

数学 II（線形代数） 解答のヒント

行列の基本、連立方程式、基本変形

2018 年 11 月

1 行列の関係 $\begin{pmatrix} 2a-4b & c+d \\ 3b+c & a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ を満たす a, b, c, d をもとめよ。

- 連立方程式を立てて係数を消去する。まず 1 行目の要素 (1,1) をピボットとし、4 行目要素 (4,1) をゼロとする基本操作 $r_8 = r_4 + (-1)r_5$ では以下の通り。同様に要素 (2,2) へと続ける。

	a	b	c	d	
	2	-4	0	0	: $6 \cdots r_1$
	0	3	1	0	: 7
	0	0	1	1	: 1
	1	0	-1	0	: $8 \cdots r_4$

	a	b	c	d	
	1	-2	0	0	: $3 \cdots r_5 = r_1 / \text{2}$
$\Rightarrow$	0	3	1	0	: $7 \cdots r_6$
	0	0	1	1	: 1
	0	2	0	-1	: $5 \cdots r_8 = r_4 + (-1)r_5$

□2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ とするとき、 AB, BA をもとめよ。

● 内積の定義と行列の積は同じ。

例えば、 A, B において 1 行目と 1 列目をかけると、要素 $(1, 1)$ の値が

$$(1 \quad 2 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 12$$

となる。以下同様に、結果は AB は 2 行 3 列 $\times$ 3 行 2 列 = 2 行 2 列の型、 BA は 3 行 2 列 $\times$ 2 行 3 列 = 3 行 3 列の型となる。

$$\boxed{3} \quad \text{つぎの不定形となる連立方程式} \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x - 2y + z = -1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \quad \text{を解}$$

け。(任意定数をもちいて表す)

- 掃き出し計算をした結果は

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & -1 & : 1 \\ 0 & 1 & -1 & : 1 \\ 0 & 0 & 0 & : 0 \end{array}$$

これを任意定数で解を表現する。たとえば、 $z = k$ (任意定数) とおき、 x, y を k で表す。

4
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、 $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, また
 $YA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であったという。この行列 X, Y をもとめよ。

- 連立方程式を立てて解くことと同じ。逆行列の計算であり、右側、左側でも同じ結果。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

★結果に対しては、2 ブロックに分けた形 ($1 \times 1, 2 \times 2$) に注目。

5 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、べき乗 A^{10} を求めよ。

- 2 乗をしてみると、単位行列になる。したがって、それ以降は単位行列のままでの繰り返し。

$$\boxed{6} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ とするとき、 } BA = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{af - cd}{ae - bd} \end{pmatrix} \text{ と変形する行列 } B, C \text{ を求めよ。}$$

● 連立方程式と考えると易しい問題ですが、行列に関する3つの基本操作から考える。 BA は A の第1行を a で割ること ($1/a$ 倍) の操作、 CA はこの結果の行列 BA について、第1行目を $(-d)$ 倍して、2行目に加える操作 (要素 $(2,1)$ を消去) をおこなう行列はどのようなものであったかを考えればよい。