幾何学 **II** 第 4 章練習問題 (解答 senkei2-2ans.tex) (更新日 2013 年 11 月 7 日)

1.　つぎのベクトルが 1 次独立であるかどうか調べよ。

ヒント：1 次独立であるための必要十分条件を確かめる。(i)　行列をつくり、階数を求める。(ii)　行列式を計算して、ゼロとなるかどうか調べる。(iii)　行列から同時形の連立方程式をつくり、解がすべてゼロとなるかどうか調べる。つまり、一次独立の定義に当てはめる。(iv) あるベクトルが残りのベクトルの 1 次結合に表せないことを確かめる。

(1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(解) x,y,z をスカラーとして一次結合の式 $x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$

つまり、$\begin{cases}x+y+z=0\\y+z=0\\z=0\end{cases}$ この連立方程式の解は、$x=y=z=0$. したがって**一次独立**である。

(2) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$

(解) x,y,z をスカラーとして一次結合の式 $x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}=0$ をつくり、解を求める。

つまり、$\begin{cases}x+2y+3z=0 & (1)\\y+z=0 & (2)\\2x+3y+5z=0 & (3)\end{cases}$ この関係式のうちから、(2) 式をつかって、(1),(3) 式を変形すると $\begin{cases}x+z=0 & (1')\\y+z=0 & (2)\\2x+2z=0 & (3')\end{cases}$ この連立方程式の解は、$\begin{cases}x+z=0 & (1')\\y+z=0 & (2)\end{cases}$ より、$x=c,y=c,z=-c$ の形。ただし c は任意定数。すべてがゼロとならない解をもつから、**一次従属** である。

(3) $\begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(解) x,y,z をスカラーとして一次結合の式 $x\begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}7\\2\\12\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$

つまり、$\begin{cases}4x+7y+z=0 & (1)\\7x+2y+12z=0 & (2)\\x+y+z=0 & (3)\end{cases}$ この関係式のうちから、(3) 式をつかって、(1),(2) 式を変形すると $\begin{cases}3x+6y=0 & (1')\\5x+10z=0 & (2')\\x+y+z=0 & (3)\end{cases}$ この連立方程式は $\begin{cases}x+2y=0 & (1'')\\x+y+z=0 & (3)\end{cases}$ となるから、$x=-2c,y=c,z=c$ の形。ただし c は任意定数。したがってすべてがゼロとならない解をもつから、**一次従属** である。

2. つぎのベクトルの組が一次従属となるよう m の値を求めよ。

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m\\1\\2\end{pmatrix}$

(解) x, y, z をスカラーとして一次結合の式 $x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}m\\1\\2\end{pmatrix}=0$ が少なくともひとつゼロでないような解をもてばよい。$\begin{cases} x+2y+mz=0 & \cdots(1) \\ 2x+3y+z=0 & \cdots(2) \\ 3x+y+2z=0 & \cdots(3) \end{cases}$. このうち、式 (2),(3) より、$x=-\dfrac{5}{7}z,\ y=\dfrac{1}{7}z$ となるから、これを (1) 式に代入する。$\left(-\dfrac{3}{7}+m\right)z=0\cdots(1')$ となる。もし $m=\dfrac{3}{7}$ ならば、z の値はゼロでなくても (1') は成り立つこととなる。すなわちゼロ以外の解をもつことになるから、一次従属となる。

3.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次独立とする。

(1) スカラー x, y, z, w を係数として、一次結合 $x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+z(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})+w(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ の式をベクトルで整理すると、$(x+w)\boldsymbol{a}+(x+y)\boldsymbol{b}+(y+z)\boldsymbol{c}+(z+w)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$。もし $x+w=x+y=y+z=z+w=0$ とすると、これを解いて、$x=c, y=-c, z=c, w=-c$, (c は任意定数)。自明でない解をもつから、**1 次従属**である。

(2) スカラー x, y, z, w を係数として、一次結合 $x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+z(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})+w(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ の式をベクトルで整理すると、$(x-w)\boldsymbol{a}+(-x+y)\boldsymbol{b}+(-y+z)\boldsymbol{c}+(-z+w)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$。もし $x-w=-x+y=-y+z=-z+w=0$ とすると、これを解いて、$x=c, y=c, z=c, w=c$, (c は任意定数)。自明でない解をもつから、**1 次従属**である。

(3) スカラー x, y, z, w を係数として、一次結合 $x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+y(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})+z(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})+w(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$ の式をベクトルで整理すると、$(x+z+w)\boldsymbol{a}+(x+y+w)\boldsymbol{b}+(x+y+z)\boldsymbol{c}+(y+z+w)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$。もし $x+z+w=x+y+w=x+y+z=y+z+w=0\cdots$(A) とすると、足し合わせると $3x+3y+3z+3w=0$。よって $x+y+z+w=0$。したがって (A) より、$x=0, y=0, z=0, w=0$。自明な解であるから、**1 次独立**である。

(4) スカラー x, y, z, w を係数として、一次結合 $x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})+y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})+z(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})+w(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{0}$ の式をベクトルで整理すると、$(x+y+z-w)\boldsymbol{a}+(x+y-z+w)\boldsymbol{b}+(x-y+z+w)\boldsymbol{c}+(-x+y+z+w)\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$。もし $x+y+z-w=x+y-z+w=x-y+z+w=-x+y+z+w=0$ とすると、これから、$x+y+z+w=0$。よって $x=0, y=0, z=0, w=0$。自明な解であるから、**1 次独立**である。

4.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

（解）固有値 λ は $\det\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)=0$ より、$\lambda=1,2$ である。

(i) $\lambda=1$ のとき、固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ より、x は任意, $y=0$ となる。すなわち $x=c, y=0$(c は任意定数)。$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ である。

(ii) $\lambda=2$ のとき、固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ より、$x=0$, y は任意となる。すなわち $x=0, y=c$(c は任意定数)。$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ である。

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(解) 固有値 λ は $\det\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$ から定める。いま 2 つの実根を α, β とおくと、$\alpha + \beta = 3, \alpha \times \beta = -2$ で $\lambda = \alpha, \beta$ である。

(i) $\lambda = \alpha$ のとき、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3-\alpha & 1 \\ 2 & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、$\begin{cases} (3-\alpha)x + y = 0 \\ 2x - \alpha y = 0 \end{cases}$ 。これを解くと $x = c,\ y = \dfrac{2c}{\alpha}$ となる。すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2/\alpha \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$ である。($c, c' = c/\alpha$ は任意定数)。

(ii) $\lambda = \beta$ のときも同様であるから、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2/\beta \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \end{pmatrix}$ である。($c, c' = c/\beta$ は任意定数)。である。ここでは α, β を具体的に求めてはいないが、これは簡単に求められて明示したほうがよい。

(3) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$

（解）固有値 λ は $\det\begin{vmatrix} 2-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - a^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - a^2 = 0$ から定める。いま 2 つの実根を α, β とおくと、$\alpha + \beta = 3, \alpha \times \beta = 2 - a^2$ で $\lambda = \alpha, \beta$ である。

(i) $\lambda = \alpha$ のとき、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2-\alpha & a \\ a & 1-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、$\begin{cases} (2-\alpha)x + ay = 0 \cdots (1) \\ ax + (1-\alpha)y = 0 \cdots (2) \end{cases}$ 。$(1) \times a - (2) \times (2-\alpha)$ で x を消去すると $\{a^2 - (1-\alpha)(2-\alpha)\}y = 0$ となり、係数はゼロであるから、y の値は任意。$y = c$ とおいて、x を求めるとと $x = \dfrac{1-\alpha}{a}c$ となる。すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} (1-\alpha)/a \\ 1 \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} 1-\alpha \\ a \end{pmatrix}$ である。(c, c' は任意定数)。

(ii) $\lambda = \beta$ のときも同様で、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1-\beta \\ a \end{pmatrix}$ である。(c は任意定数)。

ここでは α, β を具体的に求めてはいないが、これは簡単に求められて明示したほうがよい。

7. 　つぎの行列 A は正則行列 P を用いて対角化可能か？もし可能であれば、$P^{-1}AP$ と P を求めよ。

ヒント：まず固有値を求め、それに対応する固有ベクトルを計算する。そして得られた固有ベクトルの組が 1 次独立かどうか、あるいはこの行列が正則かを調べる。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

（解）固有値 λ は $\det\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda-2)(\lambda-5) = 0$ より、$\lambda = 2, 5$ である。

(i) $\lambda = 2$ のとき、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ である。よって $x + 2y = 0$ であるから、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。

(ii) $\lambda = 5$ のとき、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ であるから、$x - y = 0$ となる。よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

2 つのベクトルの組 $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ は一次独立である。なぜなら $a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば、$a = b = 0$ が解となる。すなわち自明な解しかもたないから、一次独立である。したがって対角化可能で、そ

の行列は

$$A\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}=\left(2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$$

であり、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}$

（解）固有方程式は $f_A(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0$ から、固有値は $\lambda=2,\,-1,\,1$ の単根である。固有ベクトルは、それぞれ $c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},c\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$.

$P=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ とする。$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}$ であるから、$P^{-1}\,A\,P=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

（解）固有方程式は $f_A(\lambda)=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=-(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$ から、固有値は $\lambda=2,\,1$(重根) の単根である。固有ベクトルは、それぞれ

$\lambda=1$ のとき、$\begin{cases}x-y+z=0 & \cdots(1)\\ z=0 & \cdots(2)\\ -x+y=0 & \cdots(3)\end{cases}$ よって $x=c,y=c,z=0$ だから、$c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$\lambda=2$ のとき、$\begin{cases}-y+z=0 & \cdots(1)\\ -y+z=0 & \cdots(2)\\ -x+y-z=0 & \cdots(3)\end{cases}$ よって $x=0,y=c,z=c$ だから、$c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\quad(c\neq 0)$.

したがって 3 個の一次独立なベクトルとならないから、対角化可能でない。

(4) $\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&4&1\\2&-4&0\end{pmatrix}$

（解）固有方程式は $f_A(\lambda)=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$ から、固有値は $\lambda=2$(重根), 1, である。固有ベクトルは、それぞれ

$\lambda=1$ のとき、$\begin{cases}2y+z=0 & \cdots(1)\\ -x+3y+z=0 & \cdots(2)\\ 2x-4y-z=0 & \cdots(3)\end{cases}$ $\begin{cases}2y+z=0 & \cdots(1)\\ -x+y=0 & \cdots(2')\end{cases}$

よって $x=c,y=c,z=-2c$ とおけば、$c\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\quad(c\neq 0)$

$\lambda=2$（重根）のとき、$\begin{cases}-x+2y+z=0 & \cdots(1)\\ -x+2y+z=0 & \cdots(2)\\ 2x-4y-z=0 & \cdots(3)\end{cases}$ $\left\{\ x-2y-z=0 \quad \cdots(1')\right.$

よって

case 1: $x=c_1,y=c_2,z=c_1-2c_2$ とおけば、$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

case 2: $x = 2c_1 + c_2,\ y = c_1,\ z = c_2$ とおけば、$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

case 3: $x = c_1, y = \frac{1}{2}(c_1 - c_2), z = c_2$ とおけば $c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

このように固有ベクトルはいくつかの組み合わせで P を選択しても、結果の対角化には、同じ行列になることを確認する。

(I) $(\lambda = 1)$ + case $1(\lambda = 2)$ の場合:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする。$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ であるから、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(II) $(\lambda = 1)$ + case $2(\lambda = 2)$ の場合:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ であるから、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(III) $(\lambda = 1)$ + case $3(\lambda = 2)$ の場合:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$ であるから、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

対角化についての補足：

$n=3$ 次の正方行列 A に対して、固有値 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x_1}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{x_3}=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ があるならば、定義の式から、$A\boldsymbol{x_i}=\lambda_i\boldsymbol{x_i}, i=1,2,3$ が成り立っている。これを並べると、

$$A\boldsymbol{x_i}=A\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_i x_i\\\lambda_i y_i\\\lambda_i z_i\end{pmatrix},\quad i=1,2,3$$

であるから、

$$\begin{pmatrix}A\boldsymbol{x_1} & A\boldsymbol{x_2} & A\boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1x_1 & \lambda_1y_1 & \lambda_1z_1\\\lambda_2x_2 & \lambda_2y_2 & \lambda_2z_2\\\lambda_3x_3 & \lambda_3y_3 & \lambda_3z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \lambda_2 & 0\\0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

ここで, 固有ベクトルを並べてつくる行列 $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}$ とおけば、

$$AP=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{x_1} & A\boldsymbol{x_2} & A\boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \lambda_2 & 0\\0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

もし条件として、固有値がすべて異なるとか、固有値ベクトルの組が一次独立、P が正則などがあれば、逆行列 P^{-1} を両辺にかけることで

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \lambda_2 & 0\\0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=D\quad(\text{対角行列})$$

の形にすることができる。また対角行列の成分も並べた固有値ベクトルに対応して、固有値がならぶことがわかる。すなわち対角化をすることができた。

(以上)