□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□

線形代数のまとめ senkei2U8.tex (2015 年 3 月 4 日)

□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□

1　平面図形

1.1　直線の方程式

(1) 傾き m, y 切片 b とする直線の方程式： $y = mx + b$

(2) ２点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) と通る直線： $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$,　$(x_1 \neq x_2)$

(3) 傾き m または x 軸との角度 θ : $y - y_1 = m\,(x - x_1) = \tan\theta\,(x - x_1)$,

(4) x 軸との交点 a, y 軸との交点 b とする場合： $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $(a \neq 0, b \neq 0)$

(5) パラメータ $t\,(-\infty < t < \infty)$, 通る点 (x_1, y_1), 方向ベクトル $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta \\ \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta \end{pmatrix}$ とする

場合： $\begin{cases} x = x_1 + a\,t = x_1 + t'\cos\theta \\ y = y_1 + b\,t = y_1 + t'\sin\theta \end{cases}$

$$\leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t\,\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t'\,\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ where } t' = \sqrt{a^2+b^2}t$$

(6) 方向ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, 通る点 (x_1, y_1) のとき、 $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}$, $(a \neq 0, b \neq 0)$

(7) 一般形 $Ax + By + C = 0$

1.2　2 元、3 元の連立方程式

(1) 未知数 x, y とする 2 元線形連立方程式：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{c_1\,b_2 - c_2\,b_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} = \frac{\det\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} = \frac{\det\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(2) (Cramer の公式) 3 元連立方程式： $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ の解は

$$x = \frac{\det\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\det\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

- 2 次の行列式 (determinant): $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$ def は略記することも多い、絶対値と区別。n 次でも同様。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

(3) 3 次の行列式 (determinant): 第 1 行で展開し、6 つの項に。サラスの展開でも同じ結果。これを因数でくくり 3 つの項に、2 次の行列の和にまとめ、さらに 3 次の元の行列式にもどせる。

$$\begin{aligned}
\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)\,b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^2\,c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ (行の展開)} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)\,a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^2\,a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ (列の展開)} \\
&= a_1\,b_2\,c_3 + a_2\,b_3\,c_1 + a_3\,b_1\,c_2 - a_1\,b_3\,c_2 - a_2\,b_1\,c_3 - a_3\,b_2\,c_1 \\
&= a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) + (-1)b_1\,(a_2\,c_3 - a_3\,c_2) + c_1\,(a_2\,b_3 - a_3\,b_2) \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)\,b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

- 正方行列 (square matrix) A の逆行列 (inverse) A^{-1} と余因子 (余因数) 行列 (cofactor matrix) $\widetilde{A}$ ：

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t \quad \text{(転置行列)} \\
&= \frac{1}{\det|A|} \widetilde{A} \quad \text{(「余因子行列」 行列要素の余因子をもとめ、転置した行列のこと)}
\end{aligned}$$

- 行列式の和 (“行列” の和の場合では異なることに注意。他の行や列の場合も同様)：

$$\det \begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 + k_2 & c_1 + k_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 列と行の入れ替え：$\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (転置行列は行列式が不変)

$$\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)\det\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)\det\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2　平面上の直線の位置と行列式での表現

(1) 2 直線の交点の座標

$\begin{cases} l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ を連立方程式として解をもてばよい。ただし $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ とする。

$$x = \frac{-c_1\,b_2 - (-c_2)\,b_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} = (-1)\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{-a_1\,c_2 - a_2\,(-c_1)}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} = (-1)\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(2) 2 直線が平行な条件： $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ 　(c_i を変えると l_i は平行な直線群となる, $i = 1, 2$)

(3) 2 直線が同一な条件： $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ 　(共通な値で変形して同じ直線の方程式となる)

(4) 3 つの直線が同一の点 (x, y) で交わるための必要十分条件：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(5) 2 点を結ぶ線分が交わるための必要十分条件：

点 $P_1(x_1, y_1)$ と点 $P_2(x_2, y_2)$ を結ぶ線分は $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$, 　$0 \leq t \leq 1$ と表される。

2 つの線分 P_1P_2 と P_3P_4 が交わるための必要十分条件は

$$s = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \end{vmatrix}}, t = \frac{\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \end{vmatrix}} \text{ とおくとき} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ を満たすこと}$$

(6) 3 直線で作られる三角形の面積

$\begin{cases} l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ l_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$ で囲まれる面積 K は

$$K = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

(7) 3 点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ が与えられたとき、三角形の面積 K は

$$K = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - x_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - x_1 \end{vmatrix}$$

3　空間図形、空間での直線や平面の方程式

(1) 2定点 $A(a_1, b_1, c_1), B(a_2, b_2, c_2)\,(a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2, c_1 \neq c_2)$ を通る直線の方程式：

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1} = \frac{y-b_1}{b_2-b_1} = \frac{z-c_1}{c_2-c_1}$$

ベクトル $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_2-a_1 \\ b_2-b_1 \\ c_2-c_1 \end{pmatrix}$ が 始点 A から 終点 B への方向ベクトル。

(2) 空間ベクトルでは点 A : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を通り、方向ベクトル $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ とする位置ベクトル $\vec{p}$ の $P(x,y,z)$ は $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ が方向ベクトルのスカラー倍で表せるから、$\vec{p} = \vec{a} + t\,\vec{d}$ (t は任意のスカラー定数) であり、$\begin{cases} x = a_1 + t\,d_1 \\ y = a_2 + t\,d_2 \\ z = a_3 + t\,d_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

(3) 2直線のなす角 ： 各直線の方向ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とし、鋭角 $[0, \pi/2]$ の角度 θ の余弦 (cosine) は, 絶対値をもちいて

$$\cos\theta = \frac{|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|},\ (0 \le \theta \le \pi/2), \quad \theta = \arccos\left(\frac{|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}\right) = \cos^{-1}\frac{|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$$

ここでノルム (大きさ) $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\|b\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ と内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, その絶対値 $|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,| = \begin{cases} +(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,\mathrm{if}\,(\cdots) \ge 0 \\ -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,\mathrm{if}\,(\cdots) < 0 \end{cases}$ を表す。この式は三角形の辺と角度の関係を示す余弦の定理と同値。2つの方向ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のノルムを調整（拡大／縮小）して、$\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \begin{pmatrix} a_1/\|\vec{a}\| \\ a_2/\|\vec{a}\| \\ a_3/\|\vec{a}\| \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \begin{pmatrix} b_1/\|\vec{b}\| \\ b_2/\|\vec{b}\| \\ b_3/\|\vec{b}\| \end{pmatrix}$ とおけば、$\|\vec{\alpha}\| = \|\vec{\beta}\| = 1$ であるから

$$\cos\theta \;=\; \frac{|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} \;=\; \left|\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right| \;=\; \left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|$$

とも表せる。

(4) 平面の方程式： 点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り、法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする。$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は 法線の定義から平面との角度が $\pi/2 = 90^o$ で直交する。よって内積がゼロとなる：$\vec{n}\cdot(\vec{p} - \vec{a}) \;=\; 0$, すなわち

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

で通る点と法線ベクトルが与えられれば、$ax + by + cz$ で方向を定め、$D = ax_0 + by_0 + cz_0$ とすれば、平面 $ax + by + cz = D$ が定められる。

(5) 3点を通る平面の方程式：　　　点 A の位置ベクトルを $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくとき、

$$(\vec{p} - \vec{a})\cdot\left\{\vec{b}\times\vec{c}\right\} = 0$$

であり、これを成分で書き表せば

$$
\begin{aligned}
& (x-a_1, y-a_2, z-a_3)\cdot\left\{\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}\right\} \\
= \;& (x-a_1, y-a_2, z-a_3)\begin{pmatrix} b_2\,c_3-b_3\,c_2\\ (-1)(b_1\,c_3-b_3\,c_1)\\ b_1\,c_2-b_2\,c_1\end{pmatrix} \\
= \;& (x-a_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+(y-a_2)(-1)\begin{vmatrix} b_1 & c_3\\ b_1 & c_3\end{vmatrix}+(z-a_3)\begin{vmatrix} b_1 & c_2\\ b_1 & c_2\end{vmatrix} \\
= \;& 0
\end{aligned}
$$

- 内積 (スカラー積) の定義：

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \;=\; (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1\,b_1+a_2\,b_2+a_3\,b_3$$

- 外積（ベクトル積）の定義：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ (-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2\,b_3-a_3\,b_2\\ (-1)(a_1\,b_3-a_3\,b_1)\\ a_1\,b_2-a_2\,b_1\end{pmatrix}$$

4　直線と平面の関係

(1) 直線 $l:\ \dfrac{x-x_0}{u}=\dfrac{y-y_0}{v}=\dfrac{z-z_0}{w}$ と平面 $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ が 平行となる条件は 方向ベクトルとの内積がゼロ、また垂直（直交）する条件は 方向ベクトルと同じ向きになればよい。

$$
\begin{aligned}
l \parallel \pi \quad \text{平行} \quad &\Longleftrightarrow \quad a\,u+b\,v+c\,w=0 \\
l \perp \pi \quad \text{直交} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}
\end{aligned}
$$

それぞれ d を動かしても平行な平面群となり、条件には依存しない。

(2) 2つの平面 $\pi_1\ :\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ と $\pi_2\ :\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ が

$$
\begin{aligned}
\pi_1 \parallel \pi_2 \quad \text{平行} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \\
\pi_1 \perp \pi_2 \quad \text{直交} \quad &\Longleftrightarrow \quad a_1\,a_2+b_1\,b_2+c_1\,c_2=0
\end{aligned}
$$

[**平面のなす角**] 平面のなす角はそれぞれの法線ベクトルの始点を重ねて定まる角度 θ の鋭角 ($0\le\theta\le 90^o$)、鈍角のときにはその補角 ($180^o-\theta$) を2平面のなす角という。

(3) 点と平面の距離　点 $A(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ との距離は

$$\frac{|a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(4) 2次元平面上の点と直線の距離　点 $A(x_0, y_0)$ と直線 $l:\ ax+by+c=0$ との距離は $\dfrac{|a\,x_0+b\,y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で与えられる。

(5) ベクトルの正射影 (projection)：ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ のつくる直線上にベクトル $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ の終点 B からこの直線に下ろした垂線 (直交する) との交点 (垂線の足という、 $\overrightarrow{OA}$ の内部あるいは延長上の点である) を H とするとき、$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{b}$ から $\vec{a}$ への正射影とよぶ。

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}$$

三角形 OHB は直角三角形で、ベクトル $\vec{a}$ のノルムを調整して、$\|\vec{b}\|^2=\|k\vec{a}\|^2+\|\overrightarrow{BH}\|^2$, $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BH}$ となるよう、スカラー係数を $k=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$ にすればよい。

(6) 空間内の 2 直線の距離　:　点 A を通る方向ベクトル $\vec{a}$ の直線と点 B を通る方向ベクトル $\vec{b}$ の直線との距離は、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ をもちいて

$$\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}$$

で与えられる。なぜなら、$\overrightarrow{AB}$ を $\vec{a}\times\vec{b}$ へ正射影すればよいから。

(7) 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ を通り、2 つの方向ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$ と　$\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ から定められる平面 π の方程式は

$$\text{平面の方程式}\quad \pi:\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=0$$

展開して表すと

$$(x-x_1)\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}+(-1)(y-y_1)\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}+(z-z_1)\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$$

(8) 2 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ を通り、方向ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ に平行な平面 π の方程式は

$$\text{平面の方程式}\quad \pi:\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a & b & c\end{vmatrix}=0$$

(9) 2 つの平面がつくる交線 (交わってできる直線) の方程式は

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}\Longrightarrow\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

ここで 方向ベクトルは $A=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$ で、通る点 (x_1,y_1,z_1) は

$x_1=\dfrac{1}{A^2+B^2+C^2}\left\{B\begin{vmatrix}d_1 & c_1\\ d_2 & c_2\end{vmatrix}-C\begin{vmatrix}d_1 & b_1\\ d_2 & b_2\end{vmatrix}\right\}$, $y_1=\dfrac{1}{A^2+B^2+C^2}\left\{C\begin{vmatrix}d_1 & a_1\\ d_2 & a_2\end{vmatrix}-A\begin{vmatrix}d_1 & c_1\\ d_2 & c_2\end{vmatrix}\right\}$,

$z_1=\dfrac{1}{A^2+B^2+C^2}\left\{A\begin{vmatrix}d_1 & b_1\\ d_2 & b_2\end{vmatrix}-B\begin{vmatrix}d_1 & a_1\\ d_2 & a_2\end{vmatrix}\right\}$ で定められる。もし $A=B=C=0$ ならば、2 つの平面は平行で交わらない。

5　掃き出し計算

与えられた行列について　(a) ある行の要素すべてを定数倍する、(b) ある行と他の行とを入れ替える、(b) ある行を他の行に加える、というの 3 つの基本変形にもとづく掃き出し計算は　行列に対する階数 (rank) を求めること、行列が正則 (regular) か特異 (singular) かどうかの判断、正方行列の逆行列 (inverse matrix) をもとめること、ベクトルの組について一次独立か一次従属かを調べることなど、また数値計算で行列の性質を調べる場合にも役立つ重要な手法です。

(1)　条件 ($a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ つまりゼロで割り算はできないから)　のとき、

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline a & b & p \\ c & d & q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{a}y = \dfrac{p}{a} \\ 0 \cdot x + \left\{d + (-c)\dfrac{b}{a}\right\} y = q + (-c)\dfrac{b}{a} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & b/a & p/a \\ 0 & \dfrac{ad-bc}{a} & \dfrac{aq-bc}{a} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y = \dfrac{p}{a} + \left(-\dfrac{b}{a}\right)\left\{\dfrac{aq-pc}{ad-bc}\right\} \\ 0 \cdot x + y = \dfrac{q + (-c)\dfrac{b}{a}}{d + (-c)\dfrac{b}{a}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 0 & \dfrac{pd-qb}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \dfrac{aq-pc}{ad-bc} \\ \hline \end{array}$$

(2) より大きな次数の場合も、(i)　ピボット（軸）としてゼロでないことを条件にその係数を 1 とする。(ii)　この上下の行係数をゼロとなるよう、符号を反対にした値をこの行に掛けたものを他の上下の行に加える。

もし $p \neq 0$ ならば、(i)　第 1 行第 1 列 p をピボット (軸) にする。これがゼロであれば他のゼロでない行との入れ替えをすればよい。(ii)　第 2 行目以下について、符号を反対にした値 $(-c_i, i = 1, 2, \cdots)$ を第 1 行にかけたものをそれぞれの行に加える。符号が反対であるから、ピボットのある列はゼロとできる。

$$\begin{array}{|cccc|} \hline \boxed{p} & r_1 & r_2 & r_3 \\ c_1 & q_1 & s_1 & t_1 \\ c_2 & q_2 & s_2 & t_2 \\ c_3 & q_3 & s_3 & t_3 \\ \hline \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|llll|} \hline 1 & r_1/p & r_2/p & r_3/p \\ 0 & q_1 + (-c_1)r_1/p & s_1 + (-c_1)r_2/p & t_1 + (-c_1)r_3/p \\ 0 & q_2 + (-c_2)r_1/p & s_2 + (-c_2)r_2/p & t_2 + (-c_2)r_3/p \\ 0 & q_3 + (-c_3)r_1/p & s_3 + (-c_3)r_2/p & t_3 + (-c_3)r_3/p \\ \hline \end{array}$$