幾何学 **II** 確認問題 (解答 senkei2-1ans.tex)（2013 年実施）

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ とする。(1) $\dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$ を求めよ。(2) $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ を求めよ。(3) A を対称行列と交代行列の和で表せ。

(答) (1) ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, となる。よって (1) $\dfrac{1}{2}(A + {}^tA) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 7/2 \\ -5/2 & 5 & 2 \\ 7/2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. (2) $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -13/2 & 7/2 \\ 13/2 & 0 & -1 \\ -7/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(3) 以上の 2 個は対称行列と交代行列になっている。また和は A に等しい。

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、(1) A^2, (2) A^3, (3) $A^n (n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。

(答)(1) $A^2 = -E$, (2) $A^3 = -A$ (3) $n = 2p$ ならば、$A^n = (-1)^p E$, $n = 2p + 1$ のとき、$A^n = (-1)^p A$.

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ において、(1) もし $c = -a - b$ ならば、行列式の値がゼロになることを示せ。

(2) 行列式に展開して、これを因数分解せよ。(答) $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b+a+c & c+b+a \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. したがって (1) が示された。(2) さらに変形する。$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ c-b & a-b \end{vmatrix} = (a-c)(a-b) - (b-c)(c-b) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$. したがって $|A| = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について、固有値、固有ベクトルの計算をおこなう。(1) 固有多項式 $f_A(x)$ を求めよ。(2) 固有値を求めよ。(3) 固有ベクトルを求めよ。

(答) (1) $f_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & \boxed{\text{-2}} & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & \boxed{\text{-(x+1)}} \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x & -4 \\ -4 & -2 & x-7 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & -4 \\ -2 & x-7 \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-8)$. 固有値は $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = -1$(重根)。

(i) $\alpha_1 = 8$ のとき、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(c \neq 0)$. (ii) $\alpha_2 = -1$ のとき、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(c_1, c_2 \neq 0)$.

(以上)