

2 次形式の標準化

安田正實 (Yasuda Masami)*¹

◆ 2 次形式 とは

対称行列の対角化にはいろいろな応用があります。そのひとつとして、2 次形式の標準化を述べます。変数 x, y の 2 個と実数係数 a, b, c から定めた変数を 2 乗して作られる関係式

$$F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$$

を 2 次形式とよびます。 x, y の係数が 2 倍の値となる理由は、この式は行列形式で

$$F(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という対称行列をもちいて表せます。もしベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 、対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ とおけば、ベクトルの転置 ${}^t\mathbf{u} = (x, y)$ から、

$$F(x, y) = {}^t\mathbf{u} A \mathbf{u}$$

たとえば、

例 $F(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $F(x, y) = x^2 - 2xy = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となります。

◆ 2 次形式の標準形

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を 2 次形式の標準形といいます。このように変数 x, y の 2 乗しか項には表れてこないばあいを指します。

対称行列 A は適当な直交行列 P をもちいて

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角行列に変形されますから、直交行列 P : 性質 (${}^tP \cdot P = E, P^{-1} = P$) の転置行列 tP によって新たに変数ベクトル $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} {}^tP$ とおけば、この関係式の両辺を転置して、 $(u, v) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot {}^tP \right\} = {}^t({}^tP) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(x, y)$ から、つぎのように変形できます。転置が積の順序を変えることに注意して、 $(x, y) = (u, v) {}^tP$ と $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を代入すれば、行列の積は結合法則が成り立ちますから、 $F_A(x, y) = F_{{}^tPAP}(u, v)$ が得られます。なぜなら、

$$F_A(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (u, v) {}^tP \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u, v) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = F_{{}^tPAP}(u, v)$$

となるからです。

*¹ yasuda@math.s.chiba-u.ac.jp

また $F_A(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ を標準化した $F_{tPAP}(u, v) = \alpha x^2 + \beta y^2$ の係数 α, β は行列 A の固有値になります。

例 2次形式 $F_A(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$ を標準形に変形する。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値 α, β は、固有方程式を解いて、 $\alpha = 3, \beta = -2$ とおくことができます。このとき、

直交行列 $P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ となり、 $tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ と対角化されます。ここで変数 x, y と変数 u, v の関係は直交行列 P をもちいて $x = \frac{2}{\sqrt{5}}u - \frac{1}{\sqrt{5}}v, y = \frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{2}{\sqrt{5}}v$ の関係をもちます。繰り返して表せば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

また $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, tPAP = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ が得られる。

◆ 座標軸の回転

ある直交座標の点 $P(x, y)$ の成分の値は、座標軸を θ だけ回転させると、同じ点の成分の値 $P(u, v)$ はどう表せるかを考えます。同じ点の成分を比較するとき、変量間の関係には $\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$ と表せます。それぞれの軸に射影した値が座標の値ですから、三角形の相似形 (直角三角形) をもちいると計算できます。すなわち、この関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

この係数のつくる行列は直交行列となります。ただしこれは図形の原点で回転させるのではなく、座標軸の回転をすると、同じ点が別の座標では成分を表す値がどう変わるかということを意味しています。

◆ 2次曲線の標準化

2次項の和で表せる式、つまり円の方程式であれば、 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ 、あるいは双曲線 $xy = 2$ あるいは $x^2 + 2y + xy = 0, x^2 - xy = 1$ などが2次曲線の例です。これをより一般に

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(g, f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

の形で表される図形を2次曲線といいます。与えられた曲線をその形から分類することは、一般的な曲線を標準形に変換することに他なりません。これを2次曲線の標準化と考えられます。

2次曲線が中心をもち、中心に関して対称となる曲線を有心2次曲線とよびます。

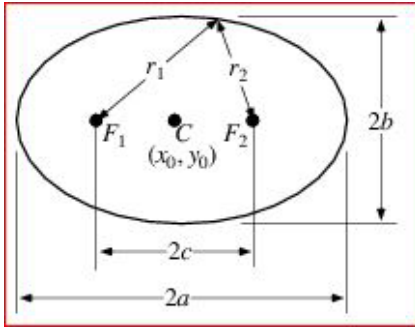
参考: Weisstein, Eric W. "Quadratic Curve." <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticCurve.html>
代表的な3つの曲線: 楕円 (elliptic, circle), 双曲線 (hyperbolic), 放物線 (parabolic) があります。

もし $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} > 0$ ならば、回転と移動により、楕円の方程式 $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ の形に帰着でき、 $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} < 0$ なら

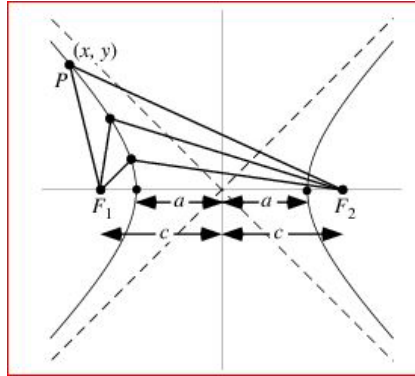
ば、同様に双曲線の方程式 $\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B} = \pm 1$ であり、 $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = 0$ ならば、放物線 $y = Ax^2$ となる。これらの3つの曲線は、天体の運動を観察して、微分積分の原型にもちられ、ギリシャ時代にも知られていた。天体力学はニュートンの運動の法則や万有引力の法則に基づいて天体の運動と力学を研究する学問で、とくに天体の軌道の方程式は極座標の形式 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)$ での円錐曲線として、

$$r = \frac{L}{1 + e \cos \theta}, \quad e \text{ は } -\infty < e < \infty \text{ のパラメータ}$$

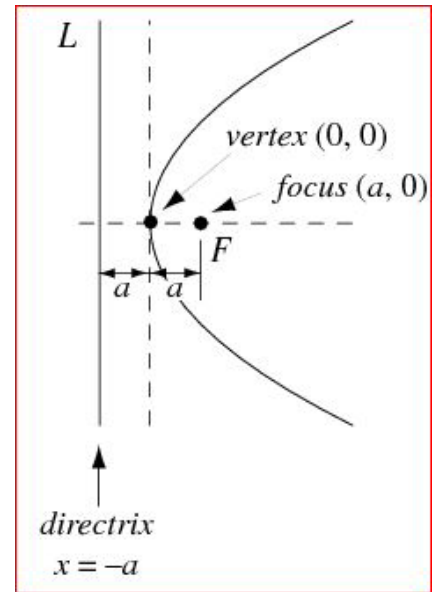
(i) 楕円あるいは円



(ii) 双曲線



(iii) 放物線



の形： $e = 0$ のときには円の方程式を表し、 $|e| < 1$ は楕円で、また $e = \pm 1$ は放物線、 $|e| > 1$ は双曲線と変形できる。円錐曲線とは円錐をある平面で切りとるとその平面の角度による切り口でできる曲線をいう。

◆ 標準化への手順

与えられた2次曲線 $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$ を標準化するやり方を示そう。基本はいままで調べた行列の対角化、すなわち固有値、固有ベクトルを求める。 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ はゼロでない固有値をもつとする。

1. 行列 A の固有方程式（2次方程式で解は実数となる）を解くことで、この固有値 α, β を求める。
2. 固有ベクトルともとのベクトル（ x 軸とのなす角）との角度をもとめればよい。あるいは座標軸の回転角を求めるから、回転角を θ とおいて、回転の変換において、2変数の積となっている項の係数をゼロとすればよいから、

$$h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (a - b) \sin \theta \cos \theta = 0 \quad \therefore h \cos 2\theta = \frac{a - b}{2} \sin 2\theta$$

であればよい。よって

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a - b} \quad \therefore \theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \frac{2h}{a - b} & (\text{if } a \neq b) \\ \pi/4 & (\text{if } a = b) \end{cases}$$

例 2次曲線 $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 9$ を標準化する。

固有方程式は $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) = 0$ 固有値 $x = 1, 3$ で固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍となる。正規化（ノルムを1）したベクトルは $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ であるから、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とすれば、 $u^2 + 3v^2 = 9 \therefore \frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{\sqrt{3}^2} = 1$ となる。もし角度のみを求めるには $a - b = 0$ であるから、 $h \cos 2\theta = 0$ から、 $2\theta = 90^\circ$ で 45° だけ回転すればよいことがわかります。この回転によって楕円であることがわかる。

◆ 3次元二次曲面

3次元空間では変数 x, y, z を考え、2次形式の方程式は曲面を表す。

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2h_1xy + 2h_2yz + 2h_3xz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

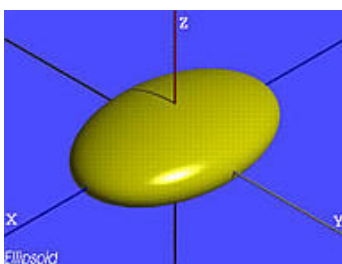
行列形式は $A = \begin{pmatrix} a_1 & h_1 & h_3 \\ h_1 & a_2 & h_2 \\ h_3 & h_2 & a_3 \end{pmatrix}$ とおけば、 $(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0$ となり、さらに行列

A の右側、下側の縁に付け加えて拡張した場合には $R = \begin{pmatrix} a_1 & h_1 & h_3 & b_1 \\ h_1 & a_2 & h_2 & b_2 \\ h_3 & h_2 & a_3 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}$ とおくと、 $(x, y, z, 1)R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

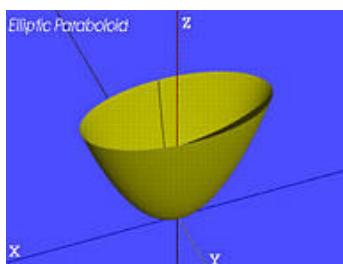
の形となる。以下は <http://ja.wikipedia.org/wiki/Wikipedia> より。 a, b, c を正の実数として、代表的な2次曲面は (ここで $\rho = \text{rank}(R) - \text{rank}(A)$)

- | | |
|---|---|
| 楕円面： $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \rho = 1$ | 楕円放物面： $ax^2 + by^2 + 2cz = 1, \rho = 2$ |
| 双曲放物面： $ax^2 - by^2 + 2cz = 1, \rho = 2$ | 一葉双曲面： $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1, \rho = 1$ |
| 二葉双曲面： $ax^2 - by^2 - cz^2 = 1, \rho = 1$ | 錐面： $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0, \rho = 0$ |
| 楕円柱面： $ax^2 + by^2 = 1, \rho = 1$ | 双曲柱面： $ax^2 - by^2 = 1, \rho = 1$ |
| 放物線柱面： $ax^2 + 2by = 1, \rho = 2$ | |

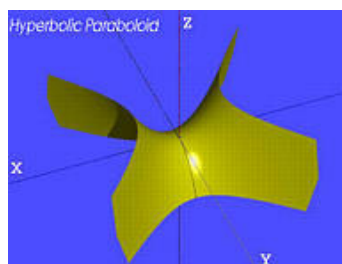
楕円面



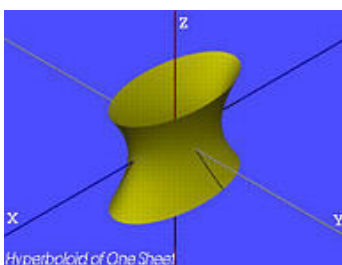
楕円放物面



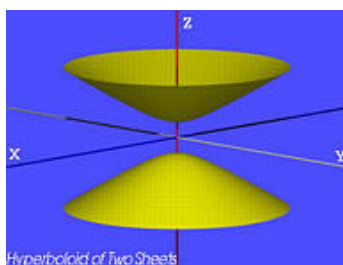
双曲放物面



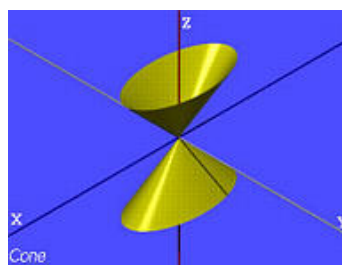
一葉双曲面



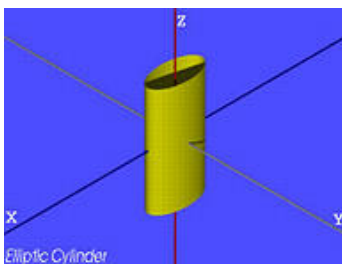
二葉双曲面



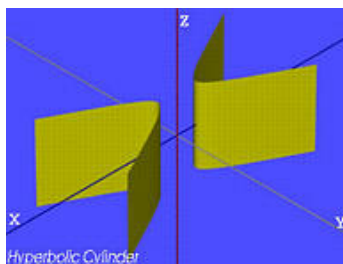
錐面



楕円柱面



双曲柱面



放物線柱面

