2019年中間試験　数学II 問題

解答例

実施日: 11月18日

$\boxed{1}$ （その１）
つぎの関係を満たす行列 A, B を求めよ.

(i) $A\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}102 & 304 & 506\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$

【解】
まず行列のタイプを定める：A は 2×2 の行列であること。
解き方は行列の要素に未知数を立てて、連立方程式として解くか、あるいは行列の変形から、３つの基本操作を思い出して、直接答えが得られる。
この場合は、「1 行目」１行を１００倍して、2 行目との和をおこなう。「2 行目」変化させない。

(答え) $A=\begin{pmatrix}100 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\boxed{1}$ （その 2）

(ii) $B\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = (7, -16)$

【解】行列 B のタイプは 1×2 であること。
連立方程式を立てて解くことが確実。

$B = (b_1, b_2)$ とおくと $\begin{cases} b_1 - 2b_2 = 7 \\ -2b_1 + 5b_2 = -16 \end{cases}$ を解けばよい。

(答え) $B = \begin{pmatrix} 3, & -2 \end{pmatrix}$

この行列をかける操作：3 つの操作のうちの組合せを考えることも大切。
またこれらは積を行うことで、答えが正しいかどうか確認できる。

$\boxed{2}$

つぎの連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 2 \\ x - 2y + z &= -1 \\ 2x - y - z &= 1 \end{cases}$$

【解】基本の解法は掃き出し計算であるが、係数が簡単なのでそれにこだわらず解く方が簡単かも知れない。ただし掃き出し計算では解が、不定形かどうかの判断もできる利点をもつ。
すぐわかることは、2 行目と 3 行目を加えれば、解のひとつには、$x = y$ が得られる。したがって、$x = y = c$ とおいて、残りの z を解けばよい。
表現としてベクトルをもちいる。

$$\text{(答え)} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c は任意定数。

$\boxed{\mathbf{3}}$ （その１）

つぎのそれぞれの行列に対して、(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ では $A^2 - 3A$ の行列、

【解】行列の積（2 乗）と和の計算だけ

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
= \quad &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
= \quad &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \\
= \quad &\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

容易な計算であるから、間違いのないように。これは公式を知っていれば、解答を確かめられるが、そうでない場合には、ゆっくりと着実に計算すればよい。

$\boxed{\mathbf{3}}$(その２) また (ii) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき、行列 $B^2 - (a+d)B$ を計算せよ。

【解】対角成分の和 $a+d$ をトレースとよび、これと行列式 $ad-bc$ を係数（符号に注意）とする行列の関係式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

をケーリー・ハミルトンの定理をいう。

$$(\text{答え}) \quad (-1)(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}$$

前問と同じように計算してみれば得られる。この公式は後半では固有値、固有ベクトルの章でも出てくる。覚えておくとよいが、授業でもその理由を述べる。また余裕があれば、3 次の場合にどうなるか考えてみるとよいかも知れない。

$\boxed{\mathbf{4}}$ (その 1)
つぎの行列に対し、逆行列が存在するならば、これを求めよ。答は分数のままでよい。もし存在しない場合は理由を述べよ。
(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

【解】逆行列をもとめる方法には
I. 連立方程式を解く。II. 逆行列の公式をもちいる（次数が大きいとき、推奨できない）III. 掃き出し計算（行列の階数なども得られ、次数が大きい場合でも適用が容易！）IV. 行列式の計算をできるならば、クラーメルの公式でもよいかも知れない。

　存在しないということは、行列式がゼロとか、行列の階数が full ランクでない場合等である。簡潔に述べれば、ゼロで割ることはできないことで、割る値がゼロとなる場合（たとえば、分母にくる値がゼロになる場合には、計算ができない)。2 次の場合には 行列式 $ad - bc$ が分母にくるので、これがゼロにならないことが条件となる。このように、「一般には存在しない場合がある」ことを強調したい意図の文章です。

$\boxed{\mathbf{4}}$ (その 2)

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (その 1)

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ とするとき、つぎの関係を満たす B, C の行列を求めよ。

(i) $BA = \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (その 2)

(ii) $CA = \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ 0 & 1 & \dfrac{af - cd}{ae - bd} \end{pmatrix}$

【解】

掃き出し計算の手順を表す。この行列変形は

（イ）ある行を定数倍すること。

（ロ）ある行を定数倍して、他の行に加える（多くの場合は負の符号を加えることで、引き算を行うことで、要素をゼロにする）

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ d & e & f \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ 0 & 1 & \dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{pmatrix}$$

【解】(i) 第 1 行を定数倍 $1/a$ することで行列は要素 (1,1) を 1 にすること。

$$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

【解】
(ii)
[1] 第 1 行をもちいて、要素 (2,1) を 0 にすること

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ d & e & f \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ (-d)+d & (-d)(b/a)+e & (-d)(c/a)+f \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ 0 & \dfrac{ae-bd}{a} & \dfrac{af-cd}{a} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[2] 要素 (2,1) を 1 にする操作、逆数を掛けること。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{ae-bd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ 0 & \dfrac{ae-bd}{a} & \dfrac{af-cd}{a} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ 0 & 1 & \dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{pmatrix}
$$

以上の操作をまとめれば、つぎの結果となる。

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{ae-bd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ \dfrac{-d}{ae-bd} & \dfrac{a}{ae-bd} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ つぎの連立方程式の解 x, y, z, u, v を求めよ。答は分数のままでよい。

$$\begin{cases} x - y - z + u & = & 1 \\ 2x - 2u - v & = & 1 \\ x + y - z - u + 3v & = & 0 \end{cases}$$

変数が 5 個あるので、掃き出し計算をすることで答えがでてくる。方法は以前のことの繰り返しをおこなえばよい。
(答え)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5/4 \\ -1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/4 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5/4 \\ -1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} + c_1' \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

任意定数の置き方はいろいろあることに注意する。