

工学を志す人の 線形代数

阿部吉弘・伊藤 博・酒井政美
長 宗雄・永野與彦・堀口正之
矢島幸信・山崎文明

東京 教 学 社

序

この本で取り上げる話題のひとつの最も素朴な形は

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{3}y = 1 \\ -\frac{2}{5}x + 4y = -3 \end{cases}$$

のような、連立方程式である。このような連立方程式は、すでに中学校以来おなじみのように、1つの未知数を消去することによって解を求めることができる。すなわち、第1の式を4倍したものから、第2の式を $\sqrt{3}$ 倍したものを引けば x だけの式が残る、解を求めることができる。このとき、 x の係数として現れるもの、すなわち $2 \times 4 - (-\frac{2}{5}) \times \sqrt{3}$ から行列式の発見につながった、というのであれば話はわかりやすいのであるが、歴史は必ずしもこのようには展開しなかった。ただ、和算(西洋数学の影響を受ける以前の日本で独自の発展をとげた数芸をこうよぶ)の歴史の中で、関孝和(1642? - 1708)が行列式を見出した経緯は、連立方程式の取り扱いの中からだったらしい。関孝和の行列式の発見は、その西洋数学の中での発見者とされるライプニッツ(1646 - 1716)に先んずるとして、和算史の中でのひとつの誇らしい挿話となっている。しかし、ライプニッツを行列式の第一発見者とするのは、例えその端緒が著書の中にほのめかされているとはいえ、疑問視されている(ブルバキ(村田全訳), 数学史 77頁)。実際には、解析幾何を研究する中で座標変換のようなことから、クラメル(1704 - 1752)やベズー(1739 - 1783)などによって導入され、コーシー(1789 - 1857)、ヤコビ(1804 - 1851)によって、少なくとも、この本で解説する程度にまでは発展させられた。

また数学的なある対象の集まりが線形的かどうかという問いかけの仕方も、歴史的には連立1次方程式系の解の空間についてではなく、むしろある種の微分方程式の解の空間のあり方から導入されたという方が事実に近いだろう。

いわば、連立1次方程式自体は順次未知数を消去していきさえすれば、解ける(あるいは解けないことの判定がつく)ということで、これ自体を目的に研究するということとはほとんどなかったように見える。

しかし、現在では多少状況は異なっている。工学などの実用上では大きなサイズの連立1次方程式を、可能ならば、具体的に解けることが望ましいし、近年の計算機の発達により、実際に望みもでてきた。この場合はいかに効率的に解くかということも時間、費用の面から重要になり、この方向の研究もいまや数多くある。また情報通信の分野では、スカラーの区域を有限体とよばれるものに取り替えるのではあるが、行列や行列式の理論的側面を駆使している。

このような時代にふさわしい教科書として本書が読者の役に立つことを願っている。

2000年9月

著者

目次

1	行列	3
1	行列とその和・スカラー倍	3
2	行列の積	5
3	種々の行列	8
2	行列の基本変形と連立 1 次方程式	13
1	行列の基本変形	13
2	階段行列への変形	16
3	行列の階数, 標準形	19
4	連立 1 次方程式の解法	22
5	連立 1 次方程式の解と係数行列の階数	26
6	逆行列	28
3	行列式	33
1	順列	33
2	行列式の定義	36
3	行列式の性質 (1)	38
4	行列式の性質 (2)	41
5	行列式の乗法性	44
6	展開公式	46
7	展開公式の応用	49
8	小行列式と行列の階数	53
4	固有値と固有ベクトル	57
1	1 次独立と 1 次従属	57
2	階数	60
3	行列の階数, 正則性との関係	62
4	固有値と固有ベクトル (1)	65
5	固有値と固有ベクトル (2)	68
6	行列の対角化	69

2 目次

5	線形写像	75
1	ベクトル	75
2	ベクトル空間	78
3	ベクトル空間の基底と次元	80
4	線形写像と1次変換	83
5	線形写像の表現行列	86
6	複素ベクトル空間と正規直交基底	92
7	直交変換と直交行列	96
8	実対称行列と2次形式	100
6	正規行列とJordanの標準形	109
1	正規行列	109
2	巾零行列	112
3	Jordanの標準形	115
4	行列の絶対値と不等式	123
7	工学への応用	133
1	線形システムと状態方程式	133
2	システムの安定性	136
3	線形計画法	138
4	2次形式と固有値	142
5	その他の応用	144
	付録	145
1	付録1: 階段行列の一意性	145
2	付録2: 2次・3次の行列式と面積・体積	146
3	付録3: 多項式	149
	解答	151

第1章

行列

1 行列とその和・スカラー倍

数を下のように長方形上に並べて括弧でくくったものを行列という:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列において、横の並びを行といい、縦の並びを列という。上の行列 A は、行が m 個、列が n 個あるので、 m 行 n 列の行列、または (m, n) 行列という。行列 A の第 i 行と第 j 列の交わりの位置にある数を A の (i, j) 成分という。 (i, j) 成分が a_{ij} である行列を (a_{ij}) と書く。

例 1.1. $a_{ij} = i^2 - j$ であるとき、 $(4, 5)$ 行列 $A = (a_{ij})$ の成分を並べて書き表すと

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

となる。

$(1, n)$ 行列を n 次元行ベクトル、 $(m, 1)$ 行列を m 次元列ベクトルといい、これらを総称して数ベクトルという。特に、すべての成分が 0 の数ベクトルを零ベクトルといい、 $\mathbf{0}$ とかく。 (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ の第 i 行の成分からできる行ベクトルを A の第 i 行ベクトルといい、 A の第 j 列の成分からできる列ベクトルを A の第 j 列ベクトルという。たとえば、例 1.1 の A について、第 3 行ベクトルは

$$(8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4),$$