第5章

線形写像

この章では，ベクトル空間と基底について調べ，ベクトル空間上の線形写像の次元定理を示し，行列で表現することができることを述べる．最後に対称行列の対角化を調べ，2 次形式の標準形を調べる．

1 ベクトル

空間のベクトルについて，もう一度繰り返すと，空間のベクトルとは，n 個の実数の組 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を n **次元数ベクトル**または単に **ベクトル** といい，

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

であった．前者の横書きのベクトルを **行ベクトル**, 後者の縦書きのベクトルを **列ベクトル** といい, x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をベクトルの第 i-**成分** と呼んだ．

2 つのベクトルを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ とするとき，ベクトルの相等，加法，スカラー倍を次のように定義する．

相等： $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_n = y_n$

加法： $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \cdots, x_n \pm y_n)$ （複号同順）

スカラー倍： $\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$ （λ は実数）

これらの演算をもつ n 次元数ベクトル全体の集合を n **次元数ベクトル空間**, または
n **次元ユークリッド空間** とよび, $\boldsymbol{R}^n$ で表す．

$$\boldsymbol{R}^n = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \boldsymbol{R}\}.$$

ここで $\boldsymbol{R}$ はすべての実数の集合である．

すべての成分が 0 となるベクトル $(0, 0, \cdots, 0)$ を **零ベクトル** と呼んで，$\mathbf{0}$ で表した．

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{5.1}$$

を $\boldsymbol{a}$ の **長さ** という．長さが 1 のベクトルを **単位ベクトル** という．ベクトルの長さに関しては，次のことが成り立つ．

$$|\boldsymbol{a}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \tag{5.2}$$

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| \tag{5.3}$$

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \quad (3\text{ 角不等式}) \tag{5.4}$$

第 i 成分が 1 で他の成分が 0 のベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ と表す．$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$ を **基本ベクトル** とよぶ (列ベクトルも同じ記号で書く)．

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 1).$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，その成分 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ と基本ベクトルにより

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n \tag{5.5}$$

と表される．

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ に対し

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \tag{5.6}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の **内積** という．ベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さは

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \geqq 0 \tag{5.7}$$

と表せる．任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ と任意の実数 t に対して，次のことが成り立つ．

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \tag{5.8}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \tag{5.9}$$

$$t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, t\boldsymbol{b}) \tag{5.10}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \tag{5.11}$$

また任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \quad (\text{Schwarz (シュワルツ) の不等式}) \tag{5.12}$$

が成り立つ．

シュワルツの不等式を証明してみよう．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときは, 両辺とも 0 で成立する．$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ とする．t を任意の実数とすると

$$0 \leqq (t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})t^2 + 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})t + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$$

ここで $t=-\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$ とおけば,

$$0 \leqq \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} - \frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2\}$$

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})>0$ であるから

$$0 \leqq (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2$$

これから (5.12) が得られる．

問 1.1. 3 角不等式 (5.4) を証明せよ．

シュワルツの不等式で, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がともに $\boldsymbol{0}$ でないとき

$$-1 \leqq \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \leqq 1$$

となるから

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

をみたす θ がただ 1 つ定まる．この θ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**なす角**という．このとき, 次の 2 つの条件

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

は同値である．$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ のとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は **直交する** という．$\boldsymbol{R}^n$ の n 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ はすべて単位ベクトル (長さが 1) で, たがいに直交している．すなわち, **クロネッカーのデルタ** とよばれた記号 δ_{ij} を用いれば

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

が成り立つ．

行ベクトルの代わりに, 列ベクトルを $\boldsymbol{R}^n$ の要素と考えても, すべての定義, 定理等はほとんど変更なしに成り立つ．本章では主に行ベクトルを用いているが, 後章では行ベクトル, 列ベクトルの両方を使用する．

問 1.2. 次の 2 つのベクトルの内積およびなす角を求めよ．

(1) $\boldsymbol{a}=(3,1), \boldsymbol{b}=(2,-1)$

(2) $\boldsymbol{a}=(1,0,2), \boldsymbol{b}=(-1,\sqrt{10},3)$

(3) $\boldsymbol{a}=(1,0,2,2,3), \boldsymbol{b}=(1,3,0,1,5)$

問 1.3. $\boldsymbol{a}=(1,\alpha,-1)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,2)$ とする．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するように α を定めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ 両方に直交する単位ベクトルを求めよ．

$\boldsymbol{R}^3$ の2つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して，**外積** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を

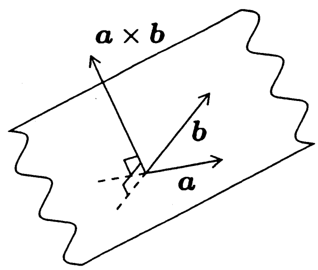
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

と定義する．従って，外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，次の等式が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$　　(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

(3) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})$　　(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(5) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,　　ただし，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$.



問 1.4. ベクトルの外積について，次を示せ．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ で張られる平面に垂直である．

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の長さは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積に等しい．

(3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の絶対値は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を3辺とする平行六面体の体積に等しい．

2　ベクトル空間

$\boldsymbol{R}$ を実数の集合とする．集合 V が次の条件をみたすとき，V を $\boldsymbol{R}$ 上の **ベクトル空間** (または **線形空間**) または単に **実ベクトル空間** という．

(I) 加法:　V の任意の元 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して，**和** とよばれる V の元 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ がきまり，次の条件をみたす．

V1　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$　$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)$　　(交換法則)

V2　$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$　$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V)$　　(結合法則)

V3　V に一定の元 $\boldsymbol{0}$ が存在して，任意の元 $\boldsymbol{x}\in V$ に対して

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$$
(零元の存在)

V4　任意の元 $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，ある元 $\boldsymbol{x}'\in V$ が存在して

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$$
(逆元の存在)

この元 $\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{x}$ の **逆元** または **逆ベクトル** といい，$-\boldsymbol{x}$ と書く．

(II) スカラー倍: 任意のスカラー $\lambda \in \boldsymbol{R}$ と任意の元 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x}$ の **スカラー倍** とよばれる V の元 $\lambda\boldsymbol{x}$ がきまり, 次の条件をみたす.

V5 $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$ $(\lambda \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$

V6 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$ $(\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x} \in V)$

V7 $(\lambda\mu)\boldsymbol{x} = \lambda(\mu\boldsymbol{x})$ $(\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x} \in V)$

V8 $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in V)$

V の元を **ベクトル** という.

定理 2.1. V を実ベクトル空間とするとき

(1) V の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(2) 任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $\lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

実際, $0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$. 両辺に $0\boldsymbol{x}$ の逆元 $-0\boldsymbol{x}$ を加えれば, $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}$.
また, $\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{0}$. 両辺に $-\lambda\boldsymbol{x}$ を加えれば, $\boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0}$.

例 2.1. $\boldsymbol{C}$ を複素数全体の集合とする, すなわち, $\boldsymbol{C} = \{z = \alpha+\beta i \mid \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\}$. $z = \alpha+\beta i$, $z' = \alpha' + \beta' i$ ならば, $z + z' = (\alpha+\alpha') + (\beta+\beta')i$. また, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ について $\lambda z = \lambda\alpha + \lambda\beta i$ となるので通常の和と実数との積で, $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間となる.

例 2.2. x に関する実係数の高々 n 次の多項式全体 $P_n(x)$ は実ベクトル空間となる. ここでのベクトルは n 次またはそれ以下の次数の多項式である.

例 2.3. 閉区間 $[-1,1] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ で定義された連続実数値関数全体を $\mathcal{C}[-1,1]$ で表す. 任意の $f, g \in \mathcal{C}[-1,1]$ および $x \in [-1,1]$ に対して

$$\begin{array}{cccccc} \text{和} & f+g & : & (f+g)(x) & = & f(x)+g(x) \\ \text{スカラー倍} & \lambda f & : & (\lambda f)(x) & = & \lambda(f(x)) \end{array}$$

と定義すれば, $\mathcal{C}[-1,1]$ は実ベクトル空間となる. この場合, つねに 0 の値をとる定値関数が零元である (関数もベクトルとなる).

例 2.4. 空間 $\boldsymbol{R}^3$ あるいは平面 $\boldsymbol{R}^2$ におけるベクトル全体は, 定理 1.1 で定義された和とスカラー倍によって実ベクトル空間となる.

ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が

S1 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$

S2 任意の $\boldsymbol{x} \in W$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $\lambda\boldsymbol{x} \in W$

をみたすとき, W を V の **部分空間** とよぶ. 条件 **S1**, **S2** は, W が V におけるベクトルの演算, 和とスカラー倍について閉じていること, すなわち W はそれ自身ベクトル空間となることを示している. あきらかに, V 自身は V の部分空間であり, また V の零ベクトル $\boldsymbol{0}$ のみからなる集合 $\{\boldsymbol{0}\}$ も V の部分空間である. $\{\boldsymbol{0}\}$ は **零空間** といわれる.

上の条件 **S1**, **S2** は 1 つの条件 **S3** と同値である.

S3 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in W$$

問 2.1. **S1**, **S2** と **S3** が同値となることを示せ．

例 2.5. 平面 $\boldsymbol{R}^2$（または空間 $\boldsymbol{R}^3$）の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して

$$L(\boldsymbol{a}) = \{\lambda \boldsymbol{a} \mid \lambda \in \boldsymbol{R}\}$$

は，$\boldsymbol{R}^2$（または $\boldsymbol{R}^3$）の部分空間となる．実際，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ に対し

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a} = (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} \in L(\boldsymbol{a}), \quad \lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} \in L(\boldsymbol{a})$$

となり，$L(\boldsymbol{a})$ は **S1** と **S2** をみたしている．

例 2.6. 例 2.2 における n 次以下の多項式からならベクトル空間 $P_n(x)$ を考える．任意の整数 k $(0 \leqq k \leqq n)$ について，$P_k(x)$ は $P_n(x)$ の部分空間である．$k = 0$ の場合 $P_0(x)$ は定数のみの多項式として $\boldsymbol{R}$ に等しい．

3 ベクトル空間の基底と次元

ベクトル空間 V において，次の2条件をみたす順序を考えた組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の**基底**という．

B1 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は1次独立である．

B2 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V を生成する．すなわち

$$V = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n \ : \ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}\}.$$

条件 **B2** は，V の任意のベクトルが $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合で表されることを意味する．**B2** をみたすとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V の**生成系**であるという．V の基底とは，1次独立な V の生成系のことである．**B1**, **B2** は次の条件 **B3** と同値である．

B3 V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の1次結合

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$$

として一意的に表される．

これは，$\boldsymbol{x}$ がもう一つの形 $\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n$ と表された場合，$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \cdots, \lambda_n = \mu_n$ が成り立つということである．**B1**，**B2** の仮定の下に $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n$ とすれば，$(\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ が得られる．**B1** より $\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$，すなわち $\lambda_1 = \mu_1, \cdots, \lambda_n = \mu_n$ となる．逆に，**B3** を仮定すると，**B2** は明らかであるから **B1** を示せばよい．$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ とする．$\boldsymbol{0}$ の表し方として $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{a}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_n$ を考えれば，**B3** より $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ が示される．

例 3.1. $\boldsymbol{R}^n$ 上において n 個の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の基底をなす．任意のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ は

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

と表される．この表し方は一意的であるから，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底となる．これを $\boldsymbol{R}^n$ の **標準基底** という．

例 3.2. $\boldsymbol{R}^2$ において，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_1$ だから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{R}^n$ の生成系となる．また，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立であるから，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ と異なる $\boldsymbol{R}^2$ の基底である．

定理 3.1. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ がともに V の基底ならば，構成するベクトルの数は等しい．すなわち，$n = m$.

証明. B1 より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ はともに 1 次独立であるから，

$$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} = n,\ \mathrm{rank}\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m\} = m$$

となる．**B2** より，各 $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合であり，また各 $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ の一次結合であるから，階数定理 (第 4 章定理 2.2) より $m \leqq n$ かつ $n \leqq m$ となる．すなわち $n = m$ である．□

この定理より，ベクトル空間 V の基底に属するベクトルの数 n は，基底の選び方に無関係に V により一意的に定まる．この数 n を V の**次元**とよび，$\dim V$ と書く．$\boldsymbol{0}$ ベクトルだけの空間 $\{\boldsymbol{0}\}$ の次元は 0 と定める．$V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ ならば $\dim V > 0$ である．

例 3.3. $\boldsymbol{C}$ を第 1 章例 2.1 における複素数全体からなるベクトル空間とする．任意の複素数は $\alpha + \beta i(\alpha, \beta \in \boldsymbol{R})$ と表され，1, i は 1 次独立であるから，$\{\ 1,\ i\ \}$ は $\boldsymbol{C}$ の基底となる．これから，$\dim \boldsymbol{C} = 2$ となる．

例 3.4. 数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ については, $\dim \boldsymbol{R}^n = n$ となる.

例 3.5. n 次以下の多項式からなるベクトル空間 $P_n(x)$ においては, $\{x^0\ (=1), x, x^2, \cdots, x^n\}$ が基底をなす. これから $\dim P_n(x) = n+1$ である.

このように, 有限個のベクトルからなる基底をもつとき, **有限次元** ベクトル空間という. これに対して, 多項式全体からなるベクトル空間においては、$\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots\}$ が基底をなす. このように無限に多くの1次独立なベクトルを含むとき, ベクトル空間の次元は **無限** であるので, **無限次元** ベクトル空間という.

定理 3.2. $\dim V = n$ ならば, V の任意のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_p\}$ の階数は n を越えない. すなわち, $\mathrm{rank}\,\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_p\} \leqq n$.

証明. $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の基底とすれば, 各 $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の1次結合となるから, 階数定理より

$$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_p\} \leqq n$$

となる. □

定理 3.3. $\dim V = n$ ならば, 任意の V の n 個の1次独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は V の基底をつくる.

証明. $\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとすれば, 定理3.2より $\mathrm{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{x}\} \leqq n$, すなわち, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{x}$ は1次従属となる. 第4章定理 1.5 により $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の1次結合として表される. $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は条件 **B1**, **B2** をみたすから基底をなす. □

定理 3.4. $0 \leqq m < n = \dim V$ とする. m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が1次独立ならば, $(n-m)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ をこれに加えて $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底をつくるようにできる.

証明. $\mathrm{rank}\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\} = m < n$ だから, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の1次結合とならない V のベクトル $\boldsymbol{a}_{m+1}$ が存在する. $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}\}$ は1次独立となる. $m+1 < n$ ならば, 上と同じように $\boldsymbol{a}_{m+2}$ を選んで $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \boldsymbol{a}_{m+2}\}$ が1次独立になるようにできる. これを繰返せば定理が示される. □

系 3.5. $\dim V = n$ とする. 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $(n-1)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ を選んで $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}\}$ が V の基底をつくるようにできる.

系 3.6. $\dim V = n$, W を V の部分空間とする. $\dim W = m < n$ ならば, V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ が W の基底をなすようにつくれる.

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ は一次独立であるから, 系3.5は $m=1$ の場合の定理3.4である. 系3.6は, まず系3.5により W の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ を選び, さらに定理3.4を適用して得られる.

問 3.1. $\boldsymbol{R}^3$ において, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含む基底を選べ.

問 3.2. $\boldsymbol{R}^3$ の次のベクトルを考えよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) $1 \leqq i \leqq 6$ に対して, L_i を i 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i$ により生成された $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする. $\dim L_i$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i$ の中から L_i の基底を選べ.

(3) $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_6$ の中から $\boldsymbol{R}^3$ の基底を 2 種類選べ.

4　線形写像と 1 次変換

M と N を集合とするとき, M の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して, N の元 $f(\boldsymbol{x})$ がただ 1 通り定まるような M から N への対応を M から N への **写像** といい, $f : M \to N$ で表す. $f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ の**像**, $\boldsymbol{x}$ を $f(\boldsymbol{x})$ の **原像**という. N の部分集合

$$\mathrm{R}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \ : \ \boldsymbol{x} \in M\}$$

を f の **像** という. $\mathrm{R}(f)$ を $f(M)$ で表すこともある. また, A が M の部分集合であるとき $f(A) = \{f(\boldsymbol{x}) \ : \ \boldsymbol{x} \in A\}$ を A の **像** という. $\mathrm{R}(f) = N$ となるとき, f を M から N の**上への写像**または **全射** という. M の任意の相異なる元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}')$ が成り立つとき, f を M から N への **1 対 1 写像** または **単射** という. f が全射かつ単射のとき, f を **全単射** または **上への 1 対 1 写像** という. $f : M \to N$ が全単射のとき, N の元 $\boldsymbol{y}$ に $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となる M の元 $\boldsymbol{x}$ を対応させれば, N から M への写像が定まる. これを f の **逆写像** といい, f^{-1} で表す.
M, N, L を集合とし, $f : M \to N$, $g : N \to L$ を写像とする. このとき, f と g の合成写像 $g \circ f : M \to L$ は

$$g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) \ \ (\boldsymbol{x} \in M)$$

によって定義される.

例 4.1. $M = L = \boldsymbol{R}$ とし, $f(x) = x^2$ $(x \in \boldsymbol{R})$ によって $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\mathrm{R}(f) = \{x \in \boldsymbol{R} \ : \ \boldsymbol{x} \geqq 0\}$ であるからは全射ではない. また, $x > 0$ ならば $f(\sqrt{x}) = f(-\sqrt{x}) = x$ だから f は単射ではない.

例 4.2. $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = e^x$ $(x \in \boldsymbol{R})$ と定義すれば, $\mathrm{R}(g) = \{x \in \boldsymbol{R} \ : \ x > 0\}$ となり g は全射ではないが単射となる.

例 4.3. $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $h(x) = ax + b$ (a, b は定数) と定義する．$a \neq 0$ ならば h は全単射となり，逆写像は $h^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}(x - b)$ で定義される．

V, W をベクトル空間とする．V から W への写像 $f : V \to W$ が次の条件をみたすとき，f を **線形写像** または **1 次写像** という．

L1　任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$.

L2　任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ とスカラー $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$.

特に $V = W$ の場合，f を V の **線形変換** または **1 次変換** という．A が n 次正方行列で，V が n 次元数ベクトル空間のとき，$\boldsymbol{x} \in V$ に対して $A\boldsymbol{x} \in V$ となり，A は V の線形写像とみることができる．
条件 **L1**, **L2** は次の 1 つの条件と同値である．

L3　任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ とスカラー $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}).$$

問 4.1. **L1**, **L2** と **L3** の同値を証明せよ．

$f : V \to W$ を線形写像とする．W の部分集合 B に対して，$f^{-1}(B) = \{\boldsymbol{x} \in V | f(\boldsymbol{x}) \in B\}$ を B の **原像** とよぶ．特に，B が零ベクトル $\mathbf{0}$ のみからなるとき，$f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \in V : f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ を f の **核** とよび，$\mathrm{Ker}(f)$ で表す．

定理 4.1. $f : V \to W$ を線形写像とする．

(1) A が V の部分空間ならば，A の 像 $f(A)$ は W の部分空間となる．

(2) B が W の部分空間ならば，B の原像 $f^{-1}(B)$ は V の部分空間となる．特に f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間となる．

証明. (1) $f(A)$ が **S3** をみたすことを示す．$\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in f(A)$, $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ とする．$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{y})$ となる $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ をとれば，A が部分空間であることから，$\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in A$ となる．これから，$\lambda \boldsymbol{x}' + \mu \boldsymbol{y}' = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}) = f(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) \in f(A)$ となる．
(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in f^{-1}(B)$, $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ とする．B は部分空間で $f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \in B$ だから，
$f(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}) \in B$, すなわち $\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in f^{-1}(B)$ となる．□

n 次正方行列 A は n 次元数ベクトル空間 V の線形写像であるので，α を A の固有値とすると

$$W(\alpha) = \{\, \boldsymbol{x} : (A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \,\}$$

は $W(\alpha) = \mathrm{Ker}(A - \alpha E)$ より，部分空間となっている．これを α の **固有空間** という．

定理 4.2 (次元定理). $f : V \to W$ を線形写像とすれば, 次の等式が成り立つ.

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{R}(f).$$

注. 次元定理は種々の情報を得ることができる重要な定理である.

証明. $\dim \mathrm{Ker}(f) = m, \dim \mathrm{R}(f) = n$ とする. V が $m+n$ 個のベクトルからなる基底をもつことを示せばよい. $\mathrm{R}(f)$ の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_{n+2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+m}\}$ を選ぶ (定理 3.4). 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\boldsymbol{b}_i$ の原像 $\boldsymbol{a}_i \in f^{-1}(\boldsymbol{b}_i)$ を任意にとる. このとき $(n+m)$ 個のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+m}\}$ は V の基底をなす. これを示すために, $\{\boldsymbol{a}_i\}$ が **B1** と **B2** をみたすことをいう. まず

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n + \lambda_{n+1} \boldsymbol{a}_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+m} \boldsymbol{a}_{n+m} = \boldsymbol{0} \tag{5.13}$$

f で写せば, $f(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2 \cdots, n)$, $f(\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{0}$ $(j = n+1, \cdots, n+m)$ だから

$$\boldsymbol{0} = f\left(\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i\right) = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n$$

となる. $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ は 1 次独立であるから, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. (5.13) より $\lambda_{n+1} \boldsymbol{a}_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+m} \boldsymbol{a}_{n+m} = \boldsymbol{0}$ となる. $\boldsymbol{a}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+m}$ は 1 次独立であるから. $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+m} = 0$ となり, **B1** が成り立つ. 次に **B2** を示すために, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ をとる. W のベクトル $f(\boldsymbol{x})$ をその基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ で表して, $f(\boldsymbol{x}) = \mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \mu_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{b}_n$ とする. このとき,

$$f\left(\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{a}_i\right) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\boldsymbol{a}_i) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$$

となるから, $\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{a}_i \in \mathrm{Ker}(f)$ となる. $\{\boldsymbol{a}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+m}\}$ は $\mathrm{Ker}(f)$ の基底であるから,

$$\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{a}_i = \mu_{n+1} \boldsymbol{a}_{n+1} + \cdots + \mu_{n+m} \boldsymbol{a}_{n+m}$$

と表せる. すなわち $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n+m} \mu_i \boldsymbol{a}_i$ となる. これで **B2** は示された. □

問 4.2. 次の線形写像について答えよ.

(1) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix}$ について $\mathrm{R}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ を明示し, その次元を求めよ.

(2) $g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y \\ x-z \\ 2x-y-z \end{pmatrix}$ について $\mathrm{R}(g)$ と $\mathrm{Ker}(g)$ の次元を求めよ.

5 線形写像の表現行列

V, W を n 次元, m 次元のベクトル空間, $f : V \to W$ を線形写像とし, V と W の基底をそれぞれ $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ とする. V のベクトル $\boldsymbol{x}$ とその像 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n, \ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots y_m\boldsymbol{b}_m \tag{5.14}$$

と一意的に表せる. 行列の記法を使えば

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

f は線形写像だから (5.14) より

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{a}_n), \tag{5.15}$$

すなわち

$$\boldsymbol{y} = (f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる. $f(\boldsymbol{a}_j)$ は $\boldsymbol{b}_i, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ の1次結合となるから

$$f(\boldsymbol{a}_j) = a_{1j}\boldsymbol{b}_1 + a_{2j}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{b}_m \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{5.16}$$

これから

$$(f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)) = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

となる. (5.15) と (5.16) より

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{b}_i.$$

したがって, (5.14) より

$$\boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$$

となる. $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ は1次独立であるから

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (j = 1, \cdots, m)$$

となる. すなわち,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

(5.17) または (5.18) の右辺の行列を, 基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}, \{\boldsymbol{b}_i\}$ に関する線形写像 f の **表現行列**とよび, A_f とかく.

逆に任意の (m, n)-行列 $A = (a_{ij})$ が与えられれば, 線形写像 $f : V \to W$ を (5.15) と (5.16) により定義すれば, f の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}, \{\boldsymbol{b}_i\}$ に関する表現行列は A となる. すなわち $A = A_f$ である.

Point: 要するに, 基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}, \{\boldsymbol{b}_i\}$ に関する線形写像 f の表現行列 A_f を求めるときには, まず最初のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ を f で写して基底 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ で表す, すなわち $f(\boldsymbol{a}_1) = a_{11}\boldsymbol{b}_1 + a_{21}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{b}_m$ このときの係数 $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$. を 1 列目に順序を間違わずにかく. 同じ作業を $\boldsymbol{a}_n$ までしてできた行列である. したがって基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}, \{\boldsymbol{b}_i\}$ がどちらも標準基底のときは簡単に表現行列を求めることができる.

次に, U を l 次元ベクトル空間, その基底を $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_l\}$ とする. 線形写像 $g : W \to U$ に対して, 基底 $\{\boldsymbol{b}_i\}, \{\boldsymbol{c}_k\}$ に関する g の表現行列を $A_g = (b_{st})$ とする. W のベクトル $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{b}_j$ の像を $g(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z} = \sum_{k=1}^{l} z_k \boldsymbol{c}_k$ とすれば

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

となる. (5.18) と (5.19) から

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

これは, 合成写像 $g \circ f : V \to U$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}, \{\boldsymbol{c}_k\}$ に関する表現行列 $A_{g \circ f}$ が行列の積 $A_g A_f$ となることを示している. これから次の定理が得られる.

定理 5.1. V, W をそれぞれ n 次元, m 次元のベクトル空間とし, V から W への線形写像全体の集合を $L(V,W)$ とする. $M(m,n)$ を (m,n)-行列全体の集合とする. V と W の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ と $\{\boldsymbol{b}_i\}$ を選び, 対応 $\Theta : L(V,W) \to M(m,n)$ を

$$\Theta(f) = A_f,\ f \in L(V,W)$$

によって定義すれば, Θ は全単射となる.

定理 5.2. V, W, U をそれぞれ n 次元, m 次元, l 次元のベクトル空間とし, その基底を $\{\boldsymbol{a}_j\}$, $\{\boldsymbol{b}_i\}$, $\{\boldsymbol{c}_k\}$ とする. $f \in L(V,W), g \in L(W,U)$ とし, A_f と A_g をそれぞれ $\{\boldsymbol{a}_j\},\{\boldsymbol{b}_i\}$ と $\{\boldsymbol{b}_i\},\{\boldsymbol{c}_k\}$ に関する f と g の表現行列とする. このとき, 対応 $\Theta : L(V,U) \to M(n,l)$ は $\Theta(g \circ f) = A_g A_f$ をみたす. すなわち, 合成写像は表現行列の積に対応する.

例 5.1. 1次写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$ を考える.

$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ とすれば,

$$y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = -2x_1 + 2x_2,\ y_3 = 3x_1 - 3x_2. \tag{5.20}$$

$\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ の基底として標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}, \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ をとれば, f の表現行列は $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ となる. また, (5.20) より $y_2 = -2y_1, y_3 = 3y_1$ だから,
$\mathrm{R}(f) = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} : y_1 = -\dfrac{y_2}{2} = \dfrac{y_3}{3}\right\}$. $\mathrm{Ker}(f)$ を求めるために, $x_1 - x_2 = -2x_1 + 2x_2 = 3x_1 - 3x_2 = 0$ をといて, $x_1 = x_2$. すなわち, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2\right\}$.

例 5.2. $g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ -2x + y - 3z \end{pmatrix}$ とする. $\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R}^2$ の基底として $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ および $\left\{\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ を選ぶ. この2つの基底に関する g の表現行列を求めるために, まず $g(\boldsymbol{e}_i)$ $(i = 1,2,3)$ を計算する. 例えば,

$$g(\boldsymbol{e}_3) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2$ とおけば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$. これから, $\lambda = -\dfrac{1}{3}, \mu = -\dfrac{4}{3}$. すなわち, $g(\boldsymbol{e}_3) = -\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{4}{3}\boldsymbol{a}_2$. 同様にして, $g(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{a}_2, g(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$. ゆえに, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ となる. また任意の $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して, 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y + z = b_1 \\ -2x + y - 3z = b_2 \end{cases}$$

は解をもつから, $\mathrm{R}(g) = \boldsymbol{R}^2$, すなわち g は全射となる. $b_1 = b_2 = 0$ とすれば,

$$\mathrm{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \frac{x}{5} = y = -\frac{z}{3} \right\}$$

が得られる.

例 5.3. 2 つの線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ および $g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3 : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3 \\ 2y_2 - y_3 \end{pmatrix}$ を考える. $\boldsymbol{R}^3$ の基底をすべて標準基底とすれば, f と g の表現行列は $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ となる. 合成写像 $g \circ f$ は

$$g \circ f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = g \left(\begin{pmatrix} -y + z \\ 2x - z \\ y + z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x + z \\ y + z \\ 4x - y - 3z \end{pmatrix}$$

となるから, その表現行列は, $A_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ となり, $A_{g \circ f} = A_g A_f$ が成り立つ.

n 次元ベクトル空間 V の 2 つの基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}, \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ を考える. 各 $\boldsymbol{b}_i$ を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表して

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b}_2 = p_{12}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{a}_n \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{b}_n = p_{1n}\boldsymbol{a}_1 + p_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{a}_n \end{cases}$$

とする. 行列で表して,

$$(\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)P;\ P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

この P を $\{\boldsymbol{a}_i\}$ から $\{\boldsymbol{b}_j\}$ への **基底変換の行列** という. 基底変換の行列は正則となる. なぜなら, $\{\boldsymbol{b}_j\}$ から $\{\boldsymbol{a}_i\}$ への基底変換の行列を Q とすれば, $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n)Q$ となり, (5.21) から

$$(\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n)QP$$
$$(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)PQ.$$

$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ はともに1次独立であるから, $QP = PQ = E$. これから $Q = P^{-1}$ となる.
最後に, 線形変換と基底変換の行列の関係を調べる. 次の定理がその関係を与える.

定理 5.3. V, W を n 次元, m 次元ベクトル空間とし, $f : V \to W$ を線形写像とする. $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ を V の基底, $\{\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_m\}, \{\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_m\}$ を W の基底として, $\{\boldsymbol{a}_i\}$ から $\{\boldsymbol{b}_i\}$ への基底変換の行列を P, $\{\boldsymbol{a}'_j\}$ から $\{\boldsymbol{b}'_j\}$ への基底変換の行列を Q とする. このとき, f の $\{\boldsymbol{a}_i\}, \{\boldsymbol{a}'_j\}$ に関する表現行列を A, $\{\boldsymbol{b}_i\}, \{\boldsymbol{b}'_j\}$ に関する表現行列を B とすれば,

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
\{\boldsymbol{a}_i\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, leftrightarrow, "P"'] & \{\boldsymbol{a}'_j\} \arrow[d, leftrightarrow, "Q"] \\
\{\boldsymbol{b}_i\} \arrow[r, "B"'] & \{\boldsymbol{b}'_j\}
\end{tikzcd}$$

証明. (5.21) より $(\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)P$. f が1次写像であるから

$$(f(\boldsymbol{b}_1) \cdots f(\boldsymbol{b}_n)) = (f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n))\, P$$

が得られる. (5.17) より $(f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)) = (\boldsymbol{a}'_1 \cdots \boldsymbol{a}'_m)A$. これを上式に代入して

$$(f(\boldsymbol{b}_1) \cdots f(\boldsymbol{b}_n)) = (\boldsymbol{a}'_1 \cdots \boldsymbol{a}'_m)AP \tag{5.22}$$

また, $\{\boldsymbol{b}_i\}, \{\boldsymbol{b}'_i\}, \{\boldsymbol{a}'_j\}$ に同様の計算を行えば, $(\boldsymbol{b}'_1 \cdots \boldsymbol{b}'_m) = (\boldsymbol{a}'_1 \cdots \boldsymbol{a}'_m)Q$ だから,

$$(f(\boldsymbol{b}_1) \cdots f(\boldsymbol{b}_n)) = (\boldsymbol{b}'_1 \cdots \boldsymbol{b}'_m)B = (\boldsymbol{a}'_1 \cdots \boldsymbol{a}'_m)QB. \tag{5.23}$$

(5.22) と (5.23) の右辺を比較すれば, $\boldsymbol{a}'_1, \cdots \boldsymbol{a}'_m$ が1次独立であることから, $AP = QB$ となる. これから, $B = Q^{-1}AP$ が成り立つ. □

例 5.4. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ への基底変換の行列 P と $\boldsymbol{R}^2$ の $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から $\{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2\}$ への基底変換の行列 Q を求めよ.

(2) f の $\{\boldsymbol{e}_i\}, \{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する表現行列 A と $\{\boldsymbol{b}_i\}, \{\boldsymbol{b}'_j\}$ に関する表現行列 B を求めよ.

解.

(1) $(\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{b}'_1\ \boldsymbol{b}'_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ だから,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
だから,

$$(f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)\ f(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)A$$

より,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

また

$$f(\boldsymbol{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\boldsymbol{b}_1) = \boldsymbol{b}'_1,\ f(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}'_2,\ f(\boldsymbol{b}_3) = 2\boldsymbol{b}'_1 + 2\boldsymbol{b}'_2$$

となるから

$$(f(\boldsymbol{b}_1)\ f(\boldsymbol{b}_2)\ f(\boldsymbol{b}_3)) = (\boldsymbol{b}'_1\ \boldsymbol{b}'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}'_1\ \boldsymbol{b}'_2)B$$

より,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Q^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

だから,

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

となり, 定理 5.3 が確認できる. □

問 5.1. $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ と $\boldsymbol{R}^2$ の 基底 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ に関して,
$f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x+y+z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$ の表現行列を求めよ.

6　複素ベクトル空間と正規直交基底

行列の固有値を求めると, 複素数となることもある. これを扱うためにはベクトルの成分を複素数に広げておく必要がある。V をベクトル空間とする. V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**とよばれる数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ がきまり, 次の条件をみたすとき, V を **内積空間** という.

I1　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$

I2　$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ $(\lambda \in \boldsymbol{C})$

I3　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$　　(分配法則)

I4　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$; $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を $\boldsymbol{a}$ の**長さ**または **ノルム** といい, $\|\boldsymbol{a}\|$ で表す. 内積の定義できるベクトル空間がいろいろある.

例 6.1. 数ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$: 内積は $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

により $\boldsymbol{C}^n$ は内積空間となる. $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ となることに注意する.

例 6.2. 閉区間 $[-1,1]$ 上の連続な実数値関数のつくるベクトル空間 $\mathcal{C}[-1,1]$:(第 2 章 例 2.3) を考える. $f,g \in \mathcal{C}[-1,1]$ に対して, f と g の内積を

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と定義する. 明らかに **I1**〜**I4** をみたすから, $\mathcal{C}[-1,1]$ は内積空間となる. この場合, 係数 λ は実数である.

定理 6.1. 内積空間 V において, ノルムは次の性質をもつ.

(1) $\|\boldsymbol{a}\| \geqq 0$; $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(2) $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{a}\|$ ($\lambda \in \boldsymbol{C}$, $|\lambda|$ は λ の絶対値)

(3) $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ (Schwarz(シュワルツ) の不等式)

(4) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (三角不等式)

証明. (1) はノルムの定義と **I4** より得られる. (2) は **I1, I2** とノルムの定義より簡単に分かる. (3) を示すために, α を任意の複素数とする. $\mathrm{Re}\,\alpha$ は α の実数部をかく. **I1**〜**I4** より

$$(\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\alpha|^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2\mathrm{Re}(\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \geqq 0.$$

ここで $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ ならば不等式は明らかに成り立つので, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \neq 0$ とする. $\alpha = t\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$ (t は実数) とおくと, 上の式は

$$t^2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2t|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2 + \|b\|^2 \geqq 0$$

がすべての実数 t に対して成り立つので判別式を考えれば, $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq 0$ となり, (3) が成り立つ. 最後に,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \\ &\leqq (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2.\end{aligned}$$

(3) を使用して,

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2.$$

これで (4) は証明された. □

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がともに $\boldsymbol{0}$ でなく, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ のとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**という. このことを, もう少し一般的にしたものが次の定義である.

定義 6.2 (直交補空間). 内積空間 V の部分集合 W に対して,

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V;\ \text{すべての } \boldsymbol{y} \in W \text{ に対して, } (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\}$$

を, 部分空間 W の**直交補空間**という (W が部分空間でなくても $W^{\perp}$ は部分空間になる) .

問 6.1. W を内積空間 V の部分空間とする. このとき, 次を示せ.

(1) $W^{\perp}$ は V の部分空間である.

(2) W_1, W_2 を V の部分空間とし, $W_1 \subset W_2$ ならば, $W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$.

なお, 直交補空間に関しては第6章で再び触れる.

例 6.3. 内積空間 $\mathcal{C}[-1,1]$(例 6.2) において, 任意の整数 m, n に対して $f(x) = \cos m\pi x$, $g(x) = \sin n\pi x$ とおけば

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \cos m\pi x \cdot \sin n\pi x dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} \sin(m+n)\pi x dx - \int_{-1}^{1} \sin(m-n)\pi x dx\right).$$

右辺の積分はともに 0 となり, $(f,g) = 0$. すなわち, f と g は直交する.

定理 6.3. 内積空間 V において, $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の任意の2つが直交するならば, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は1次独立である.

証明. $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$ とする. $\boldsymbol{a}_i$ との内積をつくれば, $i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$ だから,

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i) = \lambda_i \|\boldsymbol{a}_i\|^2 \ (i = 1, 2, \cdots, k).$$

これから, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ となる. □

V の単位ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$ は, 任意の2つが直交しているとき, すなわち,

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \cdots, k)$$

となるとき, **正規直交系** といわれる. また正規直交系をなす基底を**正規直交基底** という.

例 6.4. $\boldsymbol{R}^2$ において, 任意の θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ に対してベクトル $\boldsymbol{a}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ を考えよ. $\|\boldsymbol{a}_\theta\| = \|\boldsymbol{b}_\theta\| = 1$, $(\boldsymbol{a}_\theta, \boldsymbol{b}_\theta) = 0$ であるから, $\{\boldsymbol{a}_\theta, \boldsymbol{b}_\theta\}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底となる.

例 6.5. $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交基底である.

正規直交系をつくる **Gram-Schmidt (グラム・シュミット) の直交化法**とよばれる便利な方法がある. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を V の1次独立なベクトルとせよ. ベクトル $\boldsymbol{b}'_i$, $\boldsymbol{b}_i$ を順次に次のように定義する. $i = 1$ に対して, $\boldsymbol{b}'_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{b}'_1}{\|\boldsymbol{b}'_1\|}$ とおく. $\|\boldsymbol{b}_1\| = 1$ と

なる．$i=2$ に対して $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}_2'}{\|\boldsymbol{b}_2'\|}$ とおく．$\|\boldsymbol{b}_1\| = 1$ より $(\boldsymbol{b}_2', \boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0$ だから，$(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1) = 0$ かつ $\|\boldsymbol{b}_2\| = 1$ となる．一般に，$\boldsymbol{b}_k$ $(1 \leqq k < n)$ が $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, k)$ となるように定義されたとすると

$$\boldsymbol{b}_{k+1}' = \boldsymbol{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{b}_i \quad \text{および} \quad \boldsymbol{b}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{b}_{k+1}'}{\|\boldsymbol{b}_{k+1}'\|} \tag{5.24}$$

とおく．$j = 1, 2, \cdots, k$ に対して

$$(\boldsymbol{b}_{k+1}', \boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{b}_j) - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{b}_i)(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{b}_j) - (\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{b}_j)(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j) = 0.$$

これから，$(\boldsymbol{b}_{k+1}, \boldsymbol{b}_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$ かつ $\|\boldsymbol{b}_{k+1}\| = 1$．この構成で $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ は正規直交系となる．さらに (5.24) より，任意の k について $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k\}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ から構成される部分空間 $L(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ の基底をなしている．これから次の定理が得られる．

定理 6.4. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を内積空間 V の 1 次独立なベクトルとする．このとき，正規直交系 $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ を構成して，各 $k = 1, \cdots, n$ について $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k\}$ が部分空間 $L(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$ の正規直交基底をなすようにできる．

次の系は定理から明らかである．

系 6.5. $0 \leqq k \leqq n$ とする．V を n 次元内積空間とし，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k\}$ を V の正規直交系とする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を選んで，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が V の正規直交基底をなすようにできる．

例 6.6. $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次独立なベクトルの集合 $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ より正規直交基底をつくる．

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2'}{\|\boldsymbol{b}_2'\|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{b}_3' = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ が求める正規直交基底である．

問 6.2. $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ から正規直交基底をつくれ．

問 6.3. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ を含む $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をつくれ．

7　直交変換と直交行列

内積空間 V の1次変換 f が内積を変えないとき，すなわち V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{5.25}$$

をみたすとき，f を **直交変換** という．

定理 7.1. 1次変換 $f\ :\ V\ \to\ V$ が直交変換であるための必要十分条件は，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\| \tag{5.26}$$

が成り立つこと，すなわち f がベクトルの長さを変えないことである．

証明. Re α を α の実数部，Im α は α の虚数部とする．f を直交変換とする．(5.25) で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とおけば，$\|f(\boldsymbol{x})\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$，すなわち $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が得られる．逆に，f が (5.26) をみたすとする．ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して $\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|$ となるから

$$\begin{aligned} \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 &= (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})) \\ &= \|f(\boldsymbol{x})\|^2 + 2\mathrm{Re}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + \|f(\boldsymbol{y})\|^2. \end{aligned}$$

また

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

であるから右辺を比較して，$\mathrm{Re}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$．次に，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ の代わりに $i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を代入すれば，同じように $\mathrm{Re}(f(i\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Re}(i\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となるので $\mathrm{Im}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を得る．□

例 7.1. $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換 ：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha' x_1 + \beta' x_2 \end{pmatrix}$ を直交変換とする．定理 7.1 より

$$\begin{aligned} &(\alpha x_1 + \beta x_2)^2 + (\alpha' x_1 + \beta' x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2,\ \text{すなわち} \\ &(\alpha^2 + \alpha'^2)x_1^2 + 2(\alpha\beta + \alpha'\beta')x_1x_2 + (\beta^2 + \beta'^2)x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

が任意の x_1, x_2 について成り立つ．これから，

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = \beta^2 + \beta'^2 = 1,\ \alpha\beta + \alpha'\beta' = 0. \tag{5.27}$$

(5.27) は $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\mathrm{A} = (\alpha, \alpha')$ と $\mathrm{B} = (\beta, \beta')$ が単位円周上にあり, 半径 OA と OB が直交することを意味するから, θ, θ' が定まって $(-\pi \leqq \theta, \theta' \leqq \pi)$,

$$\alpha = \cos\theta,\ \alpha' = \sin\theta,\ \beta = \cos\theta',\ \beta' = \sin\theta', \theta' = \theta \pm \frac{\pi}{2}.$$

これから, $\begin{cases} \alpha = \cos\theta, & \beta = -\sin\theta \\ \alpha' = \sin\theta, & \beta' = \cos\theta \end{cases}$ または $\begin{cases} \alpha = \cos\theta, & \beta = \sin\theta \\ \alpha' = \sin\theta, & \beta' = -\cos\theta \end{cases}$ すなわち, $\boldsymbol{R}^2$ の直交変換は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta - x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

の形をもつ.

f を V の直交変換, $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の正規直交基底とする.

$$(f(\boldsymbol{a}_i), f(\boldsymbol{a}_j)) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

となるから, $\{f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ は V の正規直交基底となる. 逆に, 1 次変換 f が正規直交基底を正規直交基底に移すとすれば, f は直交変換となる. これを示すために, $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を V の正規直交基底として, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n$ とする. $f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + \lambda_n f(\boldsymbol{a}_n)$ で $\{f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ は正規直交基底であるから

$$\begin{aligned} (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_j}\,(f(\boldsymbol{a}_i), f(\boldsymbol{a}_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_j}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

これから, $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ となる. よって, 次の定理が成り立つ.

定理 7.2. 内積空間の線形変換 f が直交変換となる必要十分条件は, f が正規直交基底を正規直交基底に移すことである.

例 7.2. 例 7.1 より任意の θ に対して, 写像 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の直交変換である. $\boldsymbol{R}^2$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ に移る. $\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right\}$ が正規直交基底となることはたやすく確認できる.

成分が実数の正方行列 A が

$${}^tAA = A\,{}^tA = E \quad ({}^tA \text{ は } A \text{ の転置行列})$$

をみたすとき, すなわち $A^{-1} = {}^tA$ となるとき, A を **直交行列** と呼んだ.

問 7.1.

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\theta\sin\psi & \cos\psi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

は直交行列であることを示せ.

定理 7.3. 直交行列について次のことが成り立つ.

(1) 単位行列 E は直交行列である.

(2) A が直交行列ならば, $|A| = \pm 1$ となる.

(3) A, B が直交行列ならば, その積 AB も直交行列である.

(4) n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ とする. A が直交行列となる必要十分条件は,

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \cdots, n) \tag{5.28}$$

となることである.

証明. (1) は明らかである. ${}^tAA = E$ ならば $|A|^2 = |{}^tA||A| = |{}^tAA| = |E| = 1$ となるから, $|A| = \pm 1$. これで (2) は示された. また (3) は, A, B が直交行列ならば, ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = E$, $AB\,{}^t(AB) = AB\,{}^tB\,{}^tA = E$ より得られる. 最後に

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} \right)$$

に注意すれば, (5.28) が ${}^tAA = E$ と同値になることが確認できる. 同様にして $A\,{}^tA = E$ も確認できる. これで (4) は示された. □

直交変換と直交行列の関連を示す次の定理がある.

定理 7.4. 1次変換 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ が直交変換となる必要十分条件は, $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ に関する f の表現行列が直交行列となることである.

証明. $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする. $\{\boldsymbol{e}_i\}$ に関する f の表現行列は, 定義により $\boldsymbol{a}_i$ を列ベクトルとする行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ である. f が直交変換ならば, $i, j = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = (f(\boldsymbol{e}_i), f(\boldsymbol{e}_j)) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} .$$

定理 7.3 (4) より A は直交行列となる. 逆に, A が直交行列であるとすれば, 再び定理 7.3 (4) より $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ となる. 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$, $f(\boldsymbol{y}) = y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n$ となるから

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

すなわち, f は直交変換となる. □

最後に $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換 f について考察する. 線形変換 f が任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y}))$$

をみたすとき, f を **対称変換** という. $\boldsymbol{R}^n$ の任意の正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を選ぶ. f を V の線形変換とする.

$$f(\boldsymbol{a}_i) = s_{1i}\boldsymbol{a}_1 + s_{2i}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + s_{ni}\boldsymbol{a}_n = \sum_{k=1}^{n} s_{ki}\boldsymbol{a}_k \ (i = 1, \cdots, n)$$

とすれば, f の $\{\boldsymbol{a}_i\}$ に関する表現行列は $A = (s_{ij})$ となる. f が対称変換ならば,

$$(f(\boldsymbol{a}_i), \boldsymbol{a}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j\right) = s_{ji},\ (\boldsymbol{a}_i, f(\boldsymbol{a}_j)) = \left(\boldsymbol{a}_i, \sum_{k=1}^{n} s_{kj}\boldsymbol{a}_k\right) = s_{ij}$$

だから, $s_{ji} = s_{ij}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ となる. 逆に, $s_{ji} = s_{ij}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ ならば, $(f(\boldsymbol{a}_i), \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{a}_i, f(\boldsymbol{a}_j))$ が成り立つことから, 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n$ に対して

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (f(\boldsymbol{a}_i), \boldsymbol{a}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\boldsymbol{a}_i, f(\boldsymbol{a}_j)) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

となるので, f は対称変換である. □

正方行列 $A = (a_{ij})$ が $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, すなわち, $A = {}^tA$ となるとき, **実対称行列** とよばれる. 上のことから, 次の定理が証明された.

定理 7.5. f を $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とし, $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の任意の正規直交基底とする. f が対称変換となる必要十分条件は, $\{\boldsymbol{a}_i\}$ に関する f の表現行列が実対称行列となることである.

8　実対称行列と２次形式

2次形式を実対称行列を利用して変形すると，その形状がわかる．初めに次の固有値の性質からみる．

定理 8.1. 実対称行列 A の固有値は実数である．

証明. α を固有値とし，その固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．

$$\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2 = \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},{}^t\!A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \overline{\alpha}\|\boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立ち，$\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ より証明された．

定理 8.2. 実対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

証明. A を対称行列，α,β を A の異なる固有値とし，それぞれに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ とする．

$$\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},{}^t\!A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{y}) = \beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

$\alpha \neq \beta$ だから $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$, すなわち，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交する．　□

問 8.1. 次の対称行列は次数の数だけ，互いに直交する固有ベクトルが取れることを確かめよ．

$$(1)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\quad(2)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad(3)\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad(4)\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

問 8.2. 行列 $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ では直交する2本の固有ベクトルを取れないことを確かめよ．

実対称行列については，その固有値が実数となることが定理 8.1 で示された．さらに，直交行列によって対角化可能となることが示される．

定理 8.3. n 次の実対称行列 A は適当な直交行列 P によって次の形に対角化される．

$${}^tPAP = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & & 0\\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

ここで，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ は A の固有値である．逆に，n 次の正方行列 A が直交行列によって対角化されるならば，A は実対称行列である．

証明. 前半を帰納法により証明する. $n=1$ ならば, $P=E$ とすればよい. $(n-1)$ 次実対称行列について証明されたと仮定する. A を n 次実対称行列とし, α_1 を固有値の 1 つとする. α_1 に属する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$ として, $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ を選ぶ. $Q=(\boldsymbol{p}_1\,\boldsymbol{b}_2\cdots\boldsymbol{b}_n)$ とおけば Q は直交行列となる. $A\boldsymbol{p}_1=\alpha_1\boldsymbol{p}_1, (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{b}_j)=0\ (j=2,\cdots,n)$ だから,

$$
\begin{aligned}
{}^tQAQ &= {}^tQ\,AQ = {}^tQ(A\boldsymbol{p}_1\,A\boldsymbol{b}_2\cdots A\boldsymbol{b}_n)\\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}_1, \alpha_1\boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{b}_2) & \ldots & (\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{b}_n)\\ (\boldsymbol{b}_2, \alpha_1\boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_2) & \ldots & (\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\boldsymbol{b}_n, \alpha_1\boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{b}_n, A\boldsymbol{b}_2) & \ldots & (\boldsymbol{b}_n, A\boldsymbol{b}_n) \end{pmatrix}\\
&= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

の形となる. また, A が実対称行列であることにより ${}^t({}^tQ{}^tAQ) = {}^t({}^tQAQ) = {}^tQ{}^tAQ = {}^tQAQ$ となり, 上の行列は対称行列であることがわかる. したがって,

$$
\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right) = {}^t\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{c} & {}^tB \end{array}\right)
$$

となるから, $\mathbf{c}=\mathbf{0}$ かつ $B={}^tB$. これから, $Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)$ となり, B は $(n-1)$ 次の対称行列となる. ${}^tQAQ$ と A の固有値は等しいから, B の固有値は $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ である. 帰納法の仮定より, 適当な $(n-1)$ 次の直交行列 R があって

$$
{}^tRBR = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.
$$

$S = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R \end{array}\right)$ とおけば,

$$
{}^tS = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & {}^tR \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R^{-1} \end{array}\right) = S^{-1}
$$

となるから，S は直交行列である．$P = QS$ と定義すれば，P は直交行列で

$$\begin{aligned}
{}^tPAP &= {}^tS\,{}^tQAQS = {}^tS({}^tQAQ)S \\
&= {}^tS\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)S = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & {}^tRBR \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

逆に，A が直行行列 P によって対角化されたとする．このとき，${}^tPAP$ は対角行列であるから，もちろん対称行列である．そこで,

$${}^tP\,{}^tAP = {}^t({}^tPAP) = {}^tPAP.$$

このことと, P が正則であることから ${}^tA = A$ が得られる．　□

例 8.1. 次の対称行列を直交行列により対角化せよ．

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解．(1) $f_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-4)$．固有値 1, 2, 4 に属する固有ベクトルは，それぞれ

$$\boldsymbol{p}_1 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0).$$

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は互いに直交しているので，対角化するための直交行列は，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を正規化して $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とする．このとき，${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．

(2) $f_B(x) = |xE - B| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x(x-3)^2$ から，固有値は 0, 3（重解）となる．0 に属する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 3 に属する固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

の形をもつ．$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおき，グラム・シュミットの直交化法を用いる．$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$ だから，この2つを正規化して

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

つぎに，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_3' &= \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これを正規化して，$\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ を得る．ここで，$\boldsymbol{a}_1$ が $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ と直交していることから，$\boldsymbol{p}_3$ は $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のみの1次結合となり，直交化法の変形を行っても依然固有値3に属する固有ベクトルとなっている．これから，$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$ が求める直交行列であり，${}^tPBP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

Point: 例8.1の(2)の固有値3に対する2つの固有ベクトルを初めから直交するように選んでくれば，わざわざグラム・シュミットを使う必要がない．例えば $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と選べば，あとはベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ をそれぞれ長さを1にして，順序よく並べたものを P とすればよい．

問 8.3. 次の実対称行列を直交行列を用いて対角化せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する実数係数の2次同次式

$$Q = Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{5.29}$$

を**実2次形式** または単に**2次形式** という. $a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij} + a_{ji})x_ix_j$ だから, $a_{ij} + a_{ji} = 2a'_{ij}$ とおけば, $a'_{ij} = a'_{ji}$ となり

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}x_ix_j$$

と表せる. これから, a'_{ij} を改めて a_{ij} と書いて, 実2次形式 (5.29) は $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ となっているとする. (5.29) の係数行列より

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

は実対称行列となる. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおけば, (5.29) は

$$Q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \tag{5.30}$$

の形をとる.

定理 8.4. 実2次形式 $Q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は, 適当な直交変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ によって次のような形に変換される.

$$Q = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_r y_r^2 \quad (r \leqq n) \tag{5.31}$$

ここで, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ は A の 0 でない固有値である.

証明. A は重複も含めて n 個の固有値をもつから, それを $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ と 0 ($(n-r)$ 重解) として, 適当な直交行列 P で

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \alpha_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

となる. 変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ を行えば

$$\begin{aligned} Q &= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}P^{-1}AP\boldsymbol{y} \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \alpha_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_r y_r^2. \end{aligned}$$

となる．　□

上の定理の形 (5.31) を 2 次形式の **標準形** といい，2 次形式を標準形に直す直交変換を**主軸変換**，標準形に対する基底を**主軸**という．

例 8.2. 次の 2 次形式を主軸変換により標準形に直せ．

(1). $Q_1 = 2x^2 - 2xy + 2y^2$

(2). $Q_2 = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + w^2 - 2xy.$

(1) 係数行列は $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$．よって $f_A(x)$ は $f_A(x) = |xE - A| = (x-2)^2 - 1 = (x-1)(x-3)$．これから，標準形は $Q_1 = u^2 + 3v^2$ となる．固有値 1, 3 に属する固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{p}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となるから，主軸変換の直交行列は $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ となり，主軸は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \\ x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．

(2) 係数行列は $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$．よって $f_B(x)$ は

$$f_B(x) = |xE - B| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)(x-1)^3$$

となり，固有値は 3, 1 (3 重解) である．これから，標準形は $Q_2 = 3u^2 + v^2 + s^2 + t^2$ となる．3 に属する固有ベクトルは $\begin{cases} x + y = 0 \\ z \quad = 0 \\ w \quad = 0 \end{cases}$ の非自明解だから $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ となる．

1 に属する固有ベクトルは $\begin{cases} x - y = 0 \\ z, w;\ \text{任意} \end{cases}$ となるので，$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形を

も．この4個のベクトルは互いに直交しているから，前の2個を正規化すれば，主軸変換の行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，主軸は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} \\ x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

問 8.4. 次の2次形式を標準形に直せ．

(1)　$2x^2 + 6xy + 2y^2$　　(2)　$2x^2 - 2\sqrt{3}\,xy$

(3)　$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 2zx$

第 5 章 練 習 問 題

1.　成分が実数である2行2列行列の集合 $M_2(\boldsymbol{R})$ はベクトル空間になる．このときの基底を求めよ．

2.　例 1.5 で紹介したベクトル空間 $P_n(x)$ において，次の写像が一次写像であることを示せ．

(1)　$f(x) \mapsto f'(x)$　　(2)　$f(x) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

(3)　$f(x) \mapsto f(2x+3)$　　(4)　$f(x) \mapsto \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n}$

3.　次のように定義される $\boldsymbol{R}^3$ の写像は1次変換であるか?

(1)　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+y+z \\ -x \end{pmatrix}$　　(2)　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z+1 \end{pmatrix}$　　(4)　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y+z \\ -2 \\ x-z \end{pmatrix}$

4.　$\boldsymbol{R}^3$ の次の1次変換の標準基底に関する表現行列を求めよ．

(1)　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$　　(2)　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix}$　　(3)　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y+z \\ -y \\ x-z \end{pmatrix}$

5. $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線形写像 F が

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4\\7\\6\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5\\9\\8\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

のとき, F の表現行列を求めよ.

6. $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, を選んだとき, B_1, B_2 に関する次の1次写像の表現行列を求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\x_1\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1+x_2\\-x_1\\-2x_1+3x_2\end{pmatrix}$$

7. 次の行列が直交行列となるように a, b, c を定めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6} & b & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} & c\\ a & \frac{1}{\sqrt3} & 0\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & -\frac{\sqrt3}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt3}{2} & c\end{pmatrix}$$

8. ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-4\\7\\6\\-1\end{pmatrix}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を W とするとき,

(1). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のうちから, 幾つかのベクトルを選んで W の基底を作れ.

(2). この基底に幾つかの新しいベクトルを追加して $\boldsymbol{R}^4$ の基底を作れ.

9. $\boldsymbol{R}^4$ で次の基底から正規直交基底をつくれ.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

10. $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ :\ -x_1+2x_2-x_3=0\right\}$$

の正規直交基底を求めよ.

11. $\boldsymbol{R}^2$ において, 次の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ への基底変換の行列を求めよ.

$$(1)\ \left\{\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\qquad \left\{\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\right\}$$

(2) $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

12. $\boldsymbol{R}^3$ において, 次の 1 次変換 f の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ に関する表現行列を求めよ.

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y - z \\ x + 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

(1) $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(2) $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

13. 次の行列の固有値とその固有値に対する固有空間の一つの基底を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ a & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $(a \neq 0)$

14. 次の各 2 次形式について, (a) から (d) について答えよ.

(1) $x^2 + y^2 - 2xy$
(2) $5x^2 - 3y^2 + 6xy$
(3) $3x^2 + y^2 - 2xy$
(4) $2x^2 + 18y^2 - 12xy$ $(\boldsymbol{R}^3)$
(5) $2x^2 + y^2 + 2zx$
(6) $x^2 + y^2 + 2yz + 2zx$
(7) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$
(8) $y^2 - z^2 + 4xy + 4zx$
(9) $2x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2xy$
(10) $-x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2yz$
(11) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2yz + 2zx$
(12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$.

(a) ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の形に表せ. (b) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(c) A を対角化する直行行列 P を求め, ${}^tPAP$ を求めよ.

(d) 標準形を求めよ.