

1 一次独立か一次従属か判定せよ。

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

【解】(1) 掃き出し計算で方程式を解くことが基本。解は $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ これを計算すると、単位行列になり、 $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ が解。すべてゼロであるから、この組は一次独立である。

$$(2) \text{連立方程式: } c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ を掃き出し計算で解いた結果は}$$

$$\begin{array}{ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \hline 2 & 1 & 4 & \\ -3 & 3 & 3 & \\ 1 & -1 & -1 & \end{array} \quad (\text{中略}) \rightarrow \begin{array}{ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \text{つまり} \begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

解は $c_1 = k, c_2 = 2k, c_3 = -k$ 、 k は任意定数。少なくとも一つはゼロとならない解があるから、この組は一次従属である。

※連立方程式の解を掃き出し計算だけでなく、(1) 行列式の計算がゼロ／非ゼロ、(2) 逆行列の計算して、存在する／しないを調べてもよい。

2 つぎが一次独立となるための a の条件を求めよ。

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

【解】 行列式を計算して、ゼロでないような a の値とすればよい。(1) 行列式の値が $3a - 2$ となるから、 $a \neq 2/3$ であれば、この組は一次独立となる。(2) 行列式の値が $a - 3$ となるから、 $a \neq 3$ であれば、この組は一次独立となる。

3 連立方程式の解空間の基底と次元をもとめよ。

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 0 \\ -2x + 3y - 13z + 2u = 0 \\ 3x + 3y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

【解】(1) 解空間 W をもとめると、

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & x & y & z \\ \hline \boxed{2} & -2 & 1 & 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & \boxed{-3} & -9/2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3/2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = c \\ y = 3/2c \\ z = c \end{cases} \text{ と}$$

なるから、解空間は $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ で $\dim(W) = 1$, つまり直線 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ である。

解空間 W (2) は掃き出し計算から

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & u & x & y & z & u \\ \hline \boxed{1} & -2 & 8 & -3 & 1 & -2 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -13 & 2 & 0 & \boxed{-1} & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -3 & 2 & 0 & 9 & -27 & 11 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x + 2z + 5u = 0 \\ y - 3z + 4u = 0 \\ -25u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2c \\ y = 3c \\ z = c \\ u = 0 \end{cases} \quad \text{となり、解空間は } W = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ で } \dim(W) = 1, \quad \begin{array}{l} \text{つまり (座標軸 } u = 0 \text{ に含} \\ \text{まれる中での) 直線 } \frac{x}{-2} = \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{1}, u = 0 \text{ である。} \end{array}$$

※要点: ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ が正規とはノルムが $\|\mathbf{a}\| = 1$ 、直交とは内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ が定義。次元の関係

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

問題 1 つぎの基底から $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をつくれ。

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{【解】} \quad (1) \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

※要点: 与えられたベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots$ から、正規直交基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots$ をつくる。

$$(1) \mathbf{v}_1 \text{ から } \mathbf{w}_1 \text{ をつくる: } \mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \quad (2) \mathbf{v}_2 \text{ と } \mathbf{w}_1 \text{ から } \mathbf{w}_2 \text{ をつくる: } \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - a_{21}\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{v}_2 - a_{21}\mathbf{w}_1\|}, \quad \text{内積 } a_{21} = (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)$$

$$(3) \mathbf{v}_3 \text{ と } \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \text{ から } \mathbf{w}_3 \text{ をつくる: } \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}_3 - a_{31}\mathbf{w}_1 - a_{32}\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{v}_3 - a_{31}\mathbf{w}_1 - a_{32}\mathbf{w}_2\|}, \quad \begin{cases} \text{内積 } a_{31} = (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1), \\ \text{内積 } a_{32} = (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) \end{cases} \quad \text{以降、繰り返す。}$$

$$\text{問題 2} \quad \mathbb{R}^4 \text{ において、} \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ で生成される部分空間 } W \text{ の直交補空間 } W^\perp \text{ を求めよ。}$$

$$\text{【解】 } W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ なぜなら、直交補空間 } W^\perp \in \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \text{ をとり、このベクトルを定める。内積が}$$

ゼロとなるから、連立方程式を解けばよい。掃き出し計算から

b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4
1	0	2	1	1	0	2	1
1	2	0	3	0	2	-2	4

であるから、

$$\begin{cases} b_1 + 2b_3 - b_4 = 0 \\ 2b_2 - 2b_3 + 4b_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_1 = -2c_1 + c_2 \\ b_2 = c_1 - 2c_2 \\ b_3 = c_1 \\ b_4 = c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^\perp$$

$$\text{問題 3} \quad \mathbb{R}^3 \text{ から、部分空間 } W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ への正射影を表す線形写像の表現行列 } A \text{ をもとめよ。}$$

$$\text{【解】 まず射影を考えるから、} W \text{ をつくる与えられたベクトル } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ を正規化するため } \|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} =$$

$\sqrt{14}$ から $\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ をつくる。このベクトルと内積 $k = \left(\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \mathbf{x} \right)$ を求める。この値 (スカラー倍) をとることで正射影のベクトルとなる。理由はこのノルムの長さとするれば、ちょうど直交 (直角三角形) するから。 $f(\mathbf{x}) = k \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ が求める写

$$\text{像。具体的に計算する。} k = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{14}}(x_1 + 2x_2 + 3x_3), \quad k \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{pmatrix} =$$

$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ となり、標準基底に関する写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ の表現行列が求められた。

問題4 つぎの行列 $\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$ は直交行列であることを示せ。

【解】 直交とは転置行列との積が単位行列 ${}^tAA = I$ になればよい。計算には、基本的な行列積と三角関数の関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ をつかえばよい。詳細は略。

問題5 写像 $f_{\mathbf{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ について

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

と定めるとき、 $f_{\mathbf{a}}$ は線形変換であることを示せ。さらに直交変換であることを示せ。

【解】 線形であることは、 $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + f_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})$, $f_{\mathbf{a}}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ を示す。内積の部分も $(\mathbf{a}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) + (\mathbf{a}, \mathbf{y})$ などから明らか。直交変換とはノルムの長さが変わらないこと、 $\|f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ を示す。すなわち

$$\|f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2 \cdot 2 \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{a}\|^2} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) + 4 \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2}{\|\mathbf{a}\|^4} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{x}\|^2$$

※要点: 式の変形をすると、

$$\frac{\mathbf{x} - f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{2} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \mathbf{x} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

2つのベクトル $\mathbf{x}, f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ に対して、 $\mathbf{x}$ から $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ へのベクトルの中点が左辺の式であり、これが和のベクトルの中点であること、平行四辺形の特別な場合のひし形（辺の長さが等しい）であれば、対角線は直交するという関係を表す。いいかえると、右辺の式はベクトル $\mathbf{x}$ をベクトル $\mathbf{a}$ の生成する部分空間 $\langle \mathbf{a} \rangle$ への正射影でもある。