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$, $f(\mathbf{y}) = y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n$ となるから

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

すなわち, f は直交変換となる. $\square$

最後に R^n の線形変換 f について考察する. 線形変換 f が任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{y}))$$

をみたすとき, f を 対称変換 という. R^n の任意の正規直交基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を選ぶ. f を V の線形変換とする.

$$f(\mathbf{a}_i) = s_{1i}\mathbf{a}_1 + s_{2i}\mathbf{a}_2 + \cdots + s_{ni}\mathbf{a}_n = \sum_{k=1}^n s_{ki}\mathbf{a}_k \quad (i=1, \dots, n)$$

とすれば, f の $\{\mathbf{a}_i\}$ に関する表現行列は $A = (s_{ij})$ となる. f が対称変換ならば,

$$(f(\mathbf{a}_i), \mathbf{a}_j) = \left(\sum_{k=1}^n s_{ki}\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j \right) = s_{ji}, \quad (\mathbf{a}_i, f(\mathbf{a}_j)) = \left(\mathbf{a}_i, \sum_{k=1}^n s_{kj}\mathbf{a}_k \right) = s_{ij}$$

だから, $s_{ji} = s_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$) となる. 逆に, $s_{ji} = s_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$) ならば, $(f(\mathbf{a}_i), \mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_i, f(\mathbf{a}_j))$ が成り立つことから, 任意のベクトル $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n$ に対して

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (f(\mathbf{a}_i), \mathbf{a}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\mathbf{a}_i, f(\mathbf{a}_j)) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{y})) \end{aligned}$$

となるので, f は対称変換である. $\square$

正方行列 $A = (a_{ij})$ が $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), すなわち, $A = {}^t A$ となるとき, 実対称行列 とよばれる. 上のことから, 次の定理が証明された.

定理 7.5. f を R^n の線形変換とし, $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を R^n の任意の正規直交基底とする. f が対称変換となる必要十分条件は, $\{\mathbf{a}_i\}$ に関する f の表現行列が実対称行列となることである.

8 実対称行列と2次形式

2次形式を実対称行列を利用して変形すると、その形状がわかる。初めに次の固有値の性質からみる。

定理 8.1. 実対称行列 A の固有値は実数である。

証明. α を固有値とし、その固有ベクトルを x とする。

$$\alpha \|x\|^2 = \alpha(x, x) = (Ax, x) = (x, {}^tAx) = (x, Ax) = (x, \alpha x) = \bar{\alpha}(x, x) = \bar{\alpha} \|x\|^2$$

が成り立ち、 $\|x\| \neq 0$ より証明された。

定理 8.2. 実対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

証明. A を対称行列、 α, β を A の異なる固有値とし、それぞれに属する固有ベクトルを x, y とする。

$$\alpha(x, y) = (Ax, y) = (x, {}^tAy) = (x, Ay) = (x, \beta y) = \beta(x, y).$$

$\alpha \neq \beta$ だから $(x, y) = 0$ 、すなわち、 x と y は直交する。□

問 8.1. 次の対称行列は次数の数だけ、互いに直交する固有ベクトルが取れることを確かめよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

問 8.2. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ では直交する2本の固有ベクトルを取れないことを確かめよ。

実対称行列については、その固有値が実数となることが定理 8.1 で示された。さらに、直交行列によって対角化可能となることが示される。

定理 8.3. n 次の実対称行列 A は適当な直交行列 P によって次の形に対角化される。

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ここで、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は A の固有値である。逆に、 n 次の正方行列 A が直交行列によって対角化されるならば、 A は実対称行列である。

証明. 前半を帰納法により証明する. $n=1$ ならば, $P=E$ とすればよい. $(n-1)$ 次実対称行列について証明されたと仮定する. A を n 次実対称行列とし, α_1 を固有値の1つとする. α_1 に属する長さ1の固有ベクトルを $\mathbf{p}_1$ として, $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ を選ぶ. $Q = (\mathbf{p}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n)$ とおけば Q は直交行列となる. $A\mathbf{p}_1 = \alpha_1\mathbf{p}_1, (\mathbf{p}_1, \mathbf{b}_j) = 0$ ($j=2, \dots, n$) だから,

$$\begin{aligned} {}^tQ A Q &= {}^tQ A Q = {}^tQ (A\mathbf{p}_1 A\mathbf{b}_2 \dots A\mathbf{b}_n) \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{p}_1, \alpha_1\mathbf{p}_1) & (\mathbf{p}_1, A\mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{p}_1, A\mathbf{b}_n) \\ (\mathbf{b}_2, \alpha_1\mathbf{p}_1) & (\mathbf{b}_2, A\mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{b}_2, A\mathbf{b}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{b}_n, \alpha_1\mathbf{p}_1) & (\mathbf{b}_n, A\mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{b}_n, A\mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array} \right). \end{aligned}$$

の形となる. また, A が実対称行列であることにより ${}^t({}^tQ {}^tA Q) = {}^t({}^tQ A Q) = {}^tQ {}^tA Q = {}^tQ A Q$ となり, 上の行列は対称行列であることがわかる. したがって,

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array} \right) = {}^t \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{c} & {}^tB \end{array} \right)$$

となるから, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ かつ $B = {}^tB$. これから, $Q^{-1}A Q = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array} \right)$ となり, B は

$(n-1)$ 次の対称行列となる. ${}^tQ A Q$ と A の固有値は等しいから, B の固有値は $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ である. 帰納法の仮定より, 適当な $(n-1)$ 次の直交行列 R があって

$${}^tR B R = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

$S = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R \end{array} \right)$ とおけば,

$${}^tS = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & {}^tR \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R^{-1} \end{array} \right) = S^{-1}$$

となるから, S は直交行列である. $P = QS$ と定義すれば, P は直交行列で

$$\begin{aligned} {}^tPAP &= {}^tS {}^tQAQS = {}^tS({}^tQAQ)S \\ &= {}^tS \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array} \right) S = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & {}^tRBR \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

逆に, A が直交行列 P によって対角化されたとする. このとき, tPAP は対角行列であるから, もちろん対称行列である. そこで,

$${}^tP {}^tAP = {}^t({}^tPAP) = {}^tPAP.$$

このことと, P が正則であることから ${}^tA = A$ が得られる. $\square$

例 8.1. 次の対称行列を直交行列により対角化せよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解. (1) $f_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-4)$. 固有値 1, 2, 4 に属する固有ベクトルは, それぞれ

$$\mathbf{p}_1 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0).$$

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ は互いに直交しているので, 対角化するための直交行列は, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を正規化して $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とする. このとき, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

$$(2) f_B(x) = |xE - B| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x(x-3)^2 \text{ から, 固有値は } 0, 3 \text{ (重解)}$$

となる. 0 に属する固有ベクトルは $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 3 に属する固有ベクトルは $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

の形をもつ. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおき, グラム・シュミットの直交化法を用いる. $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$ だから, この2つを正規化して

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

つぎに,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3' &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{p}_1)\mathbf{p}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{p}_2)\mathbf{p}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これを正規化して, $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ を得る. ここで, $\mathbf{a}_1$ が $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ と直交していることから, $\mathbf{p}_3$ は $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ のみの1次結合となり, 直交化法の変形を行っても依然固有値3に属する固有ベクトルとなっている. これから, $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$

が求める直交行列であり, $PBP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる.

Point: 例8.1の(2)の固有値3に対する2つの固有ベクトルを初めから直交するように選んでくれば, わざわざグラム・シュミットを使う必要がない. 例えば $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と選べば, あとはベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ をそれぞれ長さを1にして, 順序よく並べたものを P とすればよい.

問 8.3. 次の実対称行列を直交行列を用いて対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n 個の変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する実数係数の2次同次式

$$Q = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (5.29)$$

を**実2次形式** または単に**2次形式** という. $a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji})x_i x_j$ だから, $a_{ij} + a_{ji} = 2a'_{ij}$ とおけば, $a'_{ij} = a'_{ji}$ となり

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a'_{ij} x_i x_j$$

と表せる. これから, a'_{ij} を改めて a_{ij} と書いて, 実2次形式 (5.29) は $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) となっているとする. (5.29) の係数行列より

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は実対称行列となる. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおけば, (5.29) は

$$Q = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} \quad (5.30)$$

の形をとる.

定理 8.4. 実2次形式 $Q = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x}$ は, 適当な直交変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ によって次のような形に変換される.

$$Q = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_r y_r^2 \quad (r \leq n) \quad (5.31)$$

ここで, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ は A の 0 でない固有値である.

証明. A は重複も含めて n 個の固有値をもつから, それを $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ と 0 ($(n-r)$ 重解) として, 適当な直交行列 P で

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_r & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right)$$

となる. 変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ を行えば

$$\begin{aligned} Q &= {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} = {}^t (P\mathbf{y}) A (P\mathbf{y}) = {}^t \mathbf{y} P^{-1} A P \mathbf{y} \\ &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_r & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_r y_r^2. \end{aligned}$$

となる。□

上の定理の形 (5.31) を2次形式の標準形といい、2次形式を標準形に直す直交変換を主軸変換、標準形に対する基底を主軸という。

例 8.2. 次の2次形式を主軸変換により標準形に直せ。

$$(1). Q_1 = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$(2). Q_2 = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + w^2 - 2xy.$$

(1) 係数行列は $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. よって $f_A(x)$ は $f_A(x) = |xE - A| = (x-2)^2 - 1 = (x-1)(x-3)$. これから、標準形は $Q_1 = u^2 + 3v^2$ となる。固有値 1, 3 に属する固有ベクトルはそれぞれ $p_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となるから、主軸変換の直交行列は $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ となり、主軸は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \\ x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(2) \text{ 係数行列は } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ よって } f_B(x) \text{ は}$$

$$f_B(x) = |xE - B| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)(x-1)^3$$

となり、固有値は 3, 1 (3 重解) である。これから、標準形は $Q_2 = 3u^2 + v^2 + s^2 + t^2$ とな

る。3 に属する固有ベクトルは $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \\ w=0 \end{cases}$ の非自明解だから $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($c \neq 0$) となる。

1 に属する固有ベクトルは $\begin{cases} x-y=0 \\ z, w; \text{任意} \end{cases}$ となるので、 $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形を

も. この4個のベクトルは互いに直交しているから, 前の2個を正規化すれば, 主軸変換の行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, 主軸は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} \\ x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

問 8.4. 次の2次形式を標準形に直せ.

- (1) $2x^2 + 6xy + 2y^2$ (2) $2x^2 - 2\sqrt{3}xy$
 (3) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 2zx$

第 5 章 練習問題

- 成分が実数である2行2列行列の集合 $M_2(\mathbf{R})$ はベクトル空間になる. このときの基底を求めよ.
- 例 1.5 で紹介したベクトル空間 $P_n(x)$ において, 次の写像が一次写像であることを示せ.
 - $f(x) \mapsto f'(x)$
 - $f(x) \mapsto \int_0^1 f(t)dt$
 - $f(x) \mapsto f(2x+3)$
 - $f(x) \mapsto \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n}$
- 次のように定義される $\mathbf{R}^3$ の写像は1次変換であるか?

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+y+z \\ -x \end{pmatrix} & (2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (3) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z+1 \end{pmatrix} & (4) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -y+z \\ -2 \\ x-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathbf{R}^3$ の次の1次変換の標準基底に関する表現行列を求めよ.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y+z \\ -y \\ x-z \end{pmatrix}$$

5. $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 F が

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

のとき, F の表現行列を求めよ.

6. $\mathbf{R}^2$ の基底 $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, と $\mathbf{R}^3$ の基底 $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, を選んだとき, B_1, B_2 に関する次の1次写像の表現行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

7. 次の行列が直交行列となるように a, b, c を定めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & b & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & c \end{pmatrix}$$

8. ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ によって生成される $\mathbf{R}^4$ の部分空間を W とするとき,

- (1). $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のうちから, 幾つかのベクトルを選んで W の基底を作れ.
- (2). この基底に幾つかの新しいベクトルを追加して $\mathbf{R}^4$ の基底を作れ.

9. $\mathbf{R}^4$ で次の基底から正規直交基底をつくれ.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

10. $\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

の正規直交基底を求めよ.

11. $\mathbf{R}^2$ において, 次の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ から $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ への基底変換の行列を求めよ.

$$(1) \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

12. $\mathbf{R}^3$ において, 次の 1 次変換 f の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}, \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ に関する表現行列を求めよ.

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y - z \\ x + 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$(1) \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

13. 次の行列の固有値とその固有値に対する固有空間の一つの基底を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ a & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, (a \neq 0)$$

14. 次の各 2 次形式について, (a) から (d) について答えよ.

- | | |
|--|--|
| (1) $x^2 + y^2 - 2xy$ | (2) $5x^2 - 3y^2 + 6xy$ |
| (3) $3x^2 + y^2 - 2xy$ | (4) $2x^2 + 18y^2 - 12xy \quad (\mathbf{R}^3)$ |
| (5) $2x^2 + y^2 + 2zx$ | (6) $x^2 + y^2 + 2yz + 2zx$ |
| (7) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$ | (8) $y^2 - z^2 + 4xy + 4zx$ |
| (9) $2x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2xy$ | (10) $-x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2yz$ |
| (11) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2yz + 2zx$ | (12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$ |

(a) ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ の形に表せ. (b) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(c) A を対角化する直行行列 P を求め, tPAP を求めよ.

(d) 標準形を求めよ.

第6章

正規行列と Jordan の標準形

行列を対角化できれば、微分方程式を解いたりすることができる。対称行列であれば直交行列で対角化できるし、 n 次正方行列が相異なる n 個の固有値をもてば正則行列で対角化できる。正規行列はユニタリー行列で対角化することができるので、初めにこれについて述べる。すべての行列が対角化できるわけではない。次に、対角行列に近づけるの考える。これによる標準形が Jordan の標準形である。行列も Polar 分解できるので、最後にこれについて述べる。この章では単に行列というときは n 次正方行列である。

1 正規行列

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は i と $-i$ であり、 i に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 、 $-i$ に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ により、 $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ をつくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

と対角行列になる。このように、行列の固有値は複素数となることもあるので、その成分も複素数のものを考えなければならない。この章では行列 $A = (a_{ij})$ の各成分 a_{ij} は複素数とする。したがって A を線形写像とみるときは、ベクトル空間 C^n 上のものとする。 C^n の

二つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対する内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 \overline{b_1} + \cdots + a_n \overline{b_n}$$

であるので $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$ である。

定義 1.1 (共役行列). 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対する共役行列 A^* とは

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

である. すなわち, $A^* = {}^t(\bar{A})$ とかける. 転置の性質から $(AB)^* = B^*A^*$ がわかる.

問 1.1. $(Ax, y) = (x, A^*y)$ を示せ.

定義 1.2. 行列 A について

- (1) $A^*A = AA^*$ をみたすとき「正規行列」
 - (2) $A^*A = AA^* = E$ をみたすとき「ユニタリ行列」
 - (3) $A^* = A$ をみたすとき「エルミート行列」
- という.

Point: 成分がすべて実数であればユニタリ行列は直交行列のことであり, エルミート行列は対称行列のことである. したがって, A がユニタリ行列であれば, A の逆行列は A^* であることが簡単にわかる. また行列 A が正規行列であれば, 問 1.1 より

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (AA^*x, x) = \|A^*x\|^2$$

であるので $\|Ax\| = \|A^*x\|$ をみたすことがわかる.

まず, 次のことは簡単にわかる.

定理 1.3. 行列 $A = (a_{ij})$ で $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ とおくと,

$$A: \text{ユニタリ行列} \iff \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n: \text{正規直交基底.}$$

問 1.2. 行列 A を正規行列とするととき, 次の問に答えよ.

- (1) α を複素数とするととき, 行列 $A + \alpha E$ もまた正規行列になることを示せ.
- (2) $Ax = \alpha x$ ならば $A^*x = \bar{\alpha}x$ を示せ (このことからエルミート行列の固有値は実数であることがわかる).
- (3) α, β を A の相異なる固有値とし x, y を α, β に対する固有ベクトルとするととき, $x \perp y$ であることを示せ.
- (4) A がユニタリ行列であれば, その固有値 α は $|\alpha| = 1$ をみたすことを示せ.

問 1.2 はより一般に α を 正規行列 A の固有値として, α の固有空間を

$$W(\alpha) = \{x \in C^n; (A - \alpha)x = 0\}$$

とするとき, $y \in W(\alpha)^\perp \implies Ay \in W(\alpha)^\perp$ である. したがって, 定理 1.3 を考えれば, 次の定理を得る.

定理 1.4. 行列 A が正規行列である必要十分条件は, あるユニタリー行列 U で対角化できる.

定理 1.4 を示す為に, 次の補題を示そう.

補題 1.5. M を C^n の部分空間とすると, $C^n = M \oplus M^\perp$ である. 従って, $\dim(M) = k$ のとき, $\dim(M^\perp) = n - k$ である.

証明. $\dim(M) = k$ として, その正規直交基底を $e_1, \dots, e_k$ とする. すなわち $M = L(e_1, \dots, e_k)$. 任意のベクトル $a \in C^n$ に対して

$$b = (a, e_1)e_1 + \dots + (a, e_k)e_k$$

とおき, さらに $c = a - b$ とおけば $b \in M$, $c \in M^\perp$ であり, かつ $a = b + c$ であるので, 補題 1.5 は示された.

定理 1.4 の証明. 帰納法で示す. n 次より小さい次数の正規行列はユニタリー行列で対角化できると仮定する. α を A の固有値とし, その固有空間 $W(\alpha)$ の次元を k とする. $W(\alpha)$ の正規直交基底を $a_1, \dots, a_k$ とする. このとき補題 1.5 により直交補空間 $W(\alpha)^\perp$ は $n - k$ 次元であるので $W(\alpha)^\perp$ から $n - k$ 個の正規直交基底 $b_1, \dots, b_{n-k}$ をとり, 行列 $W = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k})$ をつくる. $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k}$ は C^n の正規直交基底であるので, 上のことから

$$AW = W \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \\ \hline & & & 0 & B \end{array} \right)$$

このとき B は $n - k$ 次の正規行列となるので, 帰納法の仮定よりユニタリー行列 V で対角化できる. そこで

$$U = W \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

とすると U はユニタリー行列で, この U で A は対角化される. 逆の証明は明らかであるので, 定理は証明された.

Point: 要するに, 各固有値に対して固有ベクトルを選ぶ, このとき, 正規行列の異なる固有値では, 固有ベクトルは直交している. また, 重解である固有値では, 重複度ぶん互いに直交するように固有ベクトルを選ぶ. そしてそれぞれの長さを 1 にし, 順序よく並べて行列をつくれば, それが A を対角化するユニタリー行列である.

例 1.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ をユニタリー行列で対角化せよ.

解. $f_A(x) = x(x-2)$ より A の固有値は 0 と 2 である.

0 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ の長さを 1 にして $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, 2 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ の長さを 1 にして $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

そこで

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば U はユニタリー行列で

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる. $\square$

2 巾零行列

ある自然数 k に対して $A^k = O$ となる行列 A を巾零行列という. 例えば, 対角成分がすべて 0 の上三角行列は巾零行列である. ここでは, この行列の標準形について述べる. これはジョルダンの標準形のために必要である. まず次の性質を持つことはすぐに分かる. 行列 A は n 次正方行列で n 次元ベクトル空間 V 上の線形写像と考える.

定理 2.1. $Ax = \alpha x$ ($x \neq 0$) ならば $\alpha = 0$. すなわち巾零行列の固有値は 0 のみ.

証明. $A^k = O$ とすれば $A^k x = \alpha^k x = 0$ であるので $\alpha = 0$. $\square$

従って, A の固有多項式 $f_A(x) = x^n$ である.

定理 2.2. A を巾零行列とすれば, ある正則行列 P で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & c \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とできる. ただし $a, b, \dots, c$ は 0 または 1 である.

証明. $A^k = O$ とする. A^i の値域を V_i と書くことにする. すなわち $R(A^i) = V_i$. 条件より $R(A^k) = V_k = \{0\}$ である. このとき, $A^j x = A^{j-1}(Ax)$ であることから $V_j \subset V_{j-1}$ が分かる (実際には $V_j = A(V_{j-1})$ であることに注意する.) ここで $R(A^j) \neq \{0\}$ であつて $R(A^{j+1}) = \{0\}$ と仮定する. $R(A^j) \neq \{0\}$ であるので, $\dim(V_j) = n_j$ と仮定すれば V_j の基底を

$$A^j \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}$$

と選ぶ. すると, 上のベクトルの組に

$$A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^{j-1} \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}$$

を加えたものはベクトル空間 V_{j-1} の一次独立なベクトルの系である. なぜなら, まず $V_j \subset V_{j-1}$ より $A^j x \in V_{j-1}$ である. そして

$$a_1 A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j)} + \dots + a_{n_j} A^{j-1} \mathbf{a}_{n_j}^{(j)} + b_1 A^j \mathbf{a}_1^{(j)} + \dots + b_{n_j} A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)} = 0 \quad (6.1)$$

と仮定する. これに左から A をかけて $A^{j+1} = O$ であるので

$$a_1 A^j \mathbf{a}_1^{(j)} + \dots + a_{n_j} A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)} = 0$$

を得る. $A^j \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}$ は V_j の基底であつたので一次独立, 従つて $a_1 = \dots = a_{n_j} = 0$. そして, (6.1) に戻ると

$$b_1 A^j \mathbf{a}_1^{(j)} + \dots + b_{n_j} A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)} = 0$$

となり, $A^j \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}$ は基底であつたので一次独立, 従つて $b_1 = \dots = b_{n_j} = 0$. これで

$$A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^{j-1} \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}, A^j \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}$$

はベクトル空間 V_{j-1} の一次独立なベクトルの系であることが分かつた. 同時に $\dim(V_{j-1}) \geq 2 \times n_j$ であることが分かつたので, $\dim(V_{j-1}) = n_{j-1}$ とする ($n_{j-1} \geq 2 \times n_j$). そこでベクトル空間 V_{j-1} の基底を

$$A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^{j-1} \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}, A^j \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}$$

と

$$A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j-1)}, \dots, A^{j-1} \mathbf{a}_{n_{j-1}-2 \times n_j}^{(j-1)}$$

とで取る. このように次々に遡つて V_i ($i = 1, \dots, j-1$) の基底を取り, 最後に V の基底を取る. V の基底は

$$\begin{aligned} & A^j \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^j \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}, \\ & A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, A^{j-1} \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}, A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j-1)}, \dots, A^{j-1} \mathbf{a}_{n_{j-1}-2 \times n_j}^{(j-1)}, \\ & \dots, \\ & \mathbf{a}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{a}_{n_j}^{(j)}, \dots, \mathbf{a}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{a}_{n_0}^{(0)} \end{aligned}$$

と取る (最後の添え数 n_0 は非常に大きな行列でなければ難しくない). そこで正則行列 P を

$$P = (A^j \mathbf{a}_1^{(j)} \quad A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j)} \cdots A \mathbf{a}_1^{(j)} \quad \mathbf{a}_1^{(j)} \quad A^j \mathbf{a}_2^{(j)} \cdots \mathbf{a}_1^{(0)} \cdots \mathbf{a}_{n_0}^{(0)})$$

とする. このとき

$$\begin{aligned} AP &= A(A^j \mathbf{a}_1^{(j)} \quad A^{j-1} \mathbf{a}_1^{(j)} \cdots A \mathbf{a}_1^{(j)} \quad \mathbf{a}_1^{(j)} \quad A^j \mathbf{a}_2^{(j)} \quad A^{j-1} \mathbf{a}_2^{(j)} \cdots \mathbf{a}_1^{(0)} \cdots \mathbf{a}_{n_0}^{(0)}) \\ &= (0 \quad A^j \mathbf{a}_1^{(j)} \cdots A^2 \mathbf{a}_1^{(j)} \quad A \mathbf{a}_1^{(j)} \quad 0 \quad A^j \mathbf{a}_2^{(j)} \cdots 0 \cdots 0) \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & c \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることが分かる. ただし $a, b, \dots, c$ は 0 か 1. 従って定理は証明された. $\square$

定理 2.2 の右の行列を, 巾零行列 A の標準形という.

Point. 一般論では難しくなってしまったが, 次数が 3, 4 くらいであれば各ベクトル空間 V_i の次元は小さい数なので, 正則行列 P の作り方 (並べ方) に注意すれば難しくない!

例 2.1. 次の巾零行列の標準形を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解. (1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = O \quad \text{さらに} \quad A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので $\dim R(A^2) = 1$ で,

$$A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{とさらに} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので, 正則行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{として} \quad P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

となるので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

(2)

$$B^2 = O \quad \text{であり} \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので, $\dim R(B) = 1$ で,

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{とさらに} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を取り, 正則行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{として} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

Point. 対角線のすぐ上の対角線上にいくつかの 1 が並ぶことは, 正則行列 P の作り方から了解できたであろう.

問 2.1. 次の巾零行列の標準形を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Jordan の標準形

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のときは,

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & b \\ c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

より

$$\begin{aligned}
 f_A(A) &= A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = O
 \end{aligned}$$

である.

上の性質を一般化したのが大変有名な Cayley-Hamilton の定理である. この定理は行列の最も基本的な定理であり, いろいろな場面に登場する重要なものである. 初めに種々の定理の証明に利用される準備をする.

補題 3.1. 正方行列 A は適当な正則行列 P で $P^{-1}AP$ が上三角行列とできる.

証明. n 次の行列 A の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ として, 次数についての帰納法で示す. 行列 A が 2 次の行列のとき, 固有値 α_1 の固有ベクトルを $\mathbf{x}_1$ とする. そして, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が $\mathbf{C}^2$ の基底になるようにベクトル $\mathbf{x}_2$ を選ぶ. ここで, $P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ とおくと, P は正則で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

となり, $n=2$ の場合は示せた. ここで, $n-1$ 次の場合まで補題 3.1 が成り立つと仮定する.

行列 A が n 次のとき, A の固有値 α_1 に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1$ とし, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ が $\mathbf{C}^n$ の基底となるようにベクトル $\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ を選ぶ. ここで, $P_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ とすると, P_1 は正則で,

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

を得る. ここで, A_{n-1} は $n-1$ 次行列で, 固有値は $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ であるので, 帰納法の仮定より, ある $n-1$ 次の正則行列 Q で

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とできる. そこで,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

とおくと, P_2 は正則で

$$P_2^{-1}(P_1^{-1}AP_1)P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ 0 & Q^{-1}A_{n-1}Q & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となり, $P = P_1P_2$ とおくことによって, $P^{-1}AP$ は上三角行列になることがわかり, 補題は示せた.

定理 3.2 (Cayley-Hamilton). 行列 $A = (a_{ij})$ に対する固有多項式を $f_A(x)$ とすると,

$$f_A(A) = O.$$

証明. 補題 3.1 によって行列 A は, ある正則行列 P で

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\text{上三角行列})$$

とできる. したがって, $f_{P^{-1}AP}(x) = f_A(x)$ であるから $f_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$. したがって

$$\begin{aligned} f_A(A) &= (A - \alpha_1 E) \cdots (A - \alpha_n E) \\ &= (PBP^{-1} - \alpha_1 E) \cdots (PBP^{-1} - \alpha_n E) \\ &= P(B - \alpha_1 E) \cdots (B - \alpha_n E)P^{-1}. \end{aligned}$$

よって

$$P^{-1}f_A(A)P = (B - \alpha_1 E) \cdots (B - \alpha_n E).$$

$W_k = L(e_1, \dots, e_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とおくと, $\mathbf{x}_k \in W_k$ のとき

$$\begin{cases} (B - \alpha_1 E)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \\ (B - \alpha_k E)\mathbf{x}_k \in W_{k-1} \end{cases}$$

となるので, 任意の $\mathbf{x} \in C^n = W_n$ に対して

$$\begin{aligned} (B - \alpha_1 E) \cdots (B - \alpha_n E)\mathbf{x} &= (B - \alpha_1 E) \cdots (B - \alpha_{n-1} E)\mathbf{x}_{n-1} \\ &\quad \dots \\ &= (B - \alpha_1 E)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

したがって, $(B - \alpha_1 E) \cdots (B - \alpha_n E) = O$ であるので定理は示された. $\square$

Point: Cayley-Hamilton の定理はどんな行列でも, 必ず $f(A) = O$ となる多項式 $f(x)$ があることを保証している. また, 行列 A の逆行列は A の多項式で表せることを示している.

定義 3.3. 行列 A とその1つの固有値 α とその重複度 k に対して,

$$(A - \alpha)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となるベクトル $\mathbf{x}$ の全体のつくる固有空間を $\widetilde{W}(\alpha)$ と表し, 広い意味の固有空間という.

ここで, 次の2つの定義を用意しておく.

定義 3.4 (和空間). ベクトル空間 C^n の部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_k$ に対して,

$$W_1 + W_2 + \dots + W_k = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_i \in W_i (i = 1, 2, \dots, k)\}$$

と定義し, これを部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_n$ の **和空間** とよぶ.

問 3.1. ベクトル空間 C^n の部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_k$ の和空間もまた C^n の部分空間になることを示せ.

そして, 特に和空間に関しては次の定義が大事である.

定義 3.5 (直和). ベクトル空間 C^n の部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_k$ に対して, $V = W_1 + W_2 + \dots + W_k$ としたとき, すべての i ($i = 1, 2, \dots, k$) に対して

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{\mathbf{0}\}$$

が成り立てば, 部分空間 V は $W_1 + W_2 + \dots + W_k$ の **直和** であるといい,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$$

と表す.

問 3.2. ベクトル空間 $W_1, W_2, \dots, W_k$ を内積空間 V の部分空間とし, $V = W_1 + W_2 + \dots + W_k$ としたとき, 次の条件は同値であることを示せ.

- (1). $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$.
- (2). $\mathbf{x}_i \in W_i, \mathbf{y}_i \in W_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) において, $\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_1 + \dots + \mathbf{y}_k$ ならば, $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

問 3.3. 内積空間 V の部分空間 W_1, W_2 に対して, 次を示せ.

- (1). $V = W_1 + W_2, W_1 \perp W_2$ ならば, $V = W_1 \oplus W_2$ かつ $W_2 = W_1^\perp$.
- (2). W_1 が有限次元のとき, $V = W_1 \oplus W_1^\perp$.

定理 3.6. 行列 A の固有多項式 $f_A(x)$ を

$$f_A(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_j)^{k_j}$$

とおくと,

$$C^n = W(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus W(\alpha_j).$$

定理 3.6 を示すために次の補題を用意する.

補題 3.7. m 個の行列 $A_1, A_2, \dots, A_m$ が次の条件

$$(1). A_1 + A_2 + \cdots + A_m = E,$$

$$(2). A_i A_j = O \quad (i \neq j)$$

をみたすならば,

$$C^n = R(A_1) \oplus R(A_2) \oplus \cdots \oplus R(A_m)$$

が成り立つ.

証明. 最初に,

$$C^n = R(A_1) + R(A_2) + \cdots + R(A_m)$$

を示す. $C^n \supseteq R(A_1) + R(A_2) + \cdots + R(A_m)$ は自明であるので,

$$C^n \subseteq R(A_1) + R(A_2) + \cdots + R(A_m) \quad (6.2)$$

を示せばよい. 任意の $x \in C^n$ に対して, 条件 (1) より, $x = A_1 x + A_2 x + \cdots + A_m x$ が成り立つ. ここで, $y_1 = A_1 x, y_2 = A_2 x, \dots, y_m = A_m x$ とおくと, $x = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ かつ $y_i \in R(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) であるから, (6.2) が示せた.

次に直和であることを示す. 直和の定義より,

$$R(A_i) \cap (R(A_1) + \cdots + R(A_{i-1}) + R(A_{i+1}) + \cdots + R(A_m)) = \{0\} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

を示せばよい. まず, 条件 (1), (2) より,

$$A_i = A_i(A_1 + \cdots + A_m) = A_i^2 \quad (6.3)$$

に注意する. $y \in R(A_i) \cap (R(A_1) + \cdots + R(A_{i-1}) + R(A_{i+1}) + \cdots + R(A_m))$ とすると, あるベクトル $x_k \in C^n$ ($k = 1, 2, \dots, m$), に対して, $y = A_i x_i, y = A_1 x_1 + \cdots + A_{i-1} x_{i-1} + A_{i+1} x_{i+1} + \cdots + A_m x_m$ が成り立つ. そこで, 条件 (2), (6.3) より,

$$y = A_i x_i = A_i^2 x_i = A_i y = A_i(A_1 x_1 + \cdots + A_{i-1} x_{i-1} + A_{i+1} x_{i+1} + \cdots + A_m x_m) = 0$$

となり, 補題 3.7 が示せた. $\square$

定理 3.6 の証明. Cayley-Hamilton の定理より

$$f_A(A) = (A - \alpha_1 E)^{k_1} \cdots (A - \alpha_j E)^{k_j} = O. \quad (6.4)$$

ここで, $f_A(x)$ で因数 $(x - \alpha_i)^{k_i}$ を除いた多項式を $f_i(x)$ とかくことにする. すなわち

$$f_i(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_{i-1})^{k_{i-1}} (x - \alpha_{i+1})^{k_{i+1}} \cdots (x - \alpha_j)^{k_j}.$$

j 個の多項式 $f_1(x), \dots, f_j(x)$ は互いに素な多項式だから (付録 2 を参照)

$$g_1(x) \cdot f_1(x) + \cdots + g_j(x) \cdot f_j(x) = 1$$

となる多項式 $g_1, \dots, g_j(x)$ がある. そこで, $A_i = g_i(A) \cdot f_i(A)$ とおくと

$$A_1 + \cdots + A_j = E. \quad (6.5)$$

また, $i \neq t$ に対しては $f_i(x) \cdot f_t(x)$ は $f_A(x)$ で割り切れるので, (6.4) より $f_i(A) \cdot f_t(A) = O$. よって,

$$A_i A_t = O \quad (i \neq t) \quad (6.6)$$

が成り立つ. よって, (6.5) と (6.6) から各 A_i は補題 3.7 の 2 条件をみたすから,

$$C^n = R(A_1) \oplus R(A_2) \oplus \cdots \oplus R(A_j).$$

が成り立つ. 以下, $R(A_i) = \widetilde{W(\alpha_i)}$ ($i = 1, 2, \dots, j$) を示せばよい.

最初に $R(A_i) \subseteq \widetilde{W(\alpha_i)}$ を示す.

$$(x - \alpha_i)^{k_i} f_i(x) = f_A(x)$$

であるから, (6.4) より

$$(A - \alpha_i E)^{k_i} f_i(A) = f_A(A) = O.$$

よって

$$(A_i - \alpha_i E)^{k_i} A_i = (A_i - \alpha_i E)^{k_i} g_i(A) \cdot f_i(A) = g_i(A) \{(A_i - \alpha_i E)^{k_i} f_i(A)\} = O.$$

よって任意の $x \in C^n$ に対して, $A_i x \in \widetilde{W(\alpha_i)}$, すなわち

$$R(A_i) \subseteq \widetilde{W(\alpha_i)}.$$

次に, $\widetilde{W(\alpha_i)} \subseteq R(A_i)$ を示す. $x \in \widetilde{W(\alpha_i)}$ とすると, ある自然数 k_i について

$$(A - \alpha_i E)^{k_i} x = 0.$$

そして, $g_i(x) \cdot f_i(x)$ は因数 $(x - \alpha_i)$ を含まないので, $(x - \alpha_i)^{k_i}$ と $g_i(x) \cdot f_i(x)$ に対して

$$h_1(x) \cdot (x - \alpha_i)^{k_i} + h_2(x) \cdot g_i(x) \cdot f_i(x) = 1$$

となる多項式 $h_1(x), h_2(x)$ がある. したがって,

$$h_1(A) \cdot (A - \alpha_i E)^{k_i} + h_2(A) \cdot g_i(A) \cdot f_i(A) = E.$$

$(A - \alpha_i E)^{k_i} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ より

$$h_2(A)A_i \mathbf{x} = h_2(A) \cdot g_i(A) \cdot f_i(A) \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

$h_2(A)$ と A_i は可換だから

$$A_i h_2(A) \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

よって, $\mathbf{x} \in R(A_i)$. ゆえに $\widetilde{W(\alpha_i)} \subseteq R(A_i)$.

以上のことから $\widetilde{W(\alpha_i)} = R(A_i)$ がわかり, 定理 3.6 の証明ができた. $\square$

したがって, 次の定理を得る.

定理 3.8. 行列 A の固有多項式を $f_A(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k}$ とするとき,

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

ただし, 各 A_i は n_i 次正方行列で $A_i = \alpha_i E + N_i$ (N_i は巾零行列) の形である.

証明. 定理 3.6 の (2) より, $C^n = \widetilde{W(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus \widetilde{W(\alpha_k)}$ であるので, C^n の基底として

$$\mathbf{a}_1^1, \dots, \mathbf{a}_{n_1}^1 \in \widetilde{W(\alpha_1)}, \mathbf{a}_1^2, \dots, \mathbf{a}_{n_2}^2, \dots, \mathbf{a}_1^k, \dots, \mathbf{a}_{n_k}^k \in \widetilde{W(\alpha_k)}$$

をとる. そこで,

$$P = (\mathbf{a}_1^1, \dots, \mathbf{a}_{n_1}^1, \mathbf{a}_1^2, \dots, \mathbf{a}_{n_2}^2, \dots, \mathbf{a}_1^k, \dots, \mathbf{a}_{n_k}^k)$$

として行列をつくると, これは正則行列で $AW(\alpha_i) \subset \widetilde{W(\alpha_i)}$ であるから

$$AP = P \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

となるので

$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

したがって

$$(A - \alpha_i E)^{n_i} = P \begin{pmatrix} (B_1 - \alpha_i E)^{n_i} & & & \\ & \ddots & & \\ & & (B_i - \alpha_i E)^{n_i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & (B_k - \alpha_i E)^{n_i} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

よって

$$(A - \alpha_i E)^{n_i} P = P \begin{pmatrix} (B_1 - \alpha_i E)^{n_i} & & & \\ & \ddots & & \\ & & (B_i - \alpha_i E)^{n_i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & (B_k - \alpha_i E)^{n_i} \end{pmatrix}$$

であるが, ベクトル $\alpha_1^i, \dots, \alpha_{n_i}^i$ については

$$(A - \alpha_i E)^{n_i} \alpha_j^i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n_i)$$

であるので,

$$(B_i - \alpha_i E)^{n_i} = O.$$

したがって, $B_i - \alpha_i E = N_i$ とおくと, N_i は巾零行列で,

$$B_i = \alpha_i E + N_i$$

となるので, 定理は示された. $\square$

Point: 行列 A を定理 2.4 の形にしたものを, 行列 A の **Jordan の標準形** という.

例 3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ の Jordan の標準形を求める.

解. $f_A(x) = (x-1)^2(x+1)$, $(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & -12 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $A+E = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

$\text{Ker}(A-E)^2$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\text{Ker}(A+E)$ より $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3+4 & 3-2-1 \\ 0 & 3-4+2 & -3+4-1 \\ 0 & 0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4 行列の絶対値と不等式

定義 4.1. 行列 A に対して, $(Ax, x) \geq 0$ が, すべてのベクトル $x \in C^n$ について成立するとき, A を正値行列といい, $A \geq 0$ で表す.

$A \geq 0$ の行列は $A^* = A$ かつ固有値もすべて 0 以上であることと同じことである. また, 問 1.1 により $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$ だから A^*A は正値行列である. シェルミー特行列でもあるので, あるユニタリー行列 U で

$$U^*A^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる. ここで, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は A^*A の固有値であるから, 必ず $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) である. そこで, 行列

$$|A| = U \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \quad (6.7)$$

を **行列の絶対値** と定義する. このため, この章では行列 A の行列式は $\det(A)$ とかく.

$$(AU)^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ であるので, } AU = (a_1 \dots a_n) \text{ とすると,}$$

$$(a_i, a_j) = \alpha_i \delta_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\delta_{ij} \text{ はクロネッカーのデルタ})$$

である. ここで, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は 0 でなく $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ とすると,

$$a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

であるので, C^n の正規直交基底として

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}a_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}a_k, b_{k+1}, \dots, b_n$$

をつくり, 行列 V を

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}a_1 \dots \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}a_k, b_{k+1} \dots b_n \right)$$

とすると, V はユニタリー行列で

$$AU = V \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{\alpha_n} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

と (6.7) より,

$$A = V \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\alpha_n} & \\ 0 & & 0 & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} U^* = V U^* |A|$$

となる. $V U^*$ はユニタリー行列だから, n 次正方行列は必ずユニタリー行列と正値行列の積に分解できる. 以上のことから

定理 4.2 (polar-分解). 行列 A は正値行列 $|A|$ とユニタリー行列 U の積 $A = U|A|$ に分解できる.

Point: 複素数 z は $z = r e^{i\theta}$ とかけるが, 行列 A もそのような形でかけることを示している.

正値行列はエルミート行列でなので, あるユニタリー行列 U で

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\alpha_i \geq 0)$$

とできるので, $p > 0$ に対して

$$A^p = U \begin{pmatrix} \alpha_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^p \end{pmatrix} U^*$$

と定義する. たとえば,

$$A^{\frac{1}{2}} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$

である.

2つの正値行列 $A, B \geq 0$ に対して, $A \geq B$ とは $A - B \geq 0$ のときとする. すなわち, $A - B$ の固有値がすべて 0 以上のとき, $A \geq B$ である. このとき, $A \geq B$ でも $A^2 \geq B^2$ は一般に成立しない.

例 4.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ になる. $A - B$ の固有値は 2, 0 より, $A \geq B$ がわかる. 一方,

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

となり, $A^2 - B^2$ の固有値は $3 + \sqrt{10} > 0$, $3 - \sqrt{10} < 0$ となり, $3 - \sqrt{10}$ の固有ベクトルを x とすると $((A^2 - B^2)x, x) = (3 - \sqrt{10})|x|^2$ となるので, 負となり $A^2 \not\geq B^2$ である.

Point: 行列 A の固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (重複度ぶん繰り返している) とすると

$$\det(A) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

となるので, 2 次の行列 A の場合, $\det(A) < 0$ ならば, 固有値は正と負である. すなわち $A \not\geq 0$ である.

しかし $0 \leq p \leq 1$ に対しては, 次の Löwner-Heinz の不等式が成り立つ.

定理 4.3 (Löwner-Heinz の不等式). 正値行列 A, B に対して, $A \geq B \geq 0$ ならばすべての $0 \leq p \leq 1$ に対して $A^p \geq B^p$ が成り立つ.

定理 4.3 は指数 p が $0 \leq p \leq 1$ の場合, 正値行列は一般の正の数と同じように両辺 p 乗しても順序が変わらないということをいっているが, 行列の場合は上の例 4.1 でもわかるように正の数と同じように 2 乗や 3 乗では順序は保存されない. このことに対して次の定理が成り立つ.

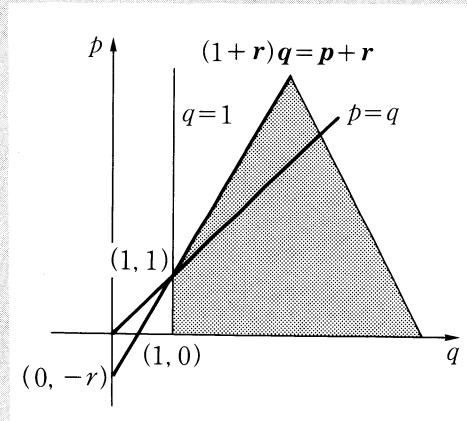
定理 4.4 (古田不等式).

正値行列 A, B が $A \geq B \geq 0$ であれば, 任意の $r \geq 0$ に対して,

$$(1) \quad (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

$$(2) \quad (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

がすべての $p \geq 0, q \geq 1, (1+r)q \geq p+r$ について成り立つ.



定理 4.4 は 3 変数 p, q, r を使って不等式をつくっているが, これらの変数の取る範囲を図に表したのが, 上の図である.

例 4.2. 例 4.1 と同様に, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, 例 4.1 では, $A \geq B \geq 0$ かつ $A^2 \not\geq B^2$ であったが, 定理 4.4 において $p = r = q = 2$ とおくと,

$$(BA^2B)^{\frac{1}{2}} \geq B^2 \tag{6.8}$$

が成り立つことがわかる. 実際,

$$\begin{aligned}(BA^2B)^{\frac{1}{2}} - B^2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0\end{aligned}$$

となり, (6.8) が成り立つことがわかる.

Löwner-Heinz と古田不等式を証明するために, 少し準備をする.

$f(x)$ を x の多項式とする. x に A を代入した行列 $f(A)$ を考える. ただし定数項には E をかける. たとえば $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ であれば 行列 $f(A)$ とは

$$f(A) = 3A^2 - 2A - 5E$$

である. また, 行列 A のすべての固有値の集合を $\sigma(A)$ とかく. このとき次の定理が成り立つ.

定理 4.5 (Frobenius の定理). n 次正方行列 A と多項式 $f(x)$ に対して $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ である.

証明. 行列 A は, 補題 3.1 によってある正則行列 P で

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とできる. ここで,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

とすれば,

$$f(B) = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} a_i\alpha_1^i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_i\alpha_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

となり, $f(A)$ の固有多項式は

$$\begin{aligned}|xE - f(A)| &= |xE - P^{-1}f(A)P| = |xE - f(P^{-1}AP)| \\ &= |xE - f(B)| = (x - f(\alpha_1)) \cdots (x - f(\alpha_n))\end{aligned}$$

であるから, $f(A)$ の固有値は $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ であることがわかる.

Point: 上のことから A^n の固有値は A^n を計算する必要はなく, A の固有値を n 乗すればよい.

定理 4.6. 二つの n 次正方行列 A, B について $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ である.

証明. まず,

$$\begin{aligned} 0 \in \sigma(AB) &\iff |AB| = 0 \iff |A||B| = 0 \\ &\iff |B||A| = 0 \iff |BA| = 0 \iff 0 \in \sigma(BA) \end{aligned}$$

であるので, $\alpha (\neq 0)$ に対して $\alpha \notin \sigma(AB) \iff \alpha \notin \sigma(BA)$ を示せばよい. この関係は

$$(BA - \alpha E)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \{B(AB - \alpha E)^{-1}A - E\}$$

であることからわかる. なぜなら, $\alpha \notin \sigma(AB)$ とすると, $AB - \alpha E$ は正則である. ここで, $R = \frac{1}{\alpha} \{B(AB - \alpha E)^{-1}A - E\}$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} (BA - \alpha E)R &= (BA - \alpha E) \cdot \frac{1}{\alpha} \{B(AB - \alpha E)^{-1}A - E\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \{BAB(AB - \alpha E)^{-1}A - \alpha B(AB - \alpha E)^{-1}A - BA + \alpha E\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \{B(AB - \alpha E)(AB - \alpha E)^{-1}A - BA + \alpha E\} = E. \end{aligned}$$

同様に, $R(BA - \alpha E) = E$ となるので, $R = (BA - \alpha E)^{-1}$ である. すなわち $\alpha \notin \sigma(BA)$ を得る. 以上のことから $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ は示された.

行列 A は $\mathbb{C}^n$ 上の写像と考えられるので, A のノルム $\|A\|$ を

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (6.9)$$

と定義する. 定義から $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ が成り立つことがわかる. もし, 行列 A が対角行列

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

であれば

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$$

であることが了解できるであろう. したがって, このことは $\|A\|$ は固有値の絶対値の最大数である. 同様に A が正規行列であれば, あるユニタリー行列 U で

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる. ユニタリ一行列 U はベクトルの長さを変えないので, このときも

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$$

である. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は行列 A の固有値であるが, 一般に

$$r_s(A) = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$$

とかき, A の「スペクトル半径」という. 定理 4.6 より $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ であるから $r_s(AB) = r_s(BA)$ である.

Point: スペクトル半径のときは A と B を交換してよい.

α を A の固有値とし, その固有ベクトルを x とする. $x \neq 0$ であるので $y = \frac{1}{\|x\|}x$ とすると $\|y\| = 1$ であり, さらに $Ay = \alpha y$ であるので, 行列のノルムの定義 (6.9) より, $|\alpha| \leq \|A\|$ であるから, 一般には

$$r_s(A) \leq \|A\|$$

であるが, 正規行列などは $r_s(A) = \|A\|$ となっている.

問 4.1. 次を示せ.

$$(1) \|A^*\| = \|A\|. \quad (2) \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

正値行列 A に対しては, 次の補題が成り立つ.

補題 4.7. 行列 A を正値行列とすると, $E \geq A \iff 1 \geq r_s(A) (= \|A\|)$ である.

証明. Frobenius の定理より

$$\sigma(E - A) = \{1 - \alpha : \alpha \in \sigma(A)\}$$

が成り立つので, 補題 4.7 は示される. $\square$

正値行列 A が正則のとき, 任意のベクトル x に対して $x = Ay$ と取ると $(A^{-1}x, x) = (A^{-1}Ay, Ay) = (y, Ay) = (Ay, y) \geq 0$ より A^{-1} も正値である.

問 4.2. A, B を正則な正値行列とすると, $A \geq B$ ならば $A^{-1} \leq B^{-1}$ を示せ.

Löwner-Heinz の不等式の証明. $\varepsilon > 0$ を任意の数として, 行列 $A + \varepsilon E$ と $B + \varepsilon E$ をつくと $A + \varepsilon E \geq B + \varepsilon E$ であり, どちらも Frobenius の定理より正則な行列である. これらの行列に対して不等式を示せば $\varepsilon \rightarrow 0$ として, 目的の不等式を得ることができるので, A, B は正則な行列であると仮定してよい. $0 \leq p, t \leq 1$ に対して $A^p \geq B^p$ と $A^t \geq B^t$ が成り

立つとする. このとき $A^{\frac{p+t}{2}} \geq B^{\frac{p+t}{2}}$ が成り立つことを示す. ただし $A^0 = B^0 = E$ と定義する. $A^p \geq B^p$ より $A^{-\frac{p}{2}}$ を両方から挟むと $E \geq A^{-\frac{p}{2}} B^p A^{-\frac{p}{2}} = (B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}})^* B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}}$ であるので, 補題 3.5 と問 4.1 (2) より $1 \geq \|(B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}})^* (B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}})\| = \|B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}}\|^2$ が成り立つ. 同様に $1 \geq \|B^{\frac{t}{2}} A^{-\frac{t}{2}}\|$ も成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} r_s(A^{-\frac{p+t}{4}} B^{\frac{p+t}{2}} A^{-\frac{p+t}{4}}) &= r_s(EA^{-\frac{p+t}{4}} B^{\frac{p+t}{2}} A^{-\frac{p+t}{4}}) \\ &= r_s(A^{\frac{t-p}{4}} A^{\frac{p-t}{4}} A^{-\frac{p+t}{4}} B^{\frac{p+t}{2}} A^{-\frac{p+t}{4}}) \quad (E = A^{\frac{t-p}{4}} A^{\frac{p-t}{4}}) \\ &= r_s(A^{\frac{p-t}{4}} A^{-\frac{p+t}{4}} B^{\frac{p+t}{2}} A^{-\frac{p+t}{4}} A^{\frac{t-p}{4}}) \quad (r_s(CD) = r_s(DC) \text{ を利用}) \\ &= r_s(A^{-\frac{t}{2}} B^{\frac{t}{2}} B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}}) \leq \|A^{-\frac{t}{2}} B^{\frac{t}{2}} B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}}\| \\ &\leq \|A^{-\frac{t}{2}} B^{\frac{t}{2}}\| \cdot \|B^{\frac{p}{2}} A^{-\frac{p}{2}}\| \leq 1 \end{aligned}$$

$A^{-\frac{p+t}{4}} B^{\frac{p+t}{2}} A^{-\frac{p+t}{4}}$ は正値行列だから, 補題 4.7 により

$$A^{-\frac{p+t}{4}} B^{\frac{p+t}{2}} A^{-\frac{p+t}{4}} \leq E$$

である. したがって $A^{\frac{p+t}{2}}$ を両側から挟むと

$$B^{\frac{p+t}{2}} \leq A^{\frac{p+t}{2}}$$

を得る. 以上のことから, $p = 1, t = 0$ とすると, $\frac{1}{2}$ にも不等式は成り立つ. さらに $p = 1, t = \frac{1}{2}$ とすると $\frac{3}{4}$ にも成り立つ. このことをくり返せば $0 \leq p \leq 1$ のすべての p に対して成り立つ. これで定理は示された. $\square$

古田不等式の証明. Löwner-Heinz の不等式の証明と同様に, 古田不等式の証明においても, 行列 A, B を正則と仮定してよい. まず $p \geq 1, r \geq 0$ に対して

$$A \geq B \geq 0 \implies (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq B^{1+r}$$

が成り立つことを示す.

Step 1. $0 \leq r \leq 1$ のとき不等式が成り立つことを示す. 定理 3.2 より, ユニタリー行列 U で $B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}} = U|B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}|$ と polar-分解する. よって,

$$\begin{aligned} (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} &= \{B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}} (B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}})^*\}^{\frac{1+r}{p+r}} = \{U|B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}| (U|B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}|)^*\}^{\frac{1+r}{p+r}} \\ &= (U|B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}|^2 U^*)^{\frac{1+r}{p+r}} = U|B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}|^2^{\frac{1+r}{p+r}} U^* \quad (U \text{ はユニタリーだから}) \\ &= U|B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}| \cdot |B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}|^2^{\frac{1-p}{p+r}} \cdot |B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}}| U^* \\ &= B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}} (A^{\frac{p}{2}} \underline{B}^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1-p}{p+r}} (B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}})^* \\ &\geq B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}} (A^{\frac{p}{2}} \underline{A}^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1-p}{p+r}} (B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}})^* \quad (-1 \leq \frac{1-p}{p+r} \leq 0 \leq r \leq 1 \text{ と定理 4.3 から}) \\ &= B^{\frac{r}{2}} A^{\frac{p}{2}} (A^{\frac{p}{2}} A^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{1-p}{p+r}} A^{\frac{p}{2}} B^{\frac{r}{2}} = B^{\frac{r}{2}} A B^{\frac{r}{2}} \geq B^{1+r} \end{aligned}$$

よって, $0 \leq r \leq 1$ の場合は証明できた.

Step 2. $1 \leq r \leq 3$ のとき不等式が成り立つことを示す. $p \geq 1, 0 \leq r_1 \leq 1$ として $A_1 = (B^{\frac{r_1}{2}} A^p B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{1+r_1}{p+r_1}}$, $B_1 = B^{1+r_1}$ とおくと, Step 1 より, $A_1 \geq B_1 \geq 0$ がいえる. これに もう一度 Step 1 を適用すると,

$$(B_1^{\frac{r_2}{2}} A_1^{p_2} B_1^{\frac{r_2}{2}})^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}} \geq B_1^{1+r_2}$$

がすべての $p_2 \geq 1, 0 \leq r_2 \leq 1$ で成り立つことがわかる. つまり,

$$\left\{ B^{\frac{(1+r_1)r_2}{2}} (B^{\frac{r_1}{2}} A^p B^{\frac{r_1}{2}})^{\frac{(1+r_1)p_2}{p+r_1}} B^{\frac{(1+r_1)r_2}{2}} \right\}^{\frac{1+r_2}{p_2+r_2}} \geq B^{(1+r_1)(1+r_2)}.$$

ここで, p_2 を $p_2 \cdot \frac{1+r_1}{p+r_1} = 1$ にとり $r_2 = 1$ とおくと, この式は

$$(B^{\frac{1+2r_1}{2}} A^p B^{\frac{1+2r_1}{2}})^{\frac{2(1+r_1)}{p+1+2r_1}} \geq B^{2(1+r_1)}.$$

さらに, $r = 1 + 2r_1$ とおくと $1 \leq r \leq 3$ で,

$$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq B^{1+r}.$$

となり, これは step 1 で得られたものと全く同じ式になるが, r の範囲が広がっていることがわかる. このことを繰り返すことによって, まさに実数版の帰納法的にすべての $0 \leq r$ に対して古田不等式が成り立つことがわかる. $\square$

第 6 章 練習問題

1. 次の行列が正規行列であることを確かめ, ユニタリー行列で対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2+4i & 0 & 2-4i \\ 0 & 4 & 0 \\ 2-4i & 0 & 2+4i \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2+i & i & 1 \\ -i & 2+i & i \\ 1 & -i & 2+i \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 次の巾零行列の標準形を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $A \neq O$ なる巾零行列 A は対角化不可能であることを示せ.

4. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (4) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & (6) & \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

5. 次の行列の Polar 分解を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} \\
 (4) & \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & (6) & \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2+4\sqrt{3} & 2+4\sqrt{3} \\ -2-4\sqrt{3} & 2 & -2+4\sqrt{3} \\ 2-4\sqrt{3} & -2-4\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6. 次の行列の $\frac{1}{2}$ 乗を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\
 (4) & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 14 & 13 & 9 \\ 13 & 14 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} & (6) & \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 14 & -11 \\ -3 & -11 & 14 \end{pmatrix} & (7) & \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 3 & i \\ -1 & -i & 1 \end{pmatrix} \\
 (8) & \begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -i & 3 & i \\ 1 & -i & 3 \end{pmatrix} & (9) & \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \\
 (10) & \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

7. 次の行列 A の Jordan 標準形を求め、それを利用することによって A^n を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 \\ -9 & -3 & 18 \\ -5 & -3 & 13 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

8. 行列 A に対して e^A を

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

で定義する. このとき $AB = BA$ ならば $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つことが知られている. これを踏まえて, 次の行列 A に対して e^A を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

第7章

工学への応用

線形代数は物理学などの科学や工学に重要な応用をもち不可欠なものであるが、ここでは簡単な例をいくつか挙げて、どのように行列が使われているかを示す。

1 線形システムと状態方程式

機械などのように、入力に応じて出力を出すものをシステムという。科学では、現象をすべて理想化して（モデル化）1つのシステムと考えて、理論的に扱うのである。システムのうち、入力が2倍、3倍になれば、出力も2倍、3倍というように比例して変化し、2種類の入力があったときに、それぞれに対する出力を合わせたものを出力するものを線形システムという。身の回りにある機械で線形なものがあるだろうか。

線形写像とはどんなもので、行列とどんな関係があるか考えると、線形システムとよばれる理由と、なぜ行列が使われるのかわかるのではないだろうか。

システムのうち、出力がその時刻の入力だけから決まるものを静的システムという。100円硬貨1枚を10円硬貨10枚に両替する機械は静的システムといえるだろう。

実用上は、出力がその時点の入力だけでなく、それまでの入力やシステム内部の状態に依存する場合が大事である。このようなものを動的システムという。出力がシステムの最終的な変数であるのに対して、過去の入力や内部状態を表す中間の変数が必要になり、状態変数とよんでいる。

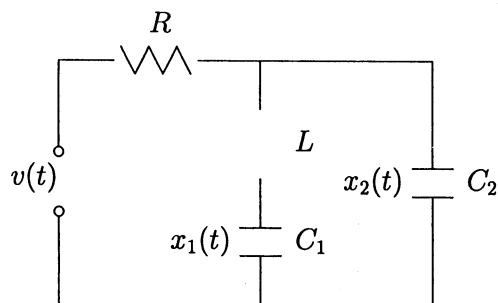
例 1.1. 電気回路 時刻 t における回路の両端の電圧を $v(t)$ とし、これがシステムへの入力だと思ふ。容量 C_1 のコンデンサの両端電圧を

$x_1(t)$ 、容量 C_2 のコンデンサの両端の電圧を $x_2(t)$ 、

インダクタンス L のコイルに流れる電流を $x_3(t)$

とし、これらを状態変数とする。また、 C_1 と C_2 の

電圧を出力 $y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とする。



コンデンサ C_1 を流れる電流は $C_1 x'_1(t)$ で コイル L に流れる電流と等しいから, 次の式が成り立つ.

$$x_3(t) = C_1 x'_1(t).$$

したがって,

$$x'_1(t) = \frac{1}{C_1} x_3(t).$$

一方, L による逆起電力 $Lx'_3(t)$ と C_1 の両端電圧の和が, C_2 の両端電圧に等しいから,

$$Lx'_3(t) + x_1(t) = x_2(t)$$

変形して,

$$x'_3(t) = -\frac{1}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}x_2(t).$$

最後に, 抵抗 R による電圧降下と C_2 の両端電圧の和が, 全電圧 $v(t)$ に等しく, R を流れる電圧は C_2 と L を流れる電流の和だから,

$$R(C_2 x'_2(t) + x_3(t)) + x_2(t) = v(t).$$

これより,

$$x'_2(t) = -\frac{1}{RC_2}x_2(t) - \frac{1}{R}x_3(t) + \frac{1}{RC_2}v(t).$$

これらの連立方程式をまとめると, 次のように表せる.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{RC_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC_2} \\ 0 \end{pmatrix} v. \quad (7.1)$$

このような, 状態変数と入力のに成り立つ方程式を **状態方程式** という.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

が成り立ち, 出力と入力, および, 状態変数の間の方程式を **出力方程式** とよんでいる.

一般的にまとめておこう. 動的システムは微分方程式で記述される. ここでは, 常微分方程式で表される **集中定数システム** を扱うことにする. 入力変数が $v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)$ の m 個, 状態変数が $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ の n 個, 出力変数が $y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t)$ の l 個のシステムを考える. 3つのベクトル

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{pmatrix}$$

をそれぞれ, 入力変数ベクトル, 状態変数ベクトル, 出力変数ベクトル という.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

とする (成分ごとに微分したもの).

制御理論では, 連立の 1 階常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (7.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (7.4)$$

で表されるものを考える. (7.3) を 状態方程式, (7.4) を 出力方程式 という.

多くの場合, $\mathbf{f}$ と $\mathbf{g}$ は線形性をもち,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t) \quad (7.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{v}(t) \quad (7.6)$$

で表される. このようなシステムを 線形時変システム とよぶ.

問 1.1. $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ はそれぞれ何行何列の行列か考えよう ($\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}$ および $\frac{d}{dt}\mathbf{x}$ の成分の個数を考えればわかる.).

例 (1.1) の式 (7.1) と (7.5), および (7.2) と (7.6) を比べると,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{RC_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(t) = \mathbf{O}$$

になっていることがわかる.

このように, 4 つの行列が時間 t に関係せず一定のとき, システムは 線形時不変システム とよばれる (以下, 成分が定数である行列を 定数行列 ということにする.).

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t) \quad (7.8)$$

線形時不変システムは理論的にも扱いやすく、多くのシステムを近似できるので便利であるし、重要でもある。状態変数の個数 (n) は、システムの入力に対する振る舞いを決定するのに必要な最小限 (独立) の内部状態の数である。状態変数はいろいろな選びかたができるが (したがって、行列 A, B, C, D も異なってくるが)、システムの性質はその選びかたによらず記述されることがわかっているで心配する必要はない。これは、線形写像の表しかたは、基底の選びかたによって変化することに対応する。出力方程式 (7.6) は、 A, B, C, D が決まれば、出力が入力変数と状態変数のどんな 1 次結合であるかを表しているだけである。だから、システムの振る舞いを知るには、(7.5) の状態方程式を導き、それを解くことが重要である。

2 システムの安定性

線形時不変システム (7.7), (7.8) では、 $t=0$ のときの状態変数ベクトル $\mathbf{x}(0)$ と $t \geq 0$ の区分的連続な $\mathbf{v}(t)$ が与えられると、 $\mathbf{x}(t)$ はただ 1 つに決まることが知られている。

特に、 $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{0}$ のとき、(7.7) は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (7.9)$$

となり、自由システム とよばれる。

定理 2.1. 自由システム (7.9) の解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0) \quad (7.10)$$

である。ここで、

$$e^{tA} = E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots \quad (7.11)$$

は、指数関数の行列における類推である。

問 2.1. 次のことを確かめよう。ただし、 A は定数行列である。

$$e^0 = E \quad (7.12)$$

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(s+t)A} \quad (7.13)$$

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \quad (7.14)$$

≪ 行列を微分する ≫ 行列 X の各成分が t の式になっているとき、各成分を t で微分した行列を求めることを、行列 X を t で微分する という。われわれはすでに、ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の微分 $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$ を使ってきている。行列 $X(t)$ の微分も同じく、 $\frac{d}{dt}X(t)$ とかくことにする。

例 2.1. 定数行列 X に対して, 行列 tX は X の各成分を t 倍したものである. そこで

$$\frac{d}{dt}(tX) = X \quad (7.15)$$

整数 n に対して

$$\frac{d}{dt}(t^n X) = nt^{n-1}X \quad (7.16)$$

が成り立つ.

定理 2.2. 定数行列 A に対して次の等式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \quad (7.17)$$

証明. 定義 (7.11) から

$$e^{tA} = E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

ここで, A^n も定数関数であることに注意して, 上の例 2.1 を使うと,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= O + A + \frac{1}{2!}(2t)A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(nt^{n-1})A^n + \frac{1}{(n+1)!}\{(n+1)t^n\}A^{n+1} + \cdots \\ &= A + tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \frac{1}{n!}t^nA^{n+1} + \cdots \\ &= A(E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots) \\ &= Ae^{tA} \quad \square \end{aligned}$$

定理 2.1 の証明 は上の定理からもう明らかだろう. このように, 指数関数は普通の実数の関数の世界だけでなく, 行列の世界でも大切な役目を果たす. (複素数の世界でも, ものすごく重要なことは, もう知っている人もいるかも知れない).

今, 自由システム (7.9) において, 行列 A が n 次正方行列で次のように対角化されたとしよう.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

問 2.2. 対角行列の掛け算と指数関数の定義を思い出して, 次のことを確かめよう.

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

したがって,

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} \quad (7.20)$$

問 2.3. 次の行列に対し e^A を計算しなさい ($t = 1$ の場合である).

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

線形時不変の自由システムは, どんな初期条件 $\mathbf{x}(0)$ に対しても

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (7.21)$$

のとき **漸近安定** という. 現実には, 文字どおりシステムがだんだん一定の状態に落ち着くことを意味している.

問 2.4. 漸近安定の場合, なぜ, 近づくのが $\mathbf{0}$ でなければならないかを, 方程式 (7.9) の形から考えてみよう.

方程式 (7.9) の解 $\mathbf{x}(t)$ が次の式 (7.10)

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}(0)$$

で与えられたことと上の等式 (7.20) から, 次のことがわかる.

定理 2.3. 自由システムが漸近安定であるための必要十分条件は

A のすべての **固有値の実数部分** が負である

ことである (実数 a, b に対してオイラーの公式 $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$ より $|e^{a+ib}| = e^a$ であることに注意.).

ここにも, 線形代数における固有値の重要性が発揮されている.

多くのシステム制御理論の教科書をざっと眺めると, 行列がそこらじゅうにあふれているものが多い. これ以上のことは, 皆さんの今後の学習にまかせて, 違う応用に移る.

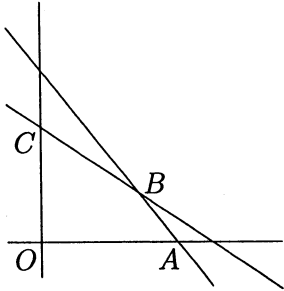
3 線形計画法

いくつかの1次方程式と1次不等式で決められた条件の下で, 与えられた1次関数の最大値や最小値を求める問題が **線形計画法** である. 生産, 輸送, 経営などには資源, 設備, 労働力, コストなどで種々の制約があり, その下で利益, 効率を最大にすることへ応用されている.

次の例のように, 考慮する要素の数や条件が少なければ, 図を用いて簡単に処理できる.

例 3.1. 条件 $\begin{cases} 2x + 3y \leq 10 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ の下で, $z = 3x + 5y$ を最大にせよ.

解 条件をみたす領域は図の 4 角形 $OABC$ の内部で, 4 頂点 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B\left(\frac{20}{7}, \frac{10}{7}\right)$, $C\left(0, \frac{10}{3}\right)$ のどれかで z は最大になる. 実際に計算すると, 点 C で最大値 $\frac{50}{3}$ をとることがわかる.



変数が 3 つならば, 立体的に図をかけばなんとかなるが, それ以上になると図を思い浮かべることが難しくなる. 頂点の数も増えてくるので, それらを全部求めて値を計算するのも時間がかかる. そこで, 効率的に最大値を求める方法がいくつか考え出された. ここで紹介するのは, シンプレクス法 である.

例 3.2. ある工場では SE, S, M, E の 4 種の車を生産している. それぞれを 1 台つくるのにかかる材料費, 人件費, 設備投資費は表のようにになっている (単位は同等に評価できるように調整してある).

	SE	S	M	E	利用限度
材料	1	1	1	1	110
人件費	2	1	3	2	220
設備	3	2	0	0	150

また, 1 台あたりの利益はそれぞれ, 40 万円, 30 万円, 50 万円, 20 万円である. 利益を最大にする生産計画はどんなものか.

解 SE, S, M, E の各車種の生産台数を x, y, z, w とすると,

$$\text{条件} \begin{cases} x + y + z + w \leq 110 \\ 2x + y + 3z + 2w \leq 220 \\ 3x + 2y \leq 150 \\ x, y, z, w \geq 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

の下で, $m = 4x + 3y + 5z + 2w$ を最大にせよという問題になる. 4 変数なので図をかくのは難しいし, 不等式は方程式より扱いにくい.

そこで, 新しく 補助の変数 を加えて 不等式を方程式に変える. 上の式 (7.22) で

$$\begin{cases} s = 110 - (x + y + z + w) \\ t = 220 - (2x + y + 3z + 2w) \\ u = 150 - (3x + 2y) \end{cases} \quad (7.23)$$

とおくと, 次の問題と同値になる.

$$\text{条件} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + w + s & \leq & 110 \\ 2x + y + 3z + 2w + t & \leq & 220 \\ 3x + 2y & + u & \leq 150 \\ 4x + 3y + 5z + 2w & = & m \\ x, y, z, w, s, t, u \geq 0 \end{array} \right. \quad (7.24)$$

の下で, $m = 4x + 3y + 5z + 2w$ を最大にせよ.

したがって, m をパラメータと考えて, この方程式の解で m の最も大きい値に対応するものを求めればよい. なお, s, t, u は生産に使われない余剰にあたる.

方程式の解を考えると, m は一番下の式にしか出てこないから, 上の3つの式を考えればよいことに注意する. $x = y = z = w = 0$ とすると, $s = 110, t = 220, u = 150$ という解が得られ, $m = 0$ である (これは, まったく生産しない場合にあたり, ここから出発して, 利益である m を増やすように生産計画を立てていく). m の式を見ると, x, y, z, w のどれかを増やせば, m も増えることがわかる. 係数を比べると, z を増やしたときの効果が最大であることがわかるので, x, y, w は0のまま, z がどこまで増やせるか調べてみる (z を選ぶことに本質的な意味はない).

$$\begin{array}{rcl} z + s & = & 110 \\ 3z + t & = & 220 \end{array} \quad (7.25)$$

であるから, 上の式からは $z \leq 110$, 下の式からは $z \leq \frac{220}{3}$ で, z は $\frac{220}{3}$ まで増やせることがわかる. このときの解は,

$$x = y = w = t = 0, z = \frac{220}{3}, s = \frac{110}{3}, u = 150$$

で, $m = \frac{1100}{3}$ に増加している.

ここで, 基本変形を使って, $z = \frac{220}{3}$ とした根拠になっている方程式 (7.24) の第2式以外の式から z を消去すると次のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & + w + 3s - t & = 110 \\ 2x + y + 3z + 2w & + t & = 220 \\ 3x + 2y & & + u = 150 \\ 2x + 4y & - 4w - 5t & = 3m - 1100 \end{array} \right. \quad (7.26)$$

ここで m の式を見ると, x と y を増加させれば m は増大するが, w と t を増やすと, m は減ってしまうことがわかる. そこで $x = w = t = 0$ のままで, y をいくつまで増やせるか調べる.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2y & + 3s & = 110 \\ y + 3z & & = 220 \\ 2y & + u & = 150 \end{array} \right. \quad (7.27)$$

それぞれ $y \leq 55$, $y \leq 220$, $y \leq 75$ となり, y は 55 まで増やせる. 先ほどと同じようにして, 式 (3) から y を消去する.

$$\begin{cases} x + 2y & + w + 3s - t & = 110 \\ 3x & + 6z + 3w - 3s + 3t & = 330 \\ 2x & - w - 3s + t + u & = 40 \\ & - 6w - 6s - 3t & = 3m - 1320 \end{cases} \quad (7.28)$$

このとき, $x = w = s = t = 0$, $y = 55$, $z = 55$, $u = 40$ で $m = 440$ である.

m の式を見ると, w, s, t の係数はみな負だから, これらを増やすと m は減少してしまう. したがって, このときの $m = 440$ が最大値である. $\square$

この例では, $u = 40$ で設備投資にまだ余裕があるが, これ以上設備投資をすると, かえって利益が減ってしまうことになる.

また, 2 回の手続きで処理しており, 頂点をすべて求めてそこでの m の値を求めるより, 効率がよい.

ここでの手順を整理してみる.

- (1). 補助の変数を使って, 不等式から連立方程式をつくる.
- (2). 目的の m の式で係数が正の変数を 1 つ選び, 他の式と各変数が正であるという条件から, その変数がいくつまで増やせるかを見る.
- (3). 上の最大値を判定するのに使った式以外から, その変数を基本変形で消去する.
- (4). m の式を見て, 係数が正のものがあれば, 同じ操つくを繰り返す.
- (5). m の式でどの変数の係数も負になったら, それらを 0 とおいた m が最大である.

行列の形で例 3.2 の処理を表すと次のようになる. 判定の基準になった係数には下線を引いてある.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 110 \\ 2 & 1 & \underline{3} & 2 & 0 & 1 & 0 & 220 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \underline{2} & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 110 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 220 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150 \\ 2 & 4 & 0 & -4 & 0 & -5 & 0 & 3m - 1100 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 110 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 330 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -3 & 0 & 3m - 1320 \end{pmatrix}$$

問 3.1. 条件
$$\begin{cases} x + y + z \leq 170 \\ x + y \leq 80 \\ x \leq 15 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$
 の下で, $m = 3x + 2y + z$ の最大値を求めよ.

与えられた関数 m の最小値を求めるには, $-m$ の最大値を求めればよいのだが, この場合の処理は, 意外と複雑になることが多い. そこで, 通常は **双対定理** というものを使って, 同値な最大値問題を考える. 詳しくは述べないが, 転置行列が関係している.

また, 線形計画法は最適戦略を考える, **ゲーム理論** にも応用される.

4 2次形式と固有値

第5章では2次形式の標準形を2次曲線の分類に利用した. ここでは, 2次形式の値を問題にしたい.

対称行列 A で定まる2次形式 ${}^t x A x$ に対し, 座標変換 $x = P x'$ を行くと,

$${}^t (P x') A (P x') = {}^t x' ({}^t P A P) x'$$

に変化する. ここで ${}^t P A P$ が対角行列になったとすると, 2次形式は

$$d_1 x_1'^2 + d_2 x_2'^2 + \cdots + d_n x_n'^2$$

の形になる. これを ${}^t x A x$ の標準形という. うまく直交行列を選んで2次形式を標準形にすることができ, 得られた標準形の係数には A の固有値が現れる, というのが第5章で学んだことである. ここでは, P を直交行列に限っていないことに注意する.

例 4.1. 2次形式 $x^2 + 2xy + 4y^2$ は,

$$(x + y)^2 + 3y^2 \quad \text{と} \quad 4\left(y + \frac{1}{4}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2$$

の両方で表される. このときの標準形と座標変換の行列は, それぞれ次のようになる.

$$x'^2 + 3y'^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4x'^2 + \frac{3}{4}y'^2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

このように, 標準形は1つとは限らない. しかし, 次のことが知られている.

定理 4.1. (シルベスターの慣性律) 与えられた2次形式のどの標準形を比べても, 正の係数の個数および負の係数の個数は同じになっている.

問 4.1. 次の2次形式の標準形を2つ作りなさい.

(1) $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$

(2) $xy - yz - zx$

n 次対称行列 A で定まる 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ の標準形で, 正の係数が p 個, 負の個数が q 個あったとする. 必要なら座標軸を入れ替える座標変換をして, x'_1 から x'_p までの係数が正で, 次の x'_{p+1} から x'_{p+q} までの係数が負, x'_{p+q+1} から最後の x'_n までの係数が 0 としてよい. つまり, $d_1, d_2, \dots, d_{p+q} > 0$ として,

$$y = d_1 x'^2_1 + \dots + d_p x'^2_p - d_{p+1} x'^2_{p+1} - \dots - d_{p+q} x'^2_{p+q}$$

になっているとする. ここで, いくつかの場合に分けて考えてみる.

- (1). $p = n$ のとき: $q = 0$ だから, 原点以外では $y > 0$ で, 原点で最小値 0 をとる. このとき, 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ 及び A は **正定値** であるという.
- (2). $q = n$ のとき: 逆に, 原点で最大値 0 をとり, 他の点では $y < 0$ である. 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ は **負定値** であるという.
- (3). $p < n, q = 0$ のとき: このときは負にはならないが, 原点以外の

$$x'_1 = x'_2 = \dots = x'_p = 0$$

をみたす点で $y = 0$ になる. これらの点の全体が $n - p$ 次元部分空間であることはすぐ確かめられるが, 実はそれが $\text{Ker}A = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$ になっていることを示すのも,それほど難しくない. このときは, ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ は **非負定値** であるといわれる.

- (4). $p = 0, q < n$ のとき: 逆に $\text{Ker}A$ の点で $y = 0$ になり, それ以外では $y < 0$ である. このときは **非正定値** とよばれる.

次のことは明らかだろう.

定理 4.2. 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が正定値であるためには, A の固有値がみな正であることが必要十分である.

次の定理はそれほど明らかではないが, 行列式が使えるので便利である.

定理 4.3. 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が正定値であるためには, $r = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0$$

が成り立つことである.

問 4.2. 2 次形式 $2x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - xy + yz + zw - wx$ は正定値であることを示せ.

次に, 変分原理について述べよう.

問 4.3. 次の等式を確かめよ.

$${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x}_0A\mathbf{x}_0 = {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2{}^t\mathbf{x}_0A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

定理 4.4. (変分原理) 正値対称行列 A とベクトル $\mathbf{b}$ から定まる $\mathbf{x}$ の 2 次式

$$f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x} + c$$

は, 1 次方程式

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (7.29)$$

の解 $\mathbf{x}_0$ で最小値をとる.

証明 問 4.3 より

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x}_0A\mathbf{x}_0 + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x} - 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x}_0 \\ &= {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2{}^t\mathbf{x}_0A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2{}^t\mathbf{b}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2({}^t\mathbf{x}_0A + {}^t\mathbf{b})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

ここで,

$${}^t(A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{x}_0{}^tA + {}^t\mathbf{b} = {}^t\mathbf{x}_0A + {}^t\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

だから,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) > 0$$

が $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ について成り立つ. $\square$

最後に固有値, 固有ベクトルの重要さを示す定理を述べる.

定理 4.5. 対称行列 A に対して, $NR(A) = \{{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1\}$ とする. つまり, $NR(A)$ は長さ 1 のベクトルに対する 2 次形式の値の全体である. このとき, $NR(A)$ は閉区間で, その両端は A の固有値のなかで最小のものと最大のものである. また, その両端の値をとる点は, それぞれの固有値に対する固有ベクトルである.

5 その他の応用

ここで挙げた行列の応用は狭い範囲に限られている. たとえば, フーリエ変換は機械工学や電気回路はもちろん, X 線分析, MRI などの広い範囲で使われている. もともとは積分で定義されたものだが, これをコンピュータなどの機械で扱うには数値化する必要があり, 離散フーリエ変換というものが使われている. これを表すには行列が不可欠である.

また, 現代の物理学は相対論と量子力学が柱になっているが, どちらでも行列が重要な役目を果たし, 量子論の舞台はヒルベルト空間というある種の線形空間, 状態はそこでの固有値である.

そもそも, 微分, 積分は関数から関数への線形な作用であるから, 線形代数と密接につながっていて, 決してばらばらなものではないのである.

付録

1 付録 1: 階段行列の一意性

階段行列は, 行列 A によって一意的に定まることが, 次の定理からわかる.

定理 1.1. (m, n) 行列 A が階段行列, P が m 次正則行列で, PA も階段行列であるならば, $PA = A$ である.

証明. A は第 2 章 (2.1) のような階段行列であるとする. $P = (P_1 P_2 \cdots P_m)$ とするとき

$$P_j = e_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

であることを示せばよい.

いま仮に, ある $s \leq n$ について, $P_j = e_j$ ($j = 1, \dots, s-1$), $P_s \neq e_s$ であったとする. このとき $P_n = {}^t(P_1, P_2, \dots, P_m)$ とすると

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & P_1 \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & P_2 & * \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & * & \cdots & * & P_{s-1} & * \\ & & & & & & & & & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_s & \\ & & & & & & & & & & & & & & \vdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & P_m & \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

P が正則行列だから $(P_s, \dots, P_m) \neq (0, \dots, 0)$. よって PA が階段行列であるから $P_s = e_s$ でなければならないが, これは仮定に反する. ゆえに (A.1) が成り立ち, 主張を得る.

2 付録 2 : 2 次・3 次の行列式と面積・体積

行列式の幾何学的意味について, ここで考えておく.

平面の 2 つのベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ に対して, 実数 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を次のように定める:

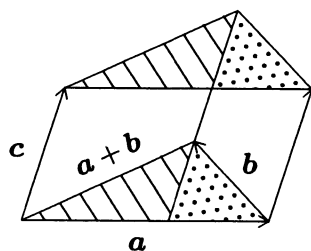
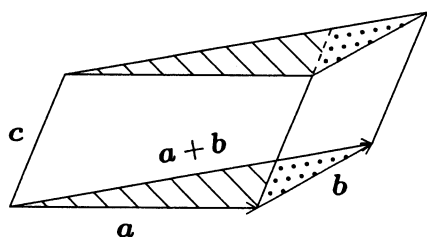
- (1) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の絶対値は, OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.
 (2) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の符号は, $\mathbf{a}$ を正の向き (時計と反対回り) に 180° 以内回転して $\mathbf{b}$ の方向が得られるときは正, 負の向きに 180° 以内回転して $\mathbf{b}$ の方向が得られるときは負である. ただし, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のどちらかが $\mathbf{0}$ であるときや, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の向きが同じか逆であるときは, $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ とする. 次が成り立つ.

$$D(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (8.2)$$

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + D(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad (8.3)$$

$$D(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = D(\mathbf{a}, k\mathbf{b}) = kD(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (8.4)$$

ここで, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はベクトル, k は実数である. たとえば, (8.2) は下図からわかる.



定理 2.1. $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

証明. $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ とすると,

$$D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0, \quad D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \quad D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1.$$

いま,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$$

であるから, (8.2) ~ (8.4) から,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_1b_1D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_1b_2D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_2b_1D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + a_2b_2D(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\ &= a_1b_2 - a_2b_1. \quad \square \end{aligned}$$

例 2.1. $A(1, 6)$, $B(5, 2)$ と O を頂点とする 3 角形の面積は,

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-28| = 14.$$

例 2.2. 直線 $l: ax + by + c = 0$ の上に点 $A(x_1, y_1)$ をとる. 点 $B(x_1 + b, y_1 - a)$ も l 上の点である. いま, l 上にない点 $P(x_0, y_0)$ をひとつとると, $\triangle ABP$ の面積は

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1 + b - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_1 - a - y_0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-a(x_1 - x_0) - b(y_1 - y_0)| = \frac{1}{2} |ax_0 + by_0 + c|.$$

$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから, 点 P と直線 l との距離は,

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であることがわかる.

次に 3 次の行列式について同様のことを考える. 空間に 3 つのベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ があるとし, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のどの 2 つも平行でないとする. 3 点 O, A, B を含む平面を地面と考え, $\mathbf{a}$ の方向を東, $\mathbf{b}$ の方向を東西に対して北寄りとし, $\mathbf{c}$ の方向が上向きであるか下向きであるかによって, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 右手系 あるいは 左手系 であるという. 実数 $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ を次の (1), (2) で定める:

(1) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ の絶対値は, OA, OB, OC を 3 辺とする平行 6 面体の体積に等しい.

(2) $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ の符号は, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が右手系のときは 正, 左手系のときは 負 である.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のどれかが $\mathbf{0}$ であるときや, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の中の 2 つが平行のときは, $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ と定める.

(8.2), (8.3), (8.4) と同様な次の式が成り立つ.

$$D(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (8.5)$$

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{b}', \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}) \quad (8.6)$$

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{c}') = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}') \quad (8.7)$$

$$D(k\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, k\mathbf{b}, \mathbf{c}) = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, k\mathbf{c}) = kD(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (8.8)$$

ただし, $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{c}, \mathbf{c}'$ はベクトル, k は実数である.

定理 2.2. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ のとき,

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

証明. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ とすると,

$$D(e_1, e_2, e_3) = D(e_2, e_3, e_1) = D(e_3, e_1, e_2) = 1$$

$$D(e_2, e_1, e_3) = D(e_1, e_3, e_2) = D(e_3, e_2, e_1) = -1$$

で, これら以外の $D(e_i, e_j, e_k)$ は 0 となる. いま,

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, \quad c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

ゆえ, (8.5) ~ (8.8) から

$$\begin{aligned} D(a, b, c) &= a_1 b_2 c_3 D(e_1, e_2, e_3) + a_2 b_3 c_1 D(e_2, e_3, e_1) \\ &\quad + a_3 b_1 c_2 D(e_3, e_1, e_2) + a_2 b_1 c_3 D(e_2, e_1, e_3) \\ &\quad + a_1 b_3 c_2 D(e_1, e_3, e_2) + a_3 b_2 c_1 D(e_3, e_2, e_1) \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

例 2.3. $A(1, -2, 1)$, $B(2, 3, 8)$, $C(3, -3, 4)$, $D(-1, -2, 2)$ とすると,

$$\overrightarrow{AB} = (1, 5, 7), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3), \quad \overrightarrow{AD} = (-2, 0, 1)$$

で,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -55$$

よって, AB, AC, AD を 3 辺とする平行 6 面体の体積は 55 である.

問 2.1. 次のベクトル a, b, c が右手系であるか左手系であるか判定せよ.

- (1) $a = (6, 0, 0)$, $b = (-1, -2, 0)$, $c = (2, 3, 1)$
- (2) $a = (0, 2, 0)$, $b = (3, -1, 0)$, $c = (-2, 0, -4)$
- (3) $a = (1, 3, 1)$, $b = (-2, 0, 0)$, $c = (0, 0, 4)$

3 付録 3: 多項式

定理 3.1. $f_1(x), \dots, f_n(x)$ を 1 次以上の共通な因子をもたない多項式とする (最大公約数が 1). このとき,

$$g_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + g_n(x) \cdot f_n(x) = 1$$

となる多項式 $g_1(x), \dots, g_n(x)$ が存在する.

証明. 任意の多項式 $h_1(x), \dots, h_n(x)$ で

$$h_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + h_n(x) \cdot f_n(x)$$

と表される多項式全体の集合 M の中で, 次数の最小のものを $f_0(x)$ とする. いま,

$$f_0(x) = g_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + g_n(x) \cdot f_n(x)$$

としたとき, M の要素は $f_0(x)$ で割り切れる. なぜならば, 任意の $F(x) \in M$ について,

$$F(x) = p(x) \cdot f_0(x) + r(x), \quad r(x) \text{ の次数} < f_0(x) \text{ の次数}$$

とおくと, M の定義から

$$r(x) = F(x) - p(x) \cdot f_0(x) \in M$$

となるので, $f_0(x)$ が M の要素で次数が最小であることに矛盾する. したがって, M の要素は $f_0(x)$ で割り切れる. ここで,

$$f_1(x) = 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + \dots + 0 \cdot f_n(x)$$

$$f_2(x) = 0 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) + \dots + 0 \cdot f_n(x)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$f_n(x) = 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + \dots + 1 \cdot f_n(x)$$

より, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in M$ であるので,

$$f_1(x) = p_1(x) \cdot f_0(x), \quad f_2(x) = p_2(x) \cdot f_0(x), \quad \dots, \quad f_n(x) = p_n(x) \cdot f_0(x)$$

となっている. したがって, $f_0(x)$ は $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ の公約数である. また, これらの多項式の最大公約数は 1 であるので, $f_0(x) = 1$ すなわち,

$$g_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + g_n(x) \cdot f_n(x) = 1.$$

与えられた $f_1(x), \dots, f_n(x)$ に対して, $g_1(x), \dots, g_n(x)$ を見つけるには **Euclid** の互除法による. ここでは, 2 つの多項式の場合で説明しよう.

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x^2+2), \\f_2(x) &= x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

のとき, $f_1(x)$ を $f_2(x)$ で割ると,

$$f_1(x) = (x+1)f_2(x) + 3(x^2+x).$$

次に, $f_2(x)$ を x^2+x で割ると

$$f_2(x) = (x-2)(x^2+x) + (x-2).$$

最後に, x^2+x を $x-2$ で割ると,

$$x^2+x = (x+3)(x-2) + 6$$

であるから,

$$\begin{aligned}6 &= (x^2+x) - (x+3)(x-2) \\&= (x^2+x) - (x+3)\{f_2(x) - (x-2)(x^2+x)\} \\&= -(x+3)f_2(x) + \{(x+3)(x-2)+1\}(x^2+x) \\&= -(x+3)f_2(x) + (x^2+x-5)\frac{1}{3}\{f_1(x) - (x+1)f_2(x)\} \\&= \frac{1}{3}(x^3+x-5)f_1(x) + \left\{-(x+3) - \frac{1}{3}(x^2+x-5)(x+1)\right\}f_2(x) \\&= \frac{1}{3}(x^2+x-5)f_1(x) - \frac{1}{3}(3x+9+x^3+2x^2-4x-5)f_2(x)\end{aligned}$$

より,

$$\frac{1}{18}(x^2+x-5)f_1(x) - \frac{1}{18}(x^3+2x^2-x+4)f_2(x) = 1.$$

解答

第1章

問 1.1. $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, (1 \ 3 \ 5).$

問 2.1. (1) $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \mp 3 \end{pmatrix}$ (2) なし (3) $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

問 3.1. 略

問 3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

問 3.3 $\begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第1章練習問題

1. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 0 & 1 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 12 & 9 \\ 5 & 10 & 8 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -8 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 23 & 62 \\ 4 & 34 \end{pmatrix}$

(6) 7

(8) $\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n & n\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

ただし, (7), (8) では $0^{-1} = 0^0 = 1$ と約束する.

2. (1) $a = 1$ (2) $b = 1, -\frac{1}{2}$ (3) $3ab - a - 4b + 2 = 0$ (4) $a = 1$ か $b = 1$
 (5) $(a + 2b - 1)(2 - a + b) = 0$ (6) $a = b = 1$

3. $(a_1, a_2, a_3) = (\pm 1/\sqrt{6}, \mp 1/\sqrt{6}, \pm 2/\sqrt{6})$

4. $a = 2, -3$

5. (1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\alpha = 0$ のとき逆行列は存在しない. $\alpha \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2} \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = A^4 = A^{10} = O$

(2) $A^2 = A^4 = A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A^2 = A^4 = A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$

7. 直接計算して $(E_n + B(E_n - AB)^{-1}A)(E_n - BA) = E_n$ を確かめればよい.

第2章

問 2.1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 3.1. (1) 3 (2) 3

問 4.1. (1) 解なし

(2) 例えば $x_4 = c$ (c は任意の定数) として

$$x_1 = -\frac{7c+2}{3}, x_2 = \frac{5c-5}{3}, x_3 = -\frac{4c+2}{3}, x_4 = c.$$

(3) $x = -6, y = 23/2, z = 17/2.$

問 5.1. 省略

問 5.2. (1) $-a_1 - a_2 + a_3 = 0$ (2) $5a_1 - 3a_2 - a_3 = 0$

問 5.3. (1) 1 つ (2) 2 つ

問 6.1. (1) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 19 & -7 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

第2章練習問題

1. (1) 3 (2) 2 (3) 3 (4) 3 (5) 2 (6) 2
 (7) $a = b = 0$ のとき 0, $a = b$ のとき 1. $a = -2b$ のとき 2. それ以外では 3
 (8) $a = b = c$ のとき 1, $a = b$ または $a = c$ もしくは $b = c$ のとき 2, それ以外では 3
 (9) $a = 1$ のとき 2. それ以外では 4

2. (1) $x = \frac{1}{4}, y = -\frac{3}{4}, z = \frac{1}{4}$
 (2) $x = 2, y = 3, z = 0, w = -1$
 (3) 解なし
 (4) $x = 2a - 3b + 2, y = a, z = b$, (a, b は任意の数)
 (5) $x = z = a, y = -a$, (a は任意の数)
 (6) $x = -2a - 4b + 3c, y = a, z = b - c, w = b, u = c$, (a, b, c は任意の数)
 (7) 解なし
 (8) $x = -2a - b + 2, y = a, z = 2b - 2, w = b$, (a, b は任意の数)
 (9) $x = y = z = 1$
 (10) $x = y = z = 0$

3. $2a_1 - a_2 - 2a_3 = 0$

4. $a = 1, b = 2, x = \frac{7}{5} - c + \frac{2}{5}d, y = \frac{3}{5} - c + \frac{3}{5}d, z = c, w = d$, (c, d は任意の数)

5. (1) 2 個 (2) 2 個

6. (1) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
 (4) $\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} ab & -a & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -b & ab \\ 1 & -c & bc & -abc \end{pmatrix}$

第3章

問 1.1. (1) 1 (2) 1 (3) -1 (4) -1 問 1.2 は 問 1.1 に同じ.

問 2.1. (1) -10 (2) 7 (3) 2

問 2.2. 25

問 4.1. $x = 1, 3$

問 4.2. $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

問 4.3. (1) -12 (2) -10 (3) -3 (4) 0

問 6.1. (1) -307 (2) -272

問 7.1. $-\frac{1}{33} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -12 & 9 & -12 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

問 7.2. $x=2, y=-1, z=3$

問 7.3. $14/307$

問 8.1. (1) 2 (2) 3

問 7.3. 略

第3章練習問題

1. (1) -1 (2) -1 (3) -1
(4) -1 (5) -1 (6) $n=4k, 4k+1$ のとき 1, $n=4k+2, 4k+3$ のとき -1
2. (1) 98 (2) 1 (3) -272 (4) -307 (5) 0
(6) 0 (7) 128 (8) $1!2!3!4!5!$ (9) $(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} n!$
3. (1) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)$
(2) $(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
(3) $4a^2b^2c^2$ (4) $(d-a)(e-b)(f-c)$
(5) $-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
(6) $-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
(7) $(x-a)(x-b)(x-c)$ (8) $(x+3a)(x-a)^3$ (9) 0
(10) $-(u-v)^4$ (11) a^8+a^4+1 (12) $x^3(x+a+b+c+d)$
4. (1) $\frac{1}{90} \begin{pmatrix} 29 & -19 & 11 \\ -13 & -7 & 23 \\ 4 & 16 & -14 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{63} \begin{pmatrix} -7 & 19 & -2 \\ 21 & -3 & -3 \\ -14 & -7 & 14 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 11 & -9 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (6) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -2 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} ab & -a & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -b & ab \\ 1 & -c & bc & -abc \end{pmatrix}$
5. (1) 省略 (2) 省略 (3) 帰納法による
6. (1) $x=\frac{26}{21}, y=\frac{25}{21}, z=\frac{5}{7}$ (2) $x=-2, y=3, z=1$
(3) $x=-\frac{103}{55}, y=\frac{32}{55}, z=\frac{368}{55}$ (4) $x=3, y=1, z=-2$
(5) $x=7, y=-3, z=1$ (6) $x=5, y=-3, z=-2$
(7) $x=4, y=3, z=-2$ (8) $x=2, y=3, z=4$
(9) $x=\frac{17}{5}, y=-\frac{33}{5}, z=\frac{31}{5}$

7. 8. 省略

第4章

問 1.1. 省略

問 1.2. (1) 1次独立 (2) 1次従属 (3) 1次独立 (4) 1次独立

問 2.1. (1) 2 (2) 1 (3) 2

問 4.1. (1) 固有値 1, 3 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) 固有値 -2, 5 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (3) 固有値 -1, 1, 2 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) 固有値 1, 1, 3 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 問 6.1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ として, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

第4章練習問題

1. (1) 1次独立 (2) 1次従属 (3) 1次従属

2. $m = \frac{3}{7}$

3. (1) 1次従属 (2) 1次従属 (3) 1次独立 (4) 1次独立

4. $\alpha = 2, \beta = 1$ 5. (1) 固有値 1, 2, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) 固有値 $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$ (3) 固有値 $\frac{3 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2}$, 固有ベクトル $\frac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ (4) 固有値 -1, -1, 8, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (5) 固有値 -1, -1, 5, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(6) 固有値 1, 2, 4, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. 省略

7. (1) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
 (2) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
 (3) 対角化不可能
 (4) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第5章

問 1.1. 省略

問 1.2. (1) $(a, b) = 5, \theta = \frac{\pi}{4}$ (2) $(a, b) = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$ (3) $(a, b) = 18, \theta = \frac{\pi}{4}$

問 1.3. (1) $\alpha = 2$ (2) $\pm \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \right)$

問 1.4. (1) (2) 省略 (3) $(a, b \times c) = |a| \cdot |b \times c| \cdot \cos \theta$ より平行六面体の体積である。

問 2.1. 省略

問 3.1. 例えば $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

問 3.2. (1) $\dim L_1 = 0, \dim L_2 = 1, \dim L_3 = 1, \dim L_4 = 2, \dim L_5 = 2, \dim L_6 = 3$

(2) $L_2 = \{a_2\}, L_3 = \{a_2\}$ または $\{a_3\}, L_4 = \{a_2, a_4\}$ または $\{a_3, a_4\}$, 以下省略

問 4.1. 省略

問 4.2. (1) $R(f) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \text{Ker}(f) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 次元はどちらも 1,

(2) $R(g) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 次元 = 2, $\text{Ker}(g) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, 次元 = 1

問 5.1. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

問 6.1. (1) $x, y \in W^\perp, \lambda \in \mathbb{C}$ とすると, 任意の $z \in W$ に対して,

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z) = 0.$$

(2) $x \in W_2^\perp$ とすると, $W_1 \subset W_2$ より, すべての $y \in W_1$ に対して $y \in W_2$ になることがわかり, $(x, y) = 0$ となることから, $x \in W_1^\perp$.

問 6.2. 例えば $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

問 6.3. $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$

問 7.1. 省略

問 8.1. (1) 1, 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) -1, 1, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (3) 1, 1, 3, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (4) -1, 2, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 8.2. 固有ベクトルは $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから.

問 8.3. (1) $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}, {}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
 (2) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
 (3) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, {}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問 8.4. (1) $-x^2 + 5y^2$ (2) $-x^2 + 3y^2$ (3) $-x^2 + 2y^2 + 2z^2$

第 5 章練習問題

1. 例えば $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. 省略

3. (1) yes (2) no (3) no (4) no

4. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

6. (1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

7. (1) $a = -\frac{2}{\sqrt{6}}, b = \frac{1}{\sqrt{3}}, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $a = \pm 1, b = c = \pm \frac{1}{2}$

8. (1) 例えば $\{a, b\}$ (2) 例えば $\left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

9. 例えば, $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

10. 例えば, $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} \\ \frac{2}{30} \\ \frac{5}{30} \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$

11. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$

12. (1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

13. (1) 固有値 2, 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(2) 固有値 -1, 1, 2, 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) 固有値 1, $1-2a$, $1+2a$, 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

14. (1). (a) ${}^t x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$ (b) $2, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $2x^2$,

(2). (a) ${}^t x \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} x$ (b) $6, -4, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ (d) $6x^2 - 4y^2$

(3). (a) ${}^t x \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$ (b) $2 \pm \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(d) $(2+\sqrt{2})x^2 + (2-\sqrt{2})y^2$

$$(4). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 20, 0, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d) 20x^2$$

$$(5). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(d) x^2 + (\sqrt{2} + 1)y^2 - (\sqrt{2} - 1)z^2$$

$$(6). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 2, 1, -1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) 2x^2 + y^2 - z^3$$

$$(7). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 2, 1, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d) 2x^2 + y^2$$

$$(8). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 3, 0, -3, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(d) 3x^2 - 3z^2$$

$$(9). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) 3, 1, -4, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(d) 3x^2 + y^2 - 4z^2$$

$$(10). (a) {}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (b) \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(3+\sqrt{3})}} & \frac{1}{\sqrt{2(3-\sqrt{3})}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2(3+\sqrt{3})}} & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2(3-\sqrt{3})}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2(3+\sqrt{3})}} & \frac{1}{\sqrt{2(3-\sqrt{3})}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 - z^2$$

$$(11). (a) {}^t x \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$(b) 3, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(d) 3x^2 + (\sqrt{2} + 1)y^2 - (\sqrt{2} - 1)z^2$$

$$(12). (a) {}^t x \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x \quad (b) 3, 0, 0$$

$$(c) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d) 3x^2$$

第6章

問 1.1. $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n), y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n)$ とすれば $(Ax, y) = \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\overline{y_1} + \dots + \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\overline{y_n}$,

$(x, A^*y) = x_1 \sum_{j=1}^n \overline{a_{j1}y_j} + \dots + x_n \sum_{j=1}^n \overline{a_{nj}y_j}$ より和の取り方を変えればよい.

問 1.2. (1) $(A + \alpha E)^* = A^* + \overline{\alpha}E$ より掛ければよい.

(2) $A - \alpha E$ が正規行列なので $\|(A - \alpha E)x\| = \|(A - \alpha E)^*x\|$ から.

(3) $\alpha(x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y) = (x, \overline{\beta}y) = \beta(x, y)$ より.

問 2.1.

$$(1) P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

問 3.1. 省略.

問 3.2. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. V の部分空間として, $U_i = W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k$ とする. もちろん, (1) より $V = W_i \oplus U_i$ である. 一方, $\mathbf{x}_i \in W_i$, $\mathbf{y}_i \in U_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) として, $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_1 + \cdots + \mathbf{y}_k$ が成り立つと仮定すると,

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{x}_j - \sum_{j \neq i} \mathbf{y}_j \in W_i \cap U_i$$

が成り立つが, $V = W_i \oplus U_i$ より, $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. $\mathbf{x}_i \in W_i \cap U_i$ とすると, U_i の定義より $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \mathbf{x}_k$ と表すことができる. すると, (3) より, すべての $i = 1, 2, \dots, k$ に対して $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ がわかり, (1) が示せた.

問 3.3. (1) 省略. (2) W_1 の正規直交基底を $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ とすると, 任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{k=1}^r (\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$$

とおくと, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ であるから, $\mathbf{x}_2 \in W_1^\perp$ であり, $V = W_1 + W_1^\perp$ であることがわかるので, (1) より $V = W_1 \oplus W_1^\perp$.

問 4.1. (1) シュワルツの不等式より, $\|A\mathbf{x}\|^2 = (A A^* \mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \|A A^* \mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\|$ が成り立つ. よって, 行列ノルムの定義より $\|A\|^2 \leq \|A A^*\| \leq \|A\| \|A^*\|$ が成り立ち, $\|A\| \leq \|A^*\|$. 逆も同様.

(2) (1) の証明と (1) より, $\|A\|^2 \leq \|A A^*\| \leq \|A\| \|A^*\| = \|A\|^2$.

問 4.2. まず, $X \geq 0$ で正則のとき $E \geq X$ であれば $X^{-1} \geq E$ である. なぜなら $E \geq X$ の両側から $X^{-\frac{1}{2}}$ で挟むと $X^{-\frac{1}{2}} E X^{-\frac{1}{2}} \geq E$ となるので. したがって, $A \geq B$ の両側から $A^{-\frac{1}{2}}$ で挟むと $E \geq A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$ となり, 上のことより, 逆行列をとればよい.

第6章練習問題

すべて与えられた行列は A と書き, ユニタリー行列は U と書く.

1.

$$(1) U = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(2) U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ \sqrt{2}i & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & i & -1+i \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8i \end{pmatrix}$$

$$(3) U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}i & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & i & \sqrt{2}i \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{II}$$

$$(4) U = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(5) U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}i}{2} & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad U^* A U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(6) U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{3}i \\ -\sqrt{2}i & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(7) U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{pmatrix}$$

$$(8) U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i & -i \\ \sqrt{2} & -i & i \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

$$(9) U = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1-3i & -1+3i \\ -4 & 1-3i & 1+3i \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$$2. (1) P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ 省略} \quad 4. (1) P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 29 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) P =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(6) P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. (1) U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \frac{\sqrt{10}}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$(3) U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{II}$$

$$(4) U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(5) U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(6) U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Point: 3. においては解答は一通りではないことに注意しておく.

6.

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4\sqrt{\frac{2}{5}} & 2\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 2\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(7) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & i & -2 \\ -i & 5 & i \\ -2 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad (8) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & i & 1 \\ -i & 5 & i \\ 1 & -i & 5 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad (1) 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ -9 & -6 & 18 \\ -5 & -3 & 10 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad (1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

第7章

問1.1. $A(t)$: n 行 n 列, $B(t)$: n 行 m 列, $C(t)$: l 行 n 列, $D(t)$: l 行 m 列.

問2.1.

$$e^O = e^{tO} = E + t \cdot O + \frac{1}{2!} t^2 \cdot O + \cdots = E.$$

$$\begin{aligned} e^{tA} \cdot e^{sA} &= (E + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \cdots)(E + sA + \frac{1}{2!} s^2 A^2 + \cdots) \\ &= E + (t+s)A + \left\{ \frac{1}{2!} t^2 + (t+s) + \frac{1}{2!} s^2 \right\} A^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{3!} t^3 + \left(\frac{1}{2!} t^2 s + \frac{1}{2!} t s^2 \right) + \frac{1}{3!} s^3 \right\} A^3 + \cdots \\ &= E + (t+s)A + \frac{1}{2!} (t+s)^2 A^2 + \frac{1}{3!} (t+s)^3 A^3 + \cdots \\ &= e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

$$e^{tA} \cdot (e^{-tA}) = e^{(t-t)A} = e^0 = E \text{ だから, } (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

問 2.2. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ だから, $P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2, \dots$). よって,

$$\begin{aligned} P^{-1}e^{tA}P &= E + t(P^{-1}AP) + \frac{1}{2!}t^2(P^{-1}AP)^2 + \dots \\ &= E + t(P^{-1}AP) + \frac{1}{2!}t^2(P^{-1}A^2P) + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}t^2 \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 t^2 \dots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_n t + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 t^2 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問 2.3. (1) 固有値は $\pm i$. $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^i & ie^{-i} \\ ie^i & e^{-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^i + e^{-i} & -ie^i + ie^{-i} \\ ie^i - ie^{-i} & e^i + e^{-i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 固有値は $-1, 5$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^5 & 2e^{-1} \\ e^5 & -e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-1} - e^5 & 2e^5 - 2e^{-1} \\ e^5 - e^{-1} & 2e^5 + e^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問 4.1. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, \pm 2$ だから, 第5章で考えた方法で

$$x^2 + 2y^2 - 2z^2.$$

他の1つは, 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$3x^2 + 4y^2 - 12z^2.$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $1, \frac{-1}{2}$ (重解) だから,

$$x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2.$$

他の 1 つは, 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} {}^tPAP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって,

$$3x^2 - y^2 - \frac{3}{4}z^2.$$

問 4.2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2} > 0, & \begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{4}{5} > 0, \\ \begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{vmatrix} &= \frac{3}{4} > 0, & |2| &= 2 > 0. \end{aligned}$$

ゆえに, 定理 4.3. から正定値である.

問 4.3. A は対称行列だから, ${}^tAx_0 = {}^tx_0Ax$. ゆえに,

$$\begin{aligned} &{}^t(x - x_0)A(x - x_0) + 2{}^tx_0A(x - x_0) \\ &= {}^tAx - {}^tAx_0 - {}^tx_0Ax + {}^tx_0Ax + 2{}^tx_0Ax - 2{}^tx_0Ax_0 \\ &= {}^tAx - {}^tx_0Ax_0. \end{aligned}$$

付録: 問 2.1. (1) 左手系 (2) 右手系 (3) 右手系

索引

—ア行—

i -行ベクトル 3
 (i, j) -成分 3
 R^n 77
 r -rank 61
 1次結合 57
 1次写像 83
 1次従属 57
 1次独立 57
 1次変換 83
 1対1写像 83
 ヴァンデルモンドの行列式 56
 上三角行列 11
 上への1対1写像 83
 上への写像 83
 (m, n) -行列 3
 n 次元数ベクトル 3
 n 次元数ベクトル空間 81
 f^{-1} 83
 エルミート行列 110

—カ行—

階数 rank 19
 階数定理 60
 階段行列 17
 核 Ker 84
 拡大係数行列 22
 奇順列 33
 基底 80
 基底変換の行列 90
 基本行列 14
 基本ベクトル 62
 基本変形 13
 逆行列 9
 逆写像 83
 逆ベクトル 78
 共役行列 110
 行階数 62
 行基本変形 13
 行ベクトル 3
 行列 3

行列式 36
 行列の絶対値 123
 偶順列 33
 クラームルの公式 51
 Gram-Schmidt (グラム・シュミット) の直交化法 94
 クロネッカーのデルタ 49
 係数行列 22
 Cayley-Hamilton の定理 117
 ゲーム理論 142
 原像 83
 合成写像 83
 交代行列 46
 互換 34
 固有空間 84
 固有多項式 66
 固有値 65
 固有ベクトル 65
 固有方程式 66

—サ行—

Sarrus の方法 37
 Jordan の標準形 122
 C 78
 C^m 91
 c -rank 62
 j -列ベクトル 3
 次元 dim 81
 次元定理 84
 システム 133
 下三角行列 11
 実数倍 4
 実対称行列 100
 実2次形式 104
 実ベクトル空間 78
 写像 83
 自由システム 136
 集中定数システム 134
 主軸 105
 主軸変換 105

出力 133
 出力変数ベクトル 135
 出力方程式 135
 小行列式 47
 状態変数 133
 状態変数ベクトル 135
 状態方程式 134
 シルベスターの慣性律 142
 シンプレクス法 139
 スカラー倍 4
 スペクトル半径 (r_s) 128
 正規行列 110
 正規直交基底 94
 正規直交系 94
 生成系 80
 正則行列 9
 正值行列 123
 正定値 143
 静的システム 133
 成分 3
 正方向列 7
 積 5
 線形空間 78
 線形結合 57
 線形システム 133
 線形時変システム 135
 線形時不変システム 135
 線形写像 83
 線形従属 57
 線形独立 57
 線形変換 83
 全射 83
 全単射 83
 像 $R(f)$ 83
 相似 69
 双対定理 142

—タ行—

第 i 行 3
 対角化される 70
 対角化可能 70

対角行列 11
 第 j 列 3
 対称変換 99
 単位行列 7
 単位ベクトル 76
 単射 83
 直交 77
 直交行列 46
 直交変換 96
 直交補空間 93
 直和 118
 定数行列 135
 転置行列 8
 転倒 33
 動的システム 133
 トレース tr 68

—ナ行—

内積 76
 長さ 76
 なす角 77
 2 次形式 104
 入力 133

入力変数ベクトル 135
 ノルム 92

—ハ行—

掃き出し 17
 巾零行列 112
 非正定値 143
 左手系 147
 非負定値 143
 微分 (行列) 136
 表現行列 87
 標準基底 80
 標準形 114, 122
 広い意味の固有空間 118
 符号 sgn 33
 負定値 143
 部分空間 79
 古田不等式 125
 Frobenius の定理 126
 ベクトル 3
 ベクトル空間 75
 変分原理 144
 polar-分解 124

—マ行—

右手系 147
 無限次元ベクトル空間 81

—ヤ行—

有限次元ベクトル空間 81
 Euclid の互除法 149
 ユニタリー行列 110
 余因子 47
 余因子行列 50

—ラ行—

Löwner-Heinz の不等式 125
 零行列 4
 零ベクトル 3
 列階数 62
 列基本変形 13
 列ベクトル 3

—ワ行—

和 4
 和空間 118

著者紹介

阿部吉弘(あべ よしひろ) 神奈川大学工学部教授	伊藤 博(いとう ひろし) 神奈川大学工学部教授
酒井政美(さかい まさみ) 神奈川大学工学部教授	長 宗雄(ちよう むねお) 神奈川大学工学部教授
永野與彦(ながの よしひこ) 神奈川大学工学部准教授	堀口正之(ほりぐち まさゆき) 神奈川大学工学部准教授
矢島幸信(やじま ゆきのぶ) 神奈川大学工学部教授	山崎丈明(やまさき たけあき) 神奈川大学工学部准教授

工学を志す人の 線形代数

2000 年 10 月 30 日 初版発行 2009 年 4 月 1 日 10刷発行	著者代表 © 長 宗 雄 発 行 者 鳥 飼 好 男 印 刷 科学図書印刷 製 本 加瀬製本所(有)
発行所 株式 東京教学社	東京都千代田区三崎町 2-10-5 郵便番号 101-0061 電 話 03(3263)0671(代表) ファックス 03(3263)0673 振替口座 00150-2-66168

