

Maxima を使う線形代数– 連立方程式

1 連立 1 次方程式 (直接法)

テキスト 41 ページ, 例 1

方程式を入力して、結果を出力した場合：任意定数 ($\%rk, k = 1, 2, \dots$ の形) を含んだ結果が得られる。通常はこの任意定数をスカラー倍としてまとめる。

```
(% i20) Lsol:linsolve ([2*x - 2*y + z = 0,
                        x + 2*y - 4*z = 0,
                        -3*x + 2*y = 0], [x,y,z]);
```

$$\left[x = \%r1, y = \frac{3\%r1}{2}, z = \%r1 \right] \quad (\% o20)$$

```
(% i21) Lsol[1];
```

$$x = \%r1 \quad (\% o21)$$

```
(% i22) Lsol[2];
```

$$y = \frac{3\%r1}{2} \quad (\% o22)$$

```
(% i23) Lsol[3];
```

$$z = \%r1 \quad (\% o23)$$

したがって、 $t = \%r1$ とおくとか、あるいは $t = t'$ などとおいても構わない。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

表し方はなるべく簡潔になるようにする。

2 掃き出し計算による解法

つぎは掃き出し計算により、階段行列への変形をもちいた方法。この方法には3つの変形行列を、与えられた行列の左側からかけることで行の消去でおこなったが、記憶メモリの置き換えを利用した方法を述べよう。基本的にはまったく同じである。

```
(% i24) mA:matrix([2,-2,1],[1,2,-4],[-3,2,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\% o24)$$

入力した各行 ($mA[1], mA[2], mA[3]$) を確認すると、

```
(% i25) mA[1];
```

$$[2, -2, 1] \quad (\% o25)$$

```
(% i26) mA[2];
```

$$[1, 2, -4] \quad (\% o26)$$

```
(% i27) mA[3];
```

$$[-3, 2, 0] \quad (\% o27)$$

これらの各行に、行変形をテキストと同じ操作により、(掃き出しの操作は一通りではないから) おこなっている。文章の説明と対応してみると、その方法が理解される。

```
(% i28) mA2:matrix(mA[2],mA[1],mA[3]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\% o28)$$

```
(% i29) mA3:matrix(
    mA2[1],
    mA2[2]+mA2[1]*(-2),
    mA2[3]+mA2[1]*3);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 9 \\ 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o29})$$

```
(% i30) mA4:matrix(
    mA3[1],
    mA3[2]*(-1/6),
    mA3[3]+mA3[2]*(4/3));
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o30})$$

```
(% i31) mA5:matrix(
    mA4[2]*(-2)+mA4[1],
    mA4[2],
    mA4[3]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o31})$$

3 階段行列への変形

テキスト 4 5 ページ、例題 1

命令 `echelon` による変形と掃き出し計算による結果との比較

まず掃き出しを順次におこなう。この結果をみれば、わかるよう要素がゼロであるときには割り算をするこ
とができないから、その先には進行できない。つまり行列の階数が異なってくる。Maxima では、この場合分
けをおこなっていないことが、結果からわかる。掃出し法はピボット要素がゼロかどうかの判断で、分岐され
なければならない。容易に結果が得られていても、いくつかの方法を並列におこなうことで、プログラムに数
学的な Bug がないかどうか、検証をしておくことも大切である。

```
(% i32) mC:matrix(
    [1,2,1,1],
    [0,-1,2,1],
    [2,3,x,y]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & y \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o32})$$

```
(% i33) mC1:matrix(
    mC[1],
    (-1)*mC[2],
    mC[1]*(-2)+mC[3]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 & y-2 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o33})$$

```
(% i34) mC2:matrix(
    mC1[1],
    mC1[2],
    mC1[2]+mC1[3]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 & y-3 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o34})$$

このように手順をおっていけば、掃き出しのピボットする要素（成分）がゼロであるかどうか、場合分けを考えて進められる。この場合は、第 3 行のピボット値 $x-4$ がゼロかどうか、分岐されなければならない。ゼロであれば、もしゼロであれば、次の列要素（この場合は最尾部であり、 $y-3$ がゼロかどうかの場合分けとなる）に進むかどうか分かれる。

問題の答えとして、階数が $\text{rank} = 2$ となるのは、 $x = 4$ かつ $y = 3$ のときに限る（第3行がすべてゼロとなるから）。しかし少なくとも一方がゼロでなければ、 $\text{rank} = 3$ となる。

つぎに命令 `echelon` による変形をおこなう。

テキスト 4 5 ページ 例題 2

「4 個の未知定数に関する 3 本の方程式を解く。」

```
(% i36) mD: matrix(
      [1,3,0,1,3],
      [1,2,1,0,1],
      [-1,1,-4,3,a]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & a \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o36})$$

```
(% i37) mD1 : matrix(
      mD[1],
      mD[1]*(-1)+mD[2],
      mD[1] + mD[3]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & a+3 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o37})$$

```
(% i35) echelon(mC);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y-3}{x-4} \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o35})$$

```
(% i38) mD2 : matrix(
      mD1[2]*3+mD1[1],
      mD1[2]*(-1),
      mD1[2]*4+mD1[3]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o38})$$

掃き出し計算はここまでであり、もし $a = 5$ であれば、最尾行（第3行）はゼロとなるから、行列 mD の階数は $\text{rank}(mD) = 2$ であり、4 個の独立な未知変数があるから、 $4 - 2 = 2$ の 2 個の任意定数、たとえば t_1, t_2 とすると、これをもちいて解を表す。もし $a \neq 5$ であれば、最尾行の式は、左辺がすべてゼロであるが、右辺の $a - 5 \neq 0$ となり不合理になるから、解は存在しない。

4 変形行列の積による掃き出し計算

多くの教科書には、掃き出し計算は 3 つの操作：

- 行の交換
- ある行を定数倍
- ある行を定数倍したものを他の行に加える

具体的な行列は次の形をとる。

与えられた行列：

```
(% i24) M:matrix([3,7,a,b],[-1,8,5,2],[9,2,11,4]);
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & a & b \\ -1 & 8 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix} \quad (M)$$

つぎは、第1行に定数 $1/3$ をかける。要素 $(1,1)$ の値を基準化するために 1 とする。この行列 $H1$ を左側からかけると、第1行が $(3, 7, a, b)$ から、 $(1, 7/3, a/3, b/3)$ となるから、この行をもちいて、第2行、第3行の1列目をゼロにすることが、暗算でもできるようにす

るため。

(% i25) H1:matrix([1/3,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{H1})$$

(% i26) M2:H1.M;

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} \\ -1 & 8 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{M2})$$

2行目では

$$\left(1, \frac{7}{3}, \frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right) + (-1, 8, 5, 2) = \left(0, \frac{31}{3}, \frac{a}{3} + 5, \frac{b}{3} + 2\right)$$

という結果を第2行目に記入する。また3行目に対しては、数値9をゼロにしたいから、反対の符号-9をかけたものを加えて3行目ならば、

$$(9, 2, 11, 4) + 9 \cdot (-1, 8, 5, 2) = \left(0, \frac{31}{3}, \frac{a}{3} + 5, \frac{b}{3} + 2\right)$$

(% i10) H3:matrix([1,0,0],[0,1,0],[-9,0,1]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{H3})$$

となるような変形行列をかけると

(% i29) M4:H3.M3;

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & \frac{31}{3} & \frac{a}{3} + 5 & \frac{b}{3} + 2 \\ 0 & -19 & 11 - 3a & 4 - 3b \end{pmatrix} \quad (\text{M4})$$

となり、1列目の sweep out が終わり、2行目に移る。要素(2,2)を1にし、3行目の(-19)をゼロになるように行列H5をかけていけばよい。

(% i31) M5:H4.M4;

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3(\frac{a}{3}+5)}{31} & \frac{3(\frac{b}{3}+2)}{31} \\ 0 & -19 & 11 - 3a & 4 - 3b \end{pmatrix} \quad (\text{M5})$$

(% i32) H5:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,19,1]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{H5})$$

以下は説明を省略するが、順にたどり、確証をできることも記憶されたい。この中で命令 ratsimp は rational simplify (簡略化) を意味する。

(% i33) M6:H5.M5;

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3(\frac{a}{3}+5)}{31} & \frac{3(\frac{b}{3}+2)}{31} \\ 0 & 0 & -3a + \frac{57(\frac{a}{3}+5)}{31} + 11 & -3b + \frac{57(\frac{b}{3}+2)}{31} + 4 \end{pmatrix} \quad (\text{M6})$$

(% i34) M62:ratsimp(M6);

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+15}{31} & \frac{b+6}{31} \\ 0 & 0 & -\frac{74a-626}{31} & -\frac{74b-238}{31} \end{pmatrix} \quad (\text{M62})$$

(% i35) H6:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,-31/(74*a-626)]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{31}{74a-626} \end{pmatrix} \quad (\text{H6})$$

(% i36) M7:H6.M62;

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+15}{31} & \frac{b+6}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{74b-238}{74a-626} \end{pmatrix} \quad (\text{M7})$$

(% i37) ratsimp(M7);

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+15}{31} & \frac{b+6}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37b-119}{37a-313} \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o37})$$

4.1 補足

行変形のために、与えられた行列に【左側から】積の演算、掛け算をしている。積の演算は交換律を満たさない。もし【右側】の積をすると、列の操作が対応する。

(以上)