

統計学 II 解答のヒント

確率分布、2 項分布、正規分布

2018 年 11 月

1 確率変数 X の取り得る値と確率は $P(X = 100) = p$, $P(X = 120) = 1 - p$ である。ただし $0 < p < 1$ 。このとき、つぎの期待値を求めよ。

$$(1) E(X) \qquad (2) E(X - 10) \qquad (3) E\left(\frac{X}{10}\right)$$

● 期待値； $E[g(X)]$ は 総和 $\{ (\text{値}) \times (\text{確率}) \}$

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)P(X = x_i)$$

＊値は確率変数の関数＊

値 X	100	120
値 $X - 10$	90	110
値 $X/10$	10	12
確率	p	$1 - p$

2 袋のなかには 4 個の赤球と 6 個の白球が入っている。この中から、1 個ずつ 3 回の取り出しを「非復元抽出 (取り出した球はもとに戻さない)」した。つぎの確率をもとめよ。答は分数のままでよい。

(1) 3 個とも同じ色の球である確率

(2) 同じ色の球が続けて出ない確率

● 樹形図によって、取り出しによる袋の球数の状態変化を調べていく。

(1) では $W \rightarrow W \rightarrow W$ または $R \rightarrow R \rightarrow R$ となる事象の確率,

(2) では $W \rightarrow R \rightarrow W$ または $R \rightarrow W \rightarrow R$ となる事象の確率

3 二項分布 $\text{Binom}(n, p)$ にしたがう確率変数の (a) 平均 と (b) 分散 をもとめよ。

- 二項分布の確率密度関数は $X \sim \text{Binom}(n, p)$;

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

平均 EX では $k \times {}_n C_k = n \times {}_{n-1} C_{k-1}$,

分散では

$V(X) = E(X^2) - \{EX\}^2 = E(X(X-1)) + EX - \{EX\}^2$ とし、

$$k(k-1) \times {}_n C_k = n(n-1) \times {}_{n-2} C_{k-2}$$

をもちいれれば簡単。

4 サイコロを 8 回投げるとき、つぎの確率をもとめよ。答は分数のままでよい。

(1) 1 の目が全くでない (2) 1 の目が少なくとも 2 回でる

- 二項分布 $n = 8, p = \frac{1}{6}$ とした $X \sim \text{Binom}(n, p)$;

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

において、

$$P(X = 0),$$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}$
を計算する。

解答は $1 - c \times \left(\frac{a}{b}\right)^k$ などの形でよい。

5 グラフは正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の密度関数を表す。それぞれのグラフに $\mu, \mu + \sigma, \mu - \sigma$ を示せ。(1) $P(X < \mu)$ を斜線で示せ。(2) $P(X > \mu + \sigma)$ を斜線で示せ。(3) $P(|X - \mu| < \sigma)$ を斜線で示せ。(4) $P(X > c) = 0.75$ となるおよその値 c を図中に示せ。

● 密度関数 $y = f(x)$ における

最大を与える値 (x 軸上の点) が平均 μ ,

変曲点 (2 回微分がゼロ、凸から凹または凹から凸に変化する点) が $\mu \pm \sigma$ (平均で線対称のグラフであり、2 カ所ある)
該当の区間に対応する曲線の面積部分が確率に対応する。

中央が $x = \mu$ で確率が 0.5 になり、この値より小さい値である。正規分布表から、およその値は $c = \mu - 0.67\sigma$ となる。確かめよ。

6 確率変数は $X \sim N(0, 1)$ にしたがうとき、つぎの確率をもとめよ。

$$(1) P(X < 1) \quad (2) P\left(X > \frac{1}{2}\right) \quad (3) P(-1 < X < 2)$$

● 正規分布表: $\Phi(x) = P(X \leq x)$ とすると、

$$(1) P(X < 1) = P(X \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413$$

$$(2) P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 0.3085$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P(-1 < X < 2) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) - \{1 - \Phi(1)\} \\ &= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = \dots (\text{後は正規分布表より}) \end{aligned}$$

7 X は平均 10, 分散 $2^2 = 4$ の正規分布にしたがう。つぎの値をもとめよ。

(1) $P(X < 13)$

(2) $P(-c < X < c) = 0.99$ をみたす c

● 一般の $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ から標準正規分布 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ へと変換する。

$$P(X < 13) = P\left(\frac{X - 10}{2} < \frac{13 - 10}{2}\right) = P\left(Z < \frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right)$$

後半は $P(-c < X < c) = P\left(\frac{-c - 10}{2} < Z < \frac{c - 10}{2}\right)$ だから、

$$2\left\{\Phi\left(\frac{c - 10}{2}\right) - 0.5\right\} = 0.99 \text{ より、逆引きで } c \text{ を求める。}$$

8 2つの母集団 A, B はそれぞれ、 $N(60, 8^2)$, $N(52, 5^2)$ の正規分布にしたがうという。それぞれから抽出した標本を X, Y とおくと、つぎの確率をもとめよ。

(1) $P(X < Y)$

(2) $P(|X - Y| \leq 3)$

● 独立な2つの正規分布の $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ からつくる確率変数の差 Z は

$$Z = X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

ここで 平均は差 $\mu_1 - \mu_2$ となるが、分散は和 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ であることに注意。

さらに求めた平均と分散から標準化した確率変数（標準正規分布）のそれぞれの区間に対する確率を計算する。