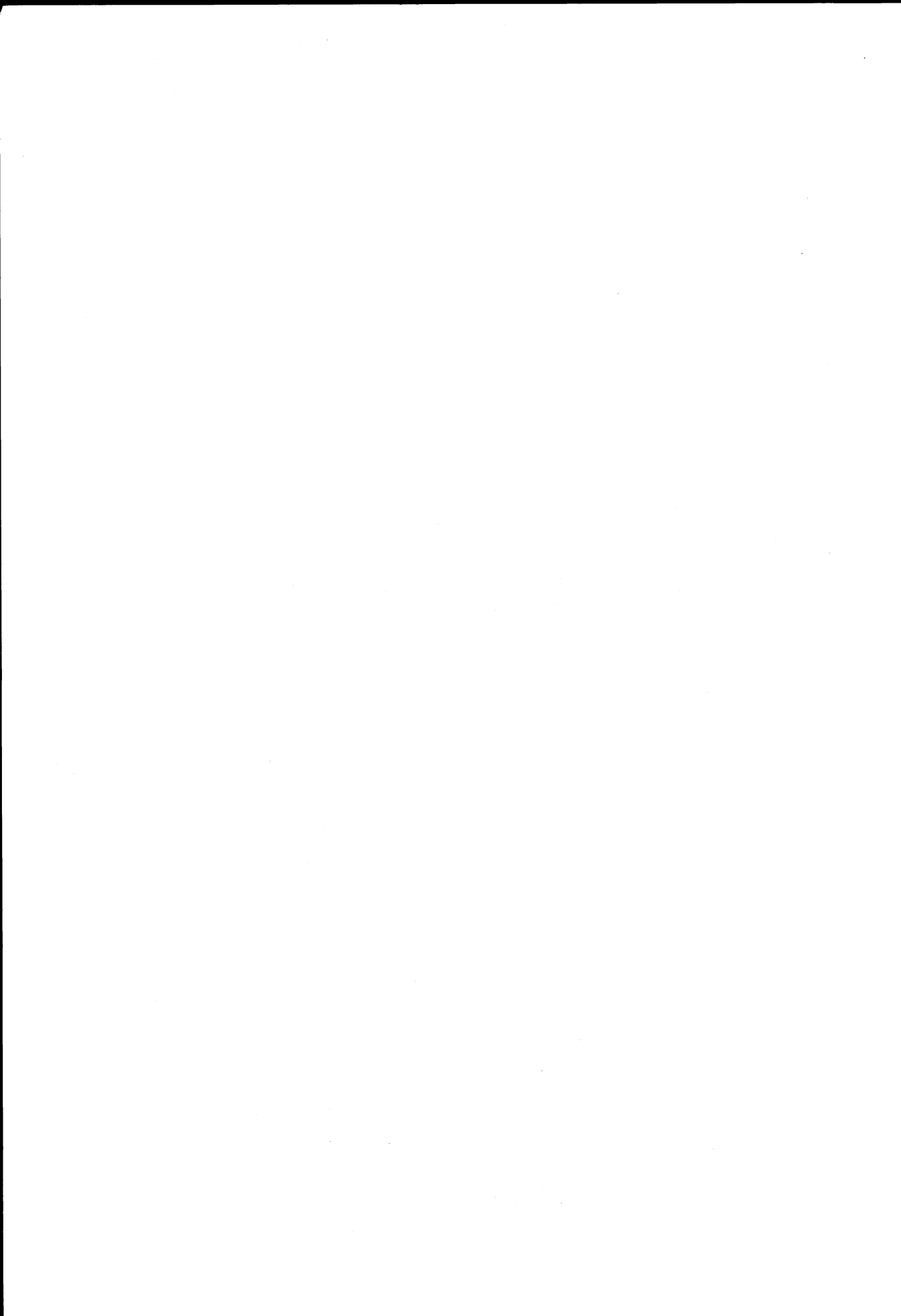


東京都市大学数学シリーズ (2)

線形代数演習

学術図書出版社



あいさつ

2009年4月より武蔵工業大学は校名を変更し「東京都市大学」となります。それともない本書の名称を「東京都市大学数学シリーズ(2)線形代数演習」として出版することになりました。

初版より本書のために多くの方々から御協力をいただき感謝しております。今後とも御支援のほどよろしくお願い致します。

2009年3月

著者一同

まえがき

武蔵工業大学工学部教育研究センター数学部門では、学習経験の多様化した新生に対するさらなる教育改善を目指して、平成 10 年度より新生の基礎学力調査を開始し、同時に教科書作成検討委員会を発足させました。委員会では、第一段階として数学基礎科目の各教員における教育内容を調査し、カリキュラムの内容を整備しました。次の段階として、学生の単位取得のための一定の基準作りを行うこと、さらにいろいろなレベルの問題を用意することによって新生の多様化への対処を可能にすることを目的に演習書を作成することになりました。その第一歩は理工学で重要な科目である微分積分学および線形代数学の演習書の作成となりました。

本書の構成は、まとめ、例題、問題 A、問題 B および解答からなっています。問題 A には単位取得のための標準的な問題が集められていて、すべての学生が修めるべきものでありますが、中には難しいものも含まれています。問題 B にはやや難易度の高い問題が集められています。学生諸君の勉学に役立つことを期待します。

最後に、本書の完成にあたっては武蔵工業大学工学部数学科目担当の先生方に多くの有益な助言をいただきました。改めて御協力いただいた先生方に厚くお礼申し上げます。また、出版に際して大変お世話になりました学術図書出版社の高橋秀治氏にも心から感謝いたします。

2007 年 3 月

著者一同

目 次

第 1 章	平面・空間のベクトル	1
1.1	ベクトルの内積・外積	1
1.2	直線・平面の方程式	11
第 2 章	行列と連立 1 次方程式	24
2.1	行列とその演算	24
2.2	連立 1 次方程式 (掃き出し法)・行列の階数	39
2.3	逆行列	58
第 3 章	行列式	71
3.1	行列式の定義と性質	71
3.2	余因子展開	89
第 4 章	ベクトル空間	102
4.1	ベクトル空間とその部分空間	102
4.2	次元と基底・1 次独立性	116
4.3	線形写像と表現行列	131
4.4	正規直交基底	150
第 5 章	固有値と固有ベクトル	167
5.1	固有値と固有ベクトル	167
5.2	行列の対角化	180
5.3	対称行列	191
5.4	2 次曲線の分類	205



第1章

平面・空間のベクトル

1.1 ベクトルの内積・外積

ベクトルとは

向きと大きさを持った量をベクトルという。力や風速や位置の変化などはベクトルで表現することができる。ベクトルは線分に矢印をつけて表示することができ、矢印の始まる点を始点、終わる点を終点という。始点Aから終点Bまでのベクトルは \overrightarrow{AB} と書く。また、始点と終点が同じ、すなわち大きさが零のベクトルを零ベクトルと呼ぶ。

あるベクトルを平行移動したものはすべて同じ向きと大きさを持つと考え、同じベクトルとして扱う。すると、始点や終点に依存した書き方をする必要はないことになるので、このような場合は \vec{a} や \mathbf{a} と書く。零ベクトルは $\vec{0}, \mathbf{0}$ と書く。

ベクトルを xy 平面上に描いた時、始点から終点までの x, y 座標のそれぞれの変化量をこのベクトルの x, y 成分といい、ベクトルを平行移動させても成分は同じなので、ベクトルを x, y 成分の組で表せる。これをベクトルの成分表示という。たとえば、始点と終点を比較して x 座標が1増加し y 座標が2増加し

ているような xy 平面上のベクトル \mathbf{a} は $\mathbf{a} = (1, 2)$ とか $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と成分表

示する。また、始点が原点Oになるようにベクトルを平行移動させたときの終点の座標がこのベクトルの成分であると考え、点 $P(a, b)$ に対して $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ となる。このベクトル \overrightarrow{OP} を点Pの位置ベクトルと呼ぶ。 xyz 空間内のベクトルについても同様に成分表示を考えることができる。

ベクトル \mathbf{a} の大きさのことを $|\mathbf{a}|$ と表す。 $\mathbf{a} = (a, b, c)$ であれば三平方の定理により $|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ となる。

ベクトルの和・実数倍

ベクトル \mathbf{a} の終点にベクトル \mathbf{b} の始点を合わせるように平行移動し、 \mathbf{a} の始

点から \mathbf{b} の終点までのベクトルを考えて、これをベクトルの和といい $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ と書く． $\mathbf{a} = (a, b, c)$, $\mathbf{b} = (p, q, r)$ であれば, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a + p, b + q, c + r)$ と, x, y, z 成分をそれぞれ合計したベクトルになる．

ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$ に対してその k 倍のベクトルを $k\mathbf{a} = (ka, kb, kc)$ と定義する． $k > 0$ の場合には \mathbf{a} と同じ向きで大きさが k 倍になったベクトルのことであり, 0 倍は零ベクトルとなり, $k < 0$ の場合は \mathbf{a} と反対の向きで大きさが $|k|$ 倍になったベクトルとなる． また, $(-1)\mathbf{a}$ のことを $-\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ のことを $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ と書く．

和と実数倍に関して次のような法則が成り立つ．

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

$$(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$$

$$k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad 0\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ベクトルの内積 (スカラー積)

大きな岩を 10 の力で 20 の距離運ぶ仕事の量は $10 \times 20 = 200$ と定義するのが良さそうである．しかし, 移動方向に対して斜め (たとえば, 仰角 $\frac{\pi}{3}$ ラジアン) に力を掛けている場合, 移動方向に対して実際に使った力は $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ で半分ということになるので, この場合の仕事の量は $\frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100$ と考える．

ベクトルで考えると, \mathbf{a} という力で \mathbf{b} という位置の移動をしたときに \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角が θ であれば, 仕事の量は $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$ となるが, これを一般化して任意の二つのベクトルに対して同じように定義して内積と呼び, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ と書き表す．ここで, 演算記号の「 \cdot 」を省略してはいけない．ベクトルを成分で表した場合, $\mathbf{a} = (a, b)$, $\mathbf{b} = (p, q)$ であれば, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ap + bq$ と, x 成分同士, y 成分同士の積 (空間ベクトルであれば z 成分同士の積も) の合計になることがわかっていて, 内積の計算結果はベクトルではなく数値になることに注意せよ．そのため, 三つのベクトルの内積のようなもの $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ は定義されない．

なお, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ もしくは (\mathbf{a}, \mathbf{b}) と書くこともある．

内積に関して次のような法則が成り立つ.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

内積は成分からすぐに計算できるので, 2つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角 θ は

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

から簡単に求めることができる. とくに, 二つのベクトルのなす角が直角 ($\frac{\pi}{2}$ ラジアン) であれば $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ という条件式を満たすことになる. この条件が成立する二つのベクトルは直交するといひ $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ と書く.

平行四辺形 ABCD で, $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ とすれば, この平行四辺形の面積は $S = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta$ (θ は \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角) となり

$$S^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

のように内積から計算できることがわかる. 平面ベクトル $\mathbf{a} = (a, b), \mathbf{b} = (c, d)$ の場合は $S^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2$ より

$$S = |ad - bc|$$

となり, 空間ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c), \mathbf{b} = (p, q, r)$ の場合は

$$S = \sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}$$

となる.

空間ベクトルの外積 (ベクトル積)

内積は平面ベクトルにも空間ベクトルにも定義できるが, これに対して空間ベクトルに特有の外積という演算がある. \mathbf{a}, \mathbf{b} の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

- (1) \mathbf{a} と \mathbf{b} の両方に直交していて,
- (2) \mathbf{a} と \mathbf{b} を二辺にもつ平行四辺形の面積の値を大きさにもち,
- (3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ で右手系 (右手の親指・人差し指・中指を立てたような位置関係) となる

ような空間ベクトルのことである. $\mathbf{a} = (a, b, c), \mathbf{b} = (p, q, r)$ の場合は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (br - cq, cp - ar, aq - bp)$$

となる. あとで学ぶ行列式を使うと

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \right)$$

とも表せるし, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ を x, y, z 軸方向の単位ベクトルとすると

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

とも表せる.

2つのベクトルが直交することは内積が0となることで判定できたが, 2つのベクトルが平行であることは(向きが逆である場合も含め)外積が零ベクトルとなることで判定できる.

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

外積に関して次のような法則が成り立つ.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

\mathbf{a}, \mathbf{b} を二辺とする平行四辺形を \mathbf{c} だけ平行移動してできる立体を平行六面体という. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が右手系をなす場合, 平行六面体の体積は $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ で求められる. 左手系(左手の親指・人差し指・中指を立てたような位置関係)の場合はこの値は負になり, 体積はその絶対値となる. この $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ のことをスカラー三重積といい, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ と表す.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]$$

となる.

例題 1.

不等式 $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ を証明し、これよりシュヴァルツ (Schwarz) の不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

を導け。また等号が成立する条件を示せ。

解答 \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を θ とすれば $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$ において $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから、 $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ が成り立つ。等号が成立するのは $\cos \theta = \pm 1$ すなわち $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ のときに限る。 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とすると、上の不等式は

$$\begin{aligned} -\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} &\leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{aligned}$$

となるので

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

が成立する。

等号が成立するのは $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ すなわち $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ のときに限る。

(別解) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ の時は $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| = 0$ となるので成立する。 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ とすると、任意の実数 t について $|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 \geq 0$ であることから

$$0 \leq |t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2t\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

という 2 次不等式がすべての実数 t について成立することになるので、この 2 次式の判別式は

$$D/4 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \leq 0$$

となる。これを書き換えると

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

すなわち

$$-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

が成立することがわかる。

例題 2.

4点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, -1, 1)$, $B(1, -1, 0)$, $C(3, 4, 5)$ に対し, 次に示されたものを計算せよ.

(1) $|\vec{OA}|$, $|\vec{OB}|$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, \vec{OA} と \vec{OB} のなす角 θ

(2) $\vec{OA} \times \vec{OB}$

(3) $\triangle ABC$ の面積 S

(4) 四面体 $OABC$ の体積 V

解答 (1) $|\vec{OA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, $|\vec{OB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 3$.

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \theta$ より

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ であるから, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\vec{OA} \times \vec{OB} = (1, 1, -1)$

(3) $\vec{AB} = (-1, 0, -1)$, $\vec{AC} = (1, 5, 4)$ より $\vec{AB} \times \vec{AC} = (5, 3, -5)$. よって

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 3^2 + (-5)^2} = \frac{\sqrt{59}}{2}.$$

(4) 四面体の体積は \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} を 3 辺とする平行六面体の体積の $\frac{1}{6}$ だから

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}| = \frac{1}{6} |1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 5| = \frac{1}{3}.$$

A

- ベクトル $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ を図示せよ.
- $\mathbf{a} = (5, -2, k)$ のとき, $|\mathbf{a}| = \sqrt{30}$ となるように k の値を定めよ.
- 平行四辺形 $ABCD$ において $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 3, 5)$, $C(3, 7, 5)$ とするとき, 点 D の座標を求めよ.
- $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{c} = (0, -1, 2)$ とする. $\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ と表わすとき, s, t の値を求めよ.
- $\mathbf{a} = (-2, 1, z)$, $\mathbf{b} = (2, y, -3)$, $\mathbf{c} = (x, 0, 4)$ のどの 2 つのベクトルも直交するように x, y, z の値を定めよ.
- ベクトル $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 4, -5)$ について
 - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角 θ をそれぞれ求めよ.
 - \mathbf{a}, \mathbf{b} の両方に直交するベクトルを 1 つ求めよ.
- $\mathbf{a} = (-3, 5, 6)$, $\mathbf{b} = (5, 7, 9)$ について次に示されたものを計算せよ.

(1) $(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}), |\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (5\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$

8. ベクトル $\mathbf{a} = (2, 3, -1), \mathbf{b} = (3, -2, 1), \mathbf{c} = (1, 2, 2)$ で作られる平行六面体の体積 V と表面積 S を求めよ.

9. 4点 $A(2, 3, 5), B(7, 5, 9), C(8, 7, 11), D(-1, 6, -5)$ を頂点にもつ四面体の体積を求めよ.

10. ベクトル $\mathbf{a} = (2, -1, 1), \mathbf{b} = (2, 0, 1), \mathbf{c} = (1, 3, k)$ の作る平行六面体 Q の体積が5であるとするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が左手系をなすとき, k の値を求めよ.

(2) \mathbf{a}, \mathbf{b} の作る平行四辺形が Q の底面であると考えたとき, Q の高さを求めよ.

11. 空間ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} について次を示せ.

(1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$

(2) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$

B

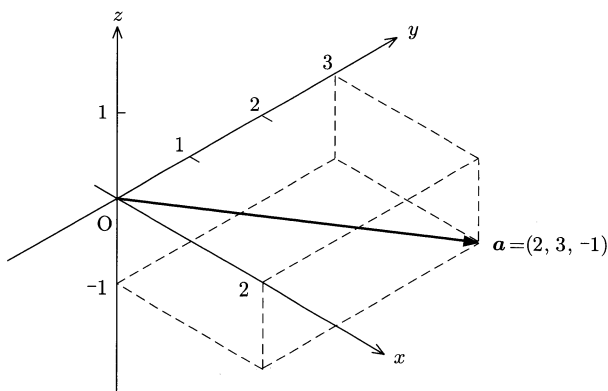
1. ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について次を示せ.

(1) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$

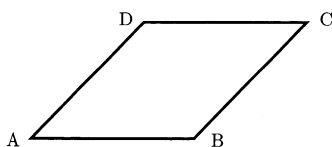
A の解答

1.



2. $|\mathbf{a}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + k^2} = \sqrt{30}$ より $k^2 + 29 = 30$. よって $k^2 = 1$ より $k = \pm 1$ となる.

3. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ より $\vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB} = (4, 3, 2) - (3, -1, 2) = (1, 4, 0)$. よって $D(0, 8, 3)$ である.



$$4. (1, 2, 1) = s(2, 3, 4) + t(0, -1, 2) \text{ より}$$

$$\begin{cases} 1 = 2s \\ 2 = 3s - t \\ 1 = 4s + 2t \end{cases}$$

が成立する. これを解くと $s = \frac{1}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$ となる.

$$5. \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ となればよいので}$$

$$\begin{cases} (-2) \cdot 2 + 1 \cdot y + z \cdot (-3) = 0 \\ 2 \cdot x + y \cdot 0 + (-3) \cdot 4 = 0 \\ x \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 4 \cdot z = 0 \end{cases}$$

を解いて

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 13 \\ z = 3 \end{cases}$$

となる.

$$6. (1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot (-5) = -15$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \text{ より}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-15}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \theta = \frac{3}{4}\pi.$$

(2) 求めるベクトルを $\mathbf{c} = (x, y, z)$ とすると, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ となればよいので

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 2 \cdot z = 0 \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y + (-5) \cdot z = 0 \end{cases}$$

よって $x = \frac{1}{5}z, y = \frac{11}{10}z$ となるので, たとえば $z = 10$ とすれば $\mathbf{c} = (2, 11, 10)$ が求めるベクトルの1つである.

(別解) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} の両方に直交するので, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 11, 10)$ が求めるベクトルの1つである.

$$7. (1) 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (9, 31, 39), 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (-25, 11, 12), (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \\ = 9 \cdot (-25) + 31 \cdot 11 + 39 \cdot 12 = 584, |\mathbf{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{70}, \\ |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{155}.$$

$$(2) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3, 57, -46)$$

$$(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 10\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 15\mathbf{b} \times \mathbf{a} - 4\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 6\mathbf{b} \times \mathbf{b}$$

$$= \mathbf{0} - 15\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 4\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{0}$$

$$= -19\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$= (-57, -1083, 874)$$

$$8. \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (2, 3, -1) \cdot (-6, -5, 8) = 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 8 = -35.$$

よって $V = |-35| = 35$. \mathbf{a} , \mathbf{b} を二辺とする平行四辺形の面積は $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -5, -13)$ より

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-13)^2} = \sqrt{195}.$$

\mathbf{b} , \mathbf{c} を二辺とする平行四辺形の面積は $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-6, -5, 8)$ より

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 8^2} = 5\sqrt{5}.$$

\mathbf{c} , \mathbf{a} を二辺とする平行四辺形の面積は $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = (-8, 5, -1)$ より

$$|\mathbf{c} \times \mathbf{a}| = \sqrt{(-8)^2 + 5^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{10}.$$

よって $S = 2(\sqrt{195} + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{10})$.

9. $\overrightarrow{AB} = (5, 2, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 4, 6)$, $\overrightarrow{AD} = (-3, 3, -10)$ より求める体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \right| &= \frac{1}{6} |(5, 2, 4) \cdot (-58, 42, 30)| \\ &= \left| \frac{5 \cdot (-58) + 2 \cdot 42 + 4 \cdot 30}{6} \right| = \frac{43}{3}. \end{aligned}$$

10. (1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-1, 0, 2) \cdot (1, 3, k) = 2k - 1$. \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} が左手系をなすから、この値は負であり、 $|2k - 1| = 5$ であることより $2k - 1 = -5$, よって $k = -2$ である.

(2) \mathbf{a} , \mathbf{b} の作る平行四辺形の面積は

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

であり、これが底面積であるから、求める高さ h は $\sqrt{5}h = 5$ となることより、 $h = \sqrt{5}$ である.

11. (1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$

(2) (1) より

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

よって

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$$

Bの解答

1. (1) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とすると, $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1)$ より $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ の x 成分は

$$\begin{aligned} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) &= (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1 \end{aligned}$$

となる.

同様の計算により, y, z 成分はそれぞれ

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_2, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_3 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_3$$

となるから

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_2, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_3 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_3) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(b_1, b_2, b_3) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(c_1, c_2, c_3) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \end{aligned}$$

が示される.

(2) (1) より

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a},$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$$

となるから

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

1.2 直線・平面の方程式

直線の方程式

xyz 空間内の点 $A(p, q, r)$ を通り、ベクトル $\mathbf{d} = (a, b, c)$ に平行な直線上に点 $P(x, y, z)$ があるとすると、 $\overrightarrow{AP} \parallel \mathbf{d}$ より

$$(x - p, y - q, z - r) = t(a, b, c) \quad (t \text{ は任意実数})$$

が成立することがわかる。成分に分けて書けば

$$\begin{cases} x - p = ta \\ y - q = tb \\ z - r = tc \end{cases}$$

となるが、これらの式から t を消去した

$$\frac{x - p}{a} = \frac{y - q}{b} = \frac{z - r}{c}$$

を、直線の方程式という。ただし、上記は a, b, c がいずれも 0 ではない場合である。

a, b は 0 ではないが $c = 0$ の場合は

$$\frac{x - p}{a} = \frac{y - q}{b}, \quad z = r$$

a は 0 ではないが $b = c = 0$ の場合は

$$y = q, \quad z = r$$

が直線の方程式である。

なお、直線の方程式は $\overrightarrow{AP} \parallel \mathbf{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \times \mathbf{d} = \mathbf{0}$ より

$$(x - p, y - q, z - r) \times (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

が成立することからも導かれる。

上記の $\mathbf{d} = (a, b, c)$ を直線の方角ベクトルと呼ぶ。

平面の方程式

xyz 空間内の点 $A(p, q, r)$ を通り、ベクトル $\mathbf{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面上に点 $P(x, y, z)$ があるとすると、 $\overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n}$ より

$$(x - p, y - q, z - r) \cdot (a, b, c) = 0$$

すなわち

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0$$

が成立することがわかる。これを平面の方程式という。この式を展開すると

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{ここで、} d = -(ap + bq + cr))$$

のように x, y, z の1次方程式になる. 逆に, x, y, z の1次方程式

$$ax + by + cz + d = 0$$

の解の1つを $(x, y, z) = (p, q, r)$ とすれば, $d = -(ap + bq + cr)$ となるので, この1次方程式を

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0$$

と変形できる. つまり, x, y, z の1次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ は, 点 $A(p, q, r)$ を通り, ベクトル $\mathbf{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面を表すことがわかる.

上記の $\mathbf{n} = (a, b, c)$ を, 平面の法線ベクトルと呼ぶ.

直線と平面のパラメータ表示

直線の方程式を導いた $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{d}$ を, 点 A, P の位置ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{x} を使って書き直すと

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{d} \quad (t \text{ は任意実数})$$

という直線のパラメータ表示が得られる. これと同様に, 平行でない2つのベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} に対して, 点 A を通り \mathbf{u} 方向の直線と \mathbf{v} 方向の直線を両方とも含むような平面がただ1つ定まるが, この平面上の点 P の位置ベクトルを \mathbf{x} とすると

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (s, t \text{ は任意実数})$$

という平面のパラメータ表示が得られる.

点と平面の距離

xy 平面上の直線 $ax + by + c = 0$ と点 $P(p, q)$ との距離は

$$\frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で求められた. これと同様に, xyz 空間内の平面 $ax + by + cz + d = 0$ と点 $P(p, q, r)$ との距離は

$$\frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で求められる.

球面の方程式

点 $A(a, b, c)$ からの距離が定数 r に等しい点 $P(x, y, z)$ の全体は, A を中心とし半径 r の球面となる. この条件 $|\overrightarrow{AP}| = r$ の両辺を2乗することにより

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

という球面の方程式が導かれる.

例題 1.

$A(-1, 4, 3)$, $B(2, 3, 5)$ を通る直線の方程式を求めよ. また, この直線に垂直で, 点 $C(2, 3, 7)$ を含む平面の方程式を求めよ. 更に, この平面と直線の交点を求めよ.

解答 求める直線は $\overrightarrow{AB} = (3, -1, 2)$ に平行で, 点 $A(-1, 4, 3)$ を通るから

$$\frac{x - (-1)}{3} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 3}{2}$$

すなわち

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 3}{2}$$

と表される. 求める平面は \overrightarrow{AB} に垂直で点 $C(2, 3, 7)$ を通るから

$$3(x - 2) + (-1)(y - 3) + 2(z - 7) = 0$$

すなわち

$$3x - y + 2z - 17 = 0$$

と表される. 直線をパラメータ表示すると, $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 3}{2} = t$ より

$$(x, y, z) = (3t - 1, -t + 4, 2t + 3)$$

と表されるので, 求める交点においては

$$3(3t - 1) - (-t + 4) + 2(2t + 3) - 17 = 0$$

より $t = \frac{9}{7}$ となる. よって交点の座標は $\left(\frac{20}{7}, \frac{19}{7}, \frac{39}{7}\right)$ である.

例題 2.

2 平面 $x - y + 2z - 1 = 0$, $2x + y + z + 4 = 0$ について次の問に答えよ.

- (1) 交線の方程式を求めよ.
- (2) 2 平面のなす角 θ を求めよ. ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする.
- (3) 2 平面の交線を含み, 点 $P(1, 1, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ.

解答 (1) 交線上の点は 2 平面の方程式を同時に満たすので, 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 4 = 0 \end{cases} \text{ を解いて, } x = -1 - z, y = -2 + z \text{ となる. ここで}$$

z 座標を t とすれば, $(x, y, z) = (-1, -2, 0) + t(-1, 1, 1)$ とパラメータ表示されるので, この直線は点 $Q(-1, -2, 0)$ を通り, ベクトル $\mathbf{d} = (-1, 1, 1)$ に平行な直線であるとわかる. よって求める直線の方程式は

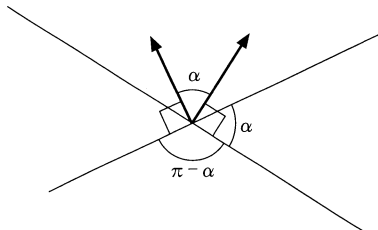
$$\frac{x + 1}{-1} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z}{1}$$

である.

(2) 2平面の法線ベクトルは $(1, -1, 2)$ と $(2, 1, 1)$ であり、これらのなす角を α とすると、求める角 θ は α もしくは $\pi - \alpha$ であることがわかる。

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

より $\alpha = \frac{\pi}{3}$ であり、 $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる。



(2平面を横から見た図)

(3) 求める平面の法線ベクトルは2平面の交線方向ベクトル $\mathbf{d} = (-1, 1, 1)$ と、交線上の点 $Q(-1, -2, 0)$ から $P(1, 1, 1)$ までのベクトル $\overrightarrow{QP} = (2, 3, 1)$ の両方に垂直であるから $\mathbf{d} \times \overrightarrow{QP} = (-2, 3, -5)$ が法線ベクトルとなるので、求める方程式は

$$-2(x-1) + 3(y-1) - 5(z-1) = 0.$$

よって $-2x + 3y - 5z + 4 = 0$ となる。

例題 3.

球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10z + 25 = 0$ と

平面 $K: 2x - 2y + z = 6$ がある。

- (1) S と K の交わりの円の中心の座標と半径を求めよ。
- (2) K に平行で S に接する平面の方程式を求めよ。

解答 (1) S の方程式を変形すると

$$(x-5)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 25$$

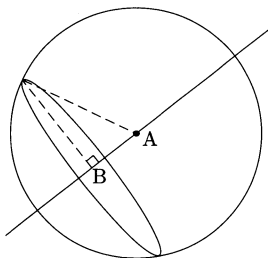
となるので、 S は点 $A(5, 0, 5)$ を中心とする半径5の球面である。求める円の中心は $A(5, 0, 5)$ を通り、 K の法線ベクトル $(2, -2, 1)$ に平行な直線 l が K と交わる点である。 l をパラメータ表示した $(x, y, z) = (5, 0, 5) + t(2, -2, 1)$ より

$$2(5+2t) - 2(-2t) + (5+t) = 6.$$

よって $t = -1$ となるから、求める円の中心は $B(3, 2, 4)$ である。

$$AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ より、求める円の半径は } \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

(2) 求める平面は l と球面の交点を通り、 K と同じ法線ベクトルを持つ平面



である. l と S の交点は

$$(5 + 2t - 5)^2 + (-2t)^2 + (5 + t - 5)^2 = 25$$

より $9t^2 = 25$. よって $t = \pm \frac{5}{3}$ となるから

$$\left(5 \pm \frac{10}{3}, \mp \frac{10}{3}, 5 \pm \frac{5}{3}\right) \quad (\text{複号同順})$$

とわかる.

よって求める平面の方程式は

$$2\left(x - 5 \mp \frac{10}{3}\right) - 2\left(y \pm \frac{10}{3}\right) + \left(z - 5 \mp \frac{5}{3}\right) = 0.$$

従って $2x - 2y + z - 30 = 0$ または $2x - 2y + z = 0$ である.

A

1. 次のように定義される直線の方程式を求めよ.

(1) 点 $A(1, -2, 3)$ を通り, $\mathbf{d} = (3, -2, 1)$ に平行な直線.

(2) 2点 $A(1, -2, 3)$, $B(1, 2, 0)$ を通る直線.

(3) 2点 $A(1, -1, 1)$, $B(2, 0, -1)$ を通る直線.

(4) 2点 $A(1, -1, 1)$, $B(2, -1, 4)$ を通る直線.

(5) 直線 $x = \frac{y}{4} = z$ に平行で点 $A(3, 2, 2)$ を通る直線.

2. 2平面 $x + y + z = 4$, $x - 3z = 1$ の交線の方程式を求めよ.

3. 次のように定義される平面の方程式を求めよ.

(1) 点 $A(-1, 5, 3)$ を通り, $\mathbf{n} = (2, -5, 7)$ に垂直な平面.

(2) 3点 $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 0, -1)$ を通る平面.

(3) 点 $A(2, -1, 1)$ を通り, x 軸に垂直な平面.

(4) 平面 $x + 2y + 3z = 1$ に平行で点 $A(2, 1, 1)$ を通る平面.

4. 直線 $\frac{x-3}{2} = y+1 = \frac{z-1}{3}$ と平面 $2x + 3y - z = 1$ の交点の座標を求めよ.

5. 直線 $x+1 = y = \frac{z}{2}$ を含み, 平面 $2x + 2y + z = 1$ に垂直な平面の方程式を求めよ.

6. 直線 $l: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}$ を含み, 点 $A(1, 1, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ.

7. 2直線 $l_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$, $l_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{-2}$ について次の間に答えよ.

(1) 交点の座標を求めよ.

(2) これらの直線のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を求めよ.

(3) これらを含む平面の方程式を求めよ.

8. 点 $P(3, 2, -1)$ から平面 $3x - y - 2z + 5 = 0$ に下ろした垂線の長さを求めよ.
9. 点 $P(3, 2, -1)$ から直線 $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ に下ろした垂線の長さを求めよ.
10. 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, 4)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, -1, 6)$ を通る球面 S がある.
 (1) S の中心の座標と半径を求めよ.
 (2) S が xy 平面から切り取る部分の面積を求めよ.

B

1. 2直線 $l_1: x - 1 = \frac{y+2}{2} = z - 4$, $l_2: 2 - x = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{2}$ がある.
 (1) l_2 を含み, l_1 に平行な平面 α の方程式を求めよ.
 (2) α の方程式を利用して, l_1, l_2 の共通垂線の長さを求めよ.
2. 2平面 $\alpha_1: 5x - 4y - 3z = 1$, $\alpha_2: 2x - 2y + z = 1$ および直線 $l: \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{5-z}{4}$ がある.
 (1) 2平面 α_1, α_2 のなす角を求めよ.
 (2) 直線 l と平面 α_1 との交点 A の座標を求めよ.
 (3) 直線 l は平面 α_2 に含まれていることを示せ.
 (4) 直線 l と平面 α_1 のなす角を求めよ.
 (5) 2平面 α_1, α_2 の交線 m と直線 l のなす角を求めよ.
3. 3平面 $\alpha: x + y = 1$, $\beta: y + z = 1$, $\gamma: 2x + y + z = -1$ がある. β と γ の交線を l , γ と α の交線を m とする.
 (1) 2平面 α, β のなす角を求めよ.
 (2) 2平面 α, γ のなす角を求めよ.
 (3) 2直線 l, m のなす角を求めよ.
 (4) 2直線 l, m の交点の座標を求めよ.
 (5) 直線 l を含み, 平面 α となす角が $\frac{\pi}{4}$ である平面の方程式を求めよ.

A の解答

1. (1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$
 (2) $\overrightarrow{AB} = (0, 4, -3)$ より $x = 1, \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-3}$
 (3) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ より $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$
 (4) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 3)$ より $y = -1, \frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{3}$
 (5) 求める直線は $d = (1, 4, 1)$ に平行だから $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{1}$
2. 交線上の点は2平面の方程式を同時に満たすので, 連立1次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - 3z = 1 \end{cases} \text{ を解くと, } x = 1 + 3z, y = 3 - 4z \text{ となる. ここで } z$$

座標を t とすれば, $(x, y, z) = (1, 3, 0) + t(3, -4, 1)$ とパラメータ表示されるので, 求める直線は $(1, 3, 0)$ を通り $\mathbf{d} = (3, -4, 1)$ に平行な直線であるとわかる.

よって求める直線の方程式は

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{1}$$

3. (1) $2(x+1) - 5(y-5) + 7(z-3) = 0$ より

$$2x - 5y + 7z + 6 = 0$$

(2) 求める平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ とすると, 3点を通ることより

$$\begin{cases} a - b + c + d = 0 \\ b + d = 0 \\ 2a - c + d = 0 \end{cases}$$

が成立する. これを解くと $a = -d, b = -d, c = -d$ となるので, 求める平面の方程式は $-dx - dy - dz + d = 0$ となるが, $d = 0$ ならばこれは平面を表さないので $d \neq 0$ でなくてはならない. よって両辺を $-d$ で割って $x + y + z - 1 = 0$ が求める平面の方程式である.

(別解) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1), \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2)$ より, 求める平面の法線ベクトルは $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -3, -3)$ である. よって求める平面の方程式は

$$-3(x-1) - 3(y+1) - 3(z-1) = 0$$

より $x + y + z - 1 = 0$.

(3) x 軸に垂直であることより, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ は法線ベクトルとなるから

$$1(x-2) + 0(y+1) + 0(z-1) = 0$$

より $x = 2$.

(4) 平面 $x + 2y + 3z = 1$ の法線ベクトル $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$ は求める平面の法線ベクトルでもあるから

$$1(x-2) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$$

より $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

4. $\frac{x-3}{2} = y+1 = \frac{z-1}{3} = t$ とおくと, 直線上の点は

$$(x, y, z) = (2t+3, t-1, 3t+1)$$

と表せるから, 交点が平面の方程式を満たすことにより

$$2(2t+3) + 3(t-1) - (3t+1) = 1.$$

よって $t = -\frac{1}{4}$ となるので求める交点の座標は $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$ である.

5. 求める平面の法線ベクトルは、与えられた直線方向ベクトル $\mathbf{d} = (1, 1, 2)$ および与えられた平面の法線ベクトル $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$ に垂直であるから、 $\mathbf{d} \times \mathbf{n} = (-3, 3, 0)$ は求める平面の法線ベクトルになるとわかる. また求める平面は、与えられた直線上の点 $(-1, 0, 0)$ を通るから、その方程式は

$$-3(x+1) + 3(y-0) + 0(z-0) = 0.$$

よって $x - y + 1 = 0$ となる.

6. 直線 l は点 $B(0, 1, 2)$ を通り、ベクトル $\mathbf{d} = (2, 3, 4)$ に平行な直線である. 求める平面の法線ベクトルは、このベクトル \mathbf{d} とベクトル $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1)$ に垂直であるから、 $\mathbf{d} \times \overrightarrow{AB} = (3, -6, 3)$ は求める平面の法線ベクトルである. 求める平面は点 $A(1, 1, 1)$ を通るので

$$3(x-1) - 6(y-1) + 3(z-1) = 0$$

より $x - 2y + z = 0$.

7. (1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1} = t$ とおくと、直線 l_1 上の点は $(x, y, z) = (2t+3, t+3, -t+2)$ と表せる. これが l_2 上の点である条件は

$$\frac{2t+3}{-1} = \frac{t+3-4}{2} = \frac{-t+2-1}{-2}$$

より $t = -1$ である. よって求める交点の座標は $(1, 2, 3)$.

(2) l_1, l_2 の方向ベクトルは、それぞれ $(2, 1, -1)$, $(-1, 2, -2)$ であるから

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

(3) 求める平面の法線ベクトルは l_1, l_2 の方向ベクトルの外積を考えればよいから

$$(2, 1, -1) \times (-1, 2, -2) = (0, 5, 5)$$

となる. また、(1) で求めた交点を通るから、求める平面の方程式は

$$0(x-1) + 5(y-2) + 5(z-3) = 0$$

よって $y + z - 5 = 0$ となる.

8. 平面の法線ベクトルは $(3, -1, -2)$ であり、垂線はこのベクトルに平行なので、点 P を通りこのベクトルに平行な直線をパラメータ表示すると

$$(x, y, z) = (3, 2, -1) + t(3, -1, -2) = (3+3t, 2-t, -1-2t)$$

となる. この直線と平面との交点を Q とすると、求める垂線の長さは PQ である.

$$3(3+3t) - 2(2-t) - 2(-1-2t) + 5 = 0$$

より $t = -1$. よって $Q(0, 3, 1)$ である.

求める垂線の長さは $PQ = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

(補足) この考察を一般化し、点 $P(p, q, r)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離を求めてみよう. 点 P を通り平面に垂直な直線は

$$(x, y, z) = (p, q, r) + t(a, b, c) = (p + ta, q + tb, r + tc)$$

と表せるので、交点 Q は

$$a(p + ta) + b(q + tb) + c(r + tc) + d = 0$$

より $t = -\frac{ap + bq + cr + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ のときであるとわかる.

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(p + ta - p)^2 + (q + tb - q)^2 + (r + tc - r)^2} \\ &= \sqrt{t^2(a^2 + b^2 + c^2)} = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

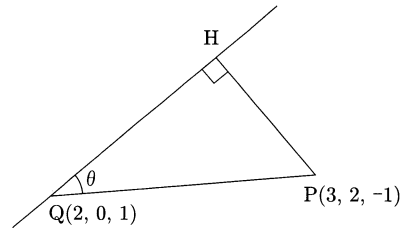
$$\therefore PQ = \left| -\frac{ap + bq + cr + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

9. 与えられた直線は点 $Q(2, 0, 1)$ を通りベクトル $\mathbf{d} = (2, 2, -1)$ に平行な直線である. P からこの直線に下ろした垂線の足を H とし、ベクトル $\overrightarrow{QP} = (1, 2, -2)$ と \mathbf{d} とのなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} QH &= |QP \cos \theta| = |\overrightarrow{QP}| \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{d}|}{|\overrightarrow{QP}| |\mathbf{d}|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって

$$PH = \sqrt{QP^2 - QH^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$



(別解) 直線をパラメータ表示すると

$$(x, y, z) = (2t + 2, 2t, -t + 1)$$

となるが、 P から直線に下ろした垂線の足 H においては、 $\overrightarrow{PH} = (2t - 1, 2t - 2, -t + 2)$ が直線の方向ベクトル $\mathbf{d} = (2, 2, -1)$ と直交することより $2(2t - 1) + 2(2t - 2) - (-t + 2) = 0$. よって $t = \frac{8}{9}$ となるので

$H\left(\frac{34}{9}, \frac{16}{9}, \frac{1}{9}\right)$. 従って

$$PH = \sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{-2}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{153}}{9} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

10. (1) S の中心を $P(a, b, c)$, 半径を r とすれば, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} = r$ より

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = r^2 & \dots\dots \textcircled{1} \\ a^2 + b^2 + (c-4)^2 = r^2 & \dots\dots \textcircled{2} \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 = r^2 & \dots\dots \textcircled{3} \\ (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-6)^2 = r^2 & \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成立する. $\textcircled{1} - \textcircled{2}$, $\textcircled{1} - \textcircled{3}$, $\textcircled{1} - \textcircled{4}$ より

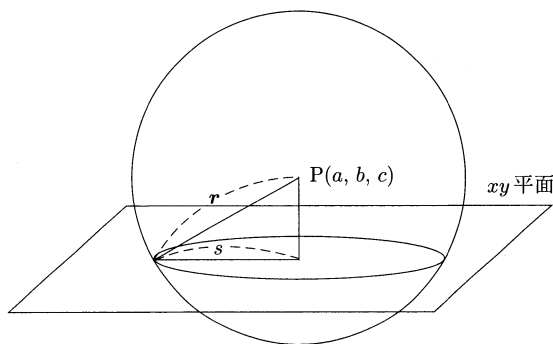
$$\begin{cases} 8c - 16 = 0 \\ 2a + 2b - 2 = 0 \\ 2a - 2b + 12c - 38 = 0 \end{cases}$$

となり, $a = 4, b = -3, c = 2$ を得る. また, $\textcircled{1}$ より $r = \sqrt{29}$.

(2) S が xy 平面から切り取る部分は円となるので. その半径を s とすると

$$r^2 = s^2 + c^2$$

より $s = 5$. よって面積は 25π である.



B の解答

1. (1) l_1 はベクトル $\mathbf{d}_1 = (1, 2, 1)$, l_2 はベクトル $\mathbf{d}_2 = (-1, 2, 2)$ に平行な直線である. よって求める平面 α の法線ベクトルとして $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = (2, -3, 4)$ をとることができる. また, α は l_2 上の点 $(2, 3, 0)$ を通るので, 求める方程式は

$$2(x-2) - 3(y-3) + 4(z-0) = 0,$$

すなわち

$$2x - 3y + 4z + 5 = 0$$

である.

(2) l_1 上の点 P と l_2 上の点 Q を結ぶ \overrightarrow{QP} が共通垂線であるとする. \overrightarrow{QP} は $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ のいずれとも直交するので. \overrightarrow{QP} は平面 α の法線ベクトルとなる.

よって求める垂線の長さは P と平面 α との距離であるが、 α は l_1 に平行な平面であるので、 l_1 上のどの点と α との距離も同じ値である。よって l_1 上の点 $(1, -2, 4)$ と平面 α との距離を求めればよい。その値は公式より

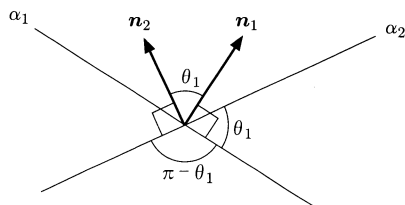
$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \sqrt{29}$$

となる。

2. (1) α_1, α_2 のなす角は α_1, α_2 の法線ベクトル $\mathbf{n}_1 = (5, -4, -3)$, $\mathbf{n}_2 = (2, -2, 1)$ のなす角 θ_1 もしくは $\pi - \theta_1$ である。

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{15}{5\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. よって $\frac{\pi}{4}$.



(2 平面を横から見た図)

(2) 直線 l をパラメータ表示すると $(x, y, z) = (5t - 1, 3t + 1, -4t + 5)$ となる。よって交点 A を表すパラメータ t の値は

$$5(5t - 1) - 4(3t + 1) - 3(-4t + 5) = 1$$

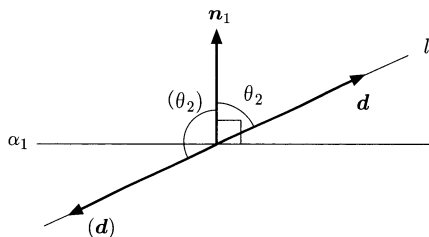
より $t = 1$. よって $A(4, 4, 1)$.

(3) 直線 l は点 $B(-1, 1, 5)$ を通り、ベクトル $\mathbf{d} = (5, 3, -4)$ に平行な直線である。点 B の座標を α_2 の方程式の左辺に代入すると $2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 5 = 1$ となるので、この点は平面 α_2 上の点であり、 $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_2 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 = 0$ であるので、 \mathbf{d} は平面 α_2 上のベクトルである。よって直線 l は平面 α_2 に含まれる。

(4) α_1 と l のなす角は \mathbf{n}_1 と \mathbf{d} とのなす角を θ_2 とすると、 $\frac{\pi}{2} - \theta_2$ もしくは $\theta_2 - \frac{\pi}{2}$ である。

$$\cos \theta_2 = \frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{n}_2| |\mathbf{d}|} = \frac{25}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

より $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$. よって $\frac{\pi}{6}$.



(直線と平面を横から見た図)

(5) α_1 と α_2 の交線は $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-10, -11, -2)$ に平行な直線であるので、

求める角は \mathbf{d} と $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ のなす角 θ_3 もしくは $\pi - \theta_3$ である.

$$\cos \theta_3 = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{d}| |\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|} = \frac{-75}{5\sqrt{2} \cdot 15} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

より $\theta_3 = \frac{3}{4}\pi$. よって $\frac{\pi}{4}$.

3. (1) α, β の法線ベクトルを $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ とすると, 求める角は \mathbf{u}, \mathbf{v} のなす角 θ もしくは $\pi - \theta$ である.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

より $\theta = \frac{\pi}{3}$. よって $\frac{\pi}{3}$.

(2) γ の法線ベクトルを $\mathbf{w} = (2, 1, 1)$ とすると, 求める角は \mathbf{u}, \mathbf{w} のなす角 φ もしくは $\pi - \varphi$ である.

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{w}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

より $\varphi = \frac{\pi}{6}$. よって $\frac{\pi}{6}$.

(3) ℓ, m はそれぞれ $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 2, -2)$, $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = (-1, 1, 1)$ に平行なので, 求める角はこれらのベクトルのなす角 μ もしくは $\pi - \mu$ である.

$$\cos \mu = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| |\mathbf{w} \times \mathbf{u}|} = \frac{0}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

より $\mu = \frac{\pi}{2}$. よって $\frac{\pi}{2}$.

(4) 2直線の交点は3平面 α, β, γ の交点であるから, 連立1次方程式

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

を解いて $(x, y, z) = (-1, 2, -1)$.

(5) 求める平面の法線ベクトルを $\mathbf{n} = (a, b, c)$ とすると, $\mathbf{n} \perp \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ および \mathbf{n} と \mathbf{u} のなす角が $\frac{\pi}{4}$ であることより

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 \\ \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{u}|} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

であるから

$$\begin{cases} 2b - 2c = 0 \\ \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

となる. よって

$$\begin{cases} b = c & \dots\dots \textcircled{1} \\ c^2 = 2ab & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を得る。ここで②に①を代入し因数分解すると、 $c(c-2a)=0$ より $c=0$ もしくは $c=2a$ となる。

(i) $c=0$ のとき。

$b=c=0$ だから、法線ベクトルとして $\mathbf{n}=(1,0,0)$ を考えることができる。このベクトルを法線ベクトルとし、点 $(-1,2,-1)$ を通る平面であるから、求める平面の方程式は

$$1 \cdot (x+1) + 0 \cdot (y-2) + 0 \cdot (z+1) = 0$$

より $x+1=0$ 。

(ii) $c=2a$ のとき。

$b=c=2a$ だから、法線ベクトルとして $\mathbf{n}=(1,2,2)$ を考えることができる。このベクトルを法線ベクトルとし、点 $(-1,2,-1)$ を通る平面であるから、求める平面の方程式は

$$1 \cdot (x+1) + 2(y-2) + 2(z+1) = 0$$

より $x+2y+2z-1=0$ 。

第 2 章

行列と連立 1 次方程式

2.1 行列とその演算

数や文字を長方形に並べて括弧で囲ったもの、すなわち $(1 \ 2 \ 3)$,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{などを行列という (行列は } [1, 2, 3],$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{と角括弧で表すこともある).}$$

一般に mn 個の数や文字を縦に m 個、横に n 個の長方形に並べて括弧で囲んだものを m 行 n 列の行列または $m \times n$ 型の行列という。このとき行列を構成する mn 個の数や文字をこの行列の成分という。

行列は大文字 A, B, C などで表し、その成分は対応して小文字で表すことが多い。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots & \text{第 } 1 \text{ 行} \\ & \\ \cdots & \text{第 } i \text{ 行} \\ & \\ \cdots & \text{第 } m \text{ 行} \end{matrix}$$

第
第
第
1
j
n
列
列
列

のように表すのが便利で、第 i 行と第 j 列の交差するところにある a_{ij} を A の (i, j) 成分という。 A を $A = (a_{ij})$ と略記する。

特に、 $m \times 1$ 型の行列を m 次元列ベクトル、 $1 \times n$ 型の行列を n 次元行ベクトル、 $n \times n$ 型の行列を n 次正方行列という。 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を A の対角成分という。

なお、 1×1 型の行列 (a) は a と同一視する。

行列の相等

2つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ について

- (1) A と B は同じ型, すなわち $m \times n$ 型の行列であり,
 (2) 対応する成分がそれぞれ等しい, つまり $a_{ij} = b_{ij}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$)
 が成り立つとき A と B は等しいといい, $A = B$ とかく.

行列の演算

(I) 加法とスカラー倍

A, B を $m \times n$ 型の行列とする.

- (1) 加法: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対し $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
 (2) スカラー倍: 任意の数 k と $A = (a_{ij})$ に対し $kA = (ka_{ij})$
 すなわち A と B の和 $A + B$, k と A のスカラー倍 kA はともに $m \times n$
 型の行列となる. また $(-1)A = -A$, $A + (-B) = A - B$ とかく.

(II) 乗法

$A = (a_{ij})$ を $m \times \ell$ 型, $B = (b_{ij})$ を $\ell \times n$ 型の行列とする. このとき

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik}b_{kj}$ とおき, c_{ij} を (i, j) 成分にもつ $m \times n$ 型の行列を A, B
 の積といい, AB とかく.

零行列, 単位行列

成分がすべて 0 である $m \times n$ 型の行列を零行列といい, O で表す.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第 1 行} \\ \\ \text{第 } m \text{ 行} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{第} & \text{第} \\ 1 & n \\ \text{列} & \text{列} \end{array}$$

また n 次の正方行列で対角成分がすべて 1 で他の成分がすべて 0 である行列
 を n 次の単位行列といい, E で表す. E の第 j 列を e_j とかき, 基本単位ベク
 トルという.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第 1 行} \\ \\ \text{第 } n \text{ 行} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{第} & \text{第} \\ 1 & n \\ \text{列} & \text{列} \end{array}$$

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ (j = 1, 2, \dots, n) \end{array}$$

行列の演算に関して次の法則が成り立つ.

- (1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (結合法則)
- (2) $A+B = B+A$ (交換法則)
- (3) $k(A+B) = kA+kB$ (行列に関する分配法則)
- (4) $(k+\ell)A = kA+\ell A$ (スカラーに関する分配法則)
- (5) $k(\ell A) = (k\ell)A$ (結合法則)
- (6) $(AB)C = A(BC)$ (結合法則)
- (7) $A(B+C) = AB+AC$ (左側分配の法則)
- (8) $(A+B)C = AC+BC$ (右側分配の法則)
- (9) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- (10) $A+(-A) = O, A+O = A$
- (11) $1A = A, 0A = O, kO = O$
- (12) $AE = EA = A, AO = OA = O$

ただし, これらの式が意味をもつものとしてである.

注1. これらの法則により, できるだけ括弧を省略し, $A+B+C, k\ell A, ABC, kAB$ とかく.

注2. 数 a, b に対し $ab = ba$ は成り立つが, 行列 A, B に対し $AB = BA$ が成り立つとは限らない.

注3. 数 a, b に対し $ab = 0$ ならば $a = 0$ か $b = 0$ であるが, 行列 A, B に対し $AB = O$ ならば $A = O$ か $B = O$ が成り立つとは限らない.

行列の累乗

正方行列 A を n 個掛け合わせた積を A^n と表し, A の n 乗という. このとき, 0 以上の整数 m, n に対し, 次の性質が成り立つ.

- (1) $A^m A^n = A^{m+n}$
- (2) $(A^m)^n = A^{mn}$ ただし, $A^0 = E$ とする.

行列の転置

$m \times n$ 型の行列 A に対し, 行と列を入れ換えて得られる $n \times m$ 型の行列を A の転置行列といい, ${}^t A$ とかく.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -3 & b & 0 \end{pmatrix} \text{ に対し } {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ に対し } {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ベクトル } (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \text{ に対し } {}^t(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

行列の演算と行列の転置に関して次の法則が成り立つ.

$$(1) {}^t({}^tA) = A \quad (2) {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$$(3) {}^t(kA) = k{}^tA \quad (4) {}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

対角行列, 対称行列, 交代行列

A を n 次正方行列とする.

(1) 対角成分以外の成分がすべて 0 のとき, A を対角行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) ${}^tA = A$ のとき, A を対称行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) ${}^tA = -A$ のとき, A を交代行列という.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

注 4. 交代行列の対角成分はすべて 0 になる.

例題 1.

次の行列のうち, 2つの行列の積が定義されるものの積をすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

解答

$$AC = \begin{pmatrix} 9 & 19 & 29 \\ 12 & 26 & 40 \\ 15 & 33 & 51 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 22 & 49 \\ 28 & 64 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 22 & 49 & 76 \\ 28 & 64 & 100 \end{pmatrix}, \quad DA = \begin{pmatrix} 30 & 66 \\ 36 & 81 \\ 42 & 96 \end{pmatrix}, \quad DB = \begin{pmatrix} 30 \\ 36 \\ 42 \end{pmatrix}$$

例題 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ について}$$

(1) $(A+B)^2$ と $A^2 + 2AB + B^2$ を計算し、等しくなることを確かめよ.

(2) $A^2 - B^2$ と $(A+B)(A-B)$ を計算し、等しくなることを確かめよ.

$$\text{解答 (1)} \quad (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例題 3.

正方行列 A に対し、次のことを示せ.

- (1) tAA は対称行列である.
 (2) A が対称行列ならば tPAP も対称行列である.

解答 (1) ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$ より tAA は対称行列である.

(2) ${}^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA{}^t({}^tP) = {}^tP{}^tAP$ となり ${}^tA = A$ ならば ${}^tP{}^tAP = {}^tPAP$ となるので、 tPAP も対称行列である.

A

1. (i, j) 成分が $3i + 2j$ で与えられる 2×3 型の行列を書け.

2. $12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} - 13 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

のとき $(A + 3B + C) - (-A + B - C)$ を計算せよ.

4. (1) ${}^t(A - 2{}^tB)$ を ${}^tA, B$ を使って表せ.

(2) ${}^t(ABC)$ を ${}^tA, {}^tB, {}^tC$ を使って表せ.

5. 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 207 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -11 & -12 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. 次の行列のうち、2つの行列の積が定義されるものの積をすべて求めよ.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ として

$f(A) = A^3 + 2A^2 - 5A + 4E$ と定めるとき, これを計算せよ.

8. 正方形行列 A に対し, $E - A^{n+1} = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^n)$ であることを示せ.

9. 次の行列 A について, A^n を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. (1) $A \neq O, B \neq O$ なのに $AB = O$ となる A, B の例を作れ.

(2) $A \neq O, A^2 \neq O$ なのに $A^3 = O$ となる A の例を作れ.

11. 次の間に答えよ.

(1) A, B が n 次対角行列ならば, $AB = BA$ が成り立つことを示せ.

(2) A を n 次対角行列で, 対角成分が相異なるものとする. このとき $AB = BA$ をみたす n 次正方形行列 B は対角行列であることを示せ.

12. 正方形行列 A の対角成分よりも下にある成分がすべて0, すなわち $a_{ij} = 0$ ($i > j$) であるとき, A を上三角行列と呼ぶ. また, 対角成分よりも上の成分がすべて0であるとき, A を下三角行列と呼ぶ. 上三角行列と下三角行列を合わせて三角行列と呼ぶ.

2つの n 次の上三角行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対して

(1) AB も上三角行列になることを示せ.

(2) AB の対角成分を求めよ.

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ のとき ${}^tAA, A{}^tA$ を求めよ.

14. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とし, $\mathbf{b}{}^t\mathbf{b} = C$ とするとき

(1) C は対称行列であることを示せ.

(2) ${}^t\mathbf{bb} = k \neq 0$ とし, $D = \frac{1}{k}C$ とするとき, $D^2 = D$ となることを示せ.

15. (1) 任意の正方行列 A に対して $B = A + {}^tA$, $C = A - {}^tA$ とおくと, B は対称行列, C は交代行列になることを示せ.

(2) 任意の正方行列 A は対称行列と交代行列の和として一意的に表されることを示せ.

$$(3) A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ および } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ を対称行列}$$

と交代行列の和として表せ.

B

1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対し $\text{tr}({}^tAB)$ を求めよ.

なお, n 次正方行列 $C = (c_{ij})$ に対し, 対角成分の和 $\text{tr} C = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ を C のトレースと呼ぶ.

2. 正方行列 A が巾零であるとは, ある自然数 k があって $A^k = O$ が成り立つときにいう.

(1) n 次正方行列 A, B が巾零であるとき, $A + B$ は巾零か. 正しければ証明を与え, 正しくなければ反例を与えよ.

(2) n 次正方行列 A, B が巾零で $AB = BA$ をみたすならば, $A + B$ は巾零であることを示せ.

3. n 次正方行列 A, B に対し, $[A, B] = AB - BA$ と定義する. $[A, B]$ を A と B の括弧積 (bracket) と呼ぶ. このとき, 次を示せ.

(1) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$ (ヤコビ (Jacobi) の恒等式)

(2) ${}^tA = -A$, ${}^tB = -B$ ならば ${}^t[A, B] = -[A, B]$

(3) $[A, B] \neq E$

4. n 次実正方行列 A が ${}^tAA = E$ を満たすとき, A を直交行列という. n 次直交行列 A に対し $E - A$ が正則行列であれば

$$B = (E - A)^{-1}(E + A)$$

とおくとき, B は交代行列になることを示せ.

5. 次を示せ.

$$(1) m \times \ell \text{ 型の行列 } A = (a_{ij}) \text{ と } \ell \text{ 次元列ベクトル } \mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{\ell j} \end{pmatrix}$$

 $(j = 1, 2, \dots, n)$ に対して

$$A(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n) = (A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_n)$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$$

ただし, $A = (a_{ij})$ は $m_1 \times \ell_1$ 型の行列, $B = (b_{ij})$ は $m_1 \times \ell_2$ 型の行列, $C = (c_{ij})$ は $m_2 \times \ell_2$ 型の行列, $D = (d_{ij})$ は $\ell_1 \times n_1$ 型の行列, $F = (f_{ij})$ は $\ell_1 \times n_2$ 型の行列, $G = (g_{ij})$ は $\ell_2 \times n_2$ 型の行列である.

$$(3) m \text{ 次元列ベクトル } \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ に対して}$$

$$(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n$$

A の解答

$$1. \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 83 \\ -13 \end{pmatrix}$$

3.

$$(A + 3B + C) - (-A + B - C) = 2(A + B + C)$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 16 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 16 \\ 4 & 10 & 16 \\ 18 & 32 & 10 \end{pmatrix}$$

$$4. (1) {}^t(A - 2{}^tB) = {}^tA - 2B \quad (2) {}^t(ABC) = {}^tC {}^tB {}^tA$$

5.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 412 \\ -14 & -13 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -11 & -12 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 1 \\ 26 & 19 & 12 & 5 \\ 42 & 31 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

$$6. AC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad AD = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix},$$

$$DF = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad FA = (1 \ 9 \ -3), \quad FC = (0 \ 1),$$

$$FD = 3.$$

7.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & -45 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$$

よって

$$f(A) = \begin{pmatrix} -35 & -45 \\ 30 & 10 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -46 & -60 \\ 40 & 14 \end{pmatrix}$$

8.

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^n)$$

$$= E + A + A^2 + \cdots + A^n - (A + A^2 + \cdots + A^{n+1})$$

$$= E - A^{n+1}$$

9. (1) $A^2 = -E$ より

$$n = 2p \text{ のとき} \quad A^n = (A^2)^p = (-E)^p = (-1)^p E$$

$$n = 2p + 1 \text{ のとき } A^n = A^{2p}A = (-1)^p EA = (-1)^p A$$

(2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となる. よって

$$n = 4p \text{ のとき } A^n = (A^4)^p = E^p = E$$

$$n = 4p + 1 \text{ のとき } A^n = A^{4p}A = A$$

$$n = 4p + 2 \text{ のとき } A^n = A^{4p}A^2 = A^2$$

$$n = 4p + 3 \text{ のとき } A^n = A^{4p}A^3 = A^3$$

10.

$$(1) \text{ たとえば } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすれば } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ たとえば } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすれば } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O \text{ で}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O \text{ となる.}$$

注:他にも多くの例がある.

11.

$$(1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & 0 \\ & b_{22} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & 0 \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & & & 0 \\ & b_{22}a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

となる. よって $AB = BA$.

注：上記の大きな 0 はこの部分の成分がすべて 0 になっていることを表している。

$$(2) A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

と、 AB と BA の (i, j) 成分はそれぞれ $a_{ii}b_{ij}$, $a_{jj}b_{ij}$ となる。 $AB = BA$ とすると、 $a_{ii}b_{ij} = a_{jj}b_{ij}$ であるが、 $i \neq j$ のとき $a_{ii} \neq a_{jj}$ だから $b_{ij} = 0$ ($i \neq j$)。

$$\text{よって } B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

12. $AB = (c_{ij})$ とおく。

(1) $i > j$ のとき $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}$. ここで $1 \leq k \leq i-1$ のとき $i > k$ だから $a_{ik} = 0$ で、 $i \leq k \leq n$ のとき $k > j$ だから $b_{kj} = 0$. よって $c_{ij} = 0$ ($i > j$) となり AB は上三角行列である。

$$(2) c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii}$$

13.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 2 & 17 & 5 \\ -10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

14.

(1) ${}^tC = {}^t(\mathbf{b}^t\mathbf{b}) = {}^t(\mathbf{b}^t)\mathbf{b} = \mathbf{b}^t\mathbf{b} = C$ より C は対称行列である。

(2) $D^2 = \left(\frac{1}{k}C\right)\left(\frac{1}{k}C\right) = \frac{1}{k^2}C^2 = \frac{1}{k^2}(\mathbf{b}^t\mathbf{b})(\mathbf{b}^t\mathbf{b}) = \frac{1}{k^2}\mathbf{b}^t(\mathbf{b}\mathbf{b}^t)\mathbf{b} = \frac{k}{k^2}\mathbf{b}^t\mathbf{b} = \frac{1}{k}C = D$ より $D^2 = D$ となる。

15.

(1) ${}^tB = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^{tt}A = {}^tA + A = A + {}^tA = B$. よって B は対称行列である。 ${}^tC = {}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^{tt}A = {}^tA - A = -(A - {}^tA) = -C$. よって C は交代行列である。

(2) (1) より $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ と対称行列と交代行列の和、逆に

$A = B + C$ (B は対称行列, C は交代行列) とすれば ${}^tA = B - C$. よって
 $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ となる.

$$(3) {}^tA_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ だから}$$

$$\frac{1}{2}(A_1 + {}^tA_1) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & 5 & 2 \\ \frac{7}{2} & 2 & 8 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}(A_1 - {}^tA_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって } A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & 5 & 2 \\ \frac{7}{2} & 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A_2 の場合も同様にして

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B の解答

1. tAB の (i, i) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ki}$ であるから $\text{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ki}$

2. (1) 正しくない.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと } A^2 = B^2 = O \text{ だが}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ は巾零でない.}$$

(2) $A^k = O, B^\ell = O$ とするとき, $m = k + \ell - 1$ とおくと

$$(A + B)^m = \sum_{r=0}^m {}_m C_r A^{m-r} B^r$$

ここで $r \geq \ell$ のとき $B^r = O$, $r \leq \ell - 1$ のとき $m - r = k + \ell - 1 - r \geq k$ だから $A^{m-r} = O$ となる. よって

$$(A + B)^m = \sum_{r=0}^m {}_m C_r A^{m-r} B^r = O.$$

3. (1)

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

$$= A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B$$

$$+ C(AB - BA) - (AB - BA)C = O$$

(2) ${}^t[A, B] = {}^t(AB - BA) = {}^tB{}^tA - {}^tA{}^tB = (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -[A, B]$

(3) $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ とおくと, AB の (i, i) 成分の和は $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$

で, BA の (i, i) 成分の和は $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$ である. よって $AB - BA$ の (i, i) 成分の和は 0 で, E の (i, i) 成分の和は n だから, $[A, B] \neq E$ となる.

4. ${}^tB = -B$ となることを示せばよい.

$${}^tB = (E + {}^tA) {}^t\{(E - A)^{-1}\}$$

ここで ${}^tA = A^{-1}$, ${}^t\{(E - A)^{-1}\} = \{ {}^t(E - A) \}^{-1} = (E - {}^tA)^{-1}$ より

$${}^tB = (E + {}^tA)A^{-1}(E - {}^tA)^{-1} = (A + {}^tAA)\{(E - {}^tA)A\}^{-1}$$

$$= (A + E)(A - E)^{-1}$$

ここで $A^2 - E = (A - E)(A + E) = (A + E)(A - E)$ より

$$(A + E)(A - E)^{-1} = (A - E)^{-1}(A + E)$$

より

$${}^tB = (A - E)^{-1}(A + E) = \{(-1)(E - A)\}^{-1}(A + E)$$

$$= -(E - A)^{-1}(A + E) = -B$$

5. (1) $A (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n)$ の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^{\ell} a_{ik}b_{kj}$ である. これは

$(A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \dots \ A\mathbf{b}_n)$ の (i, j) 成分にほかならない.

(2) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分 $(1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq n_1)$

は $\sum_{k=1}^{\ell_1} a_{ik}d_{kj}$ である. これは $\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分にほかならない.

同様に $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分 $(1 \leq i \leq m_1, n_1 + 1 \leq j \leq n_2)$

は $\sum_{k=1}^{\ell_1} a_{ik}f_{kj} + \sum_{k=1}^{\ell_2} b_{ik}g_{kj}$ である. これは $\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分

にほかならない. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分 ($m_1 + 1 \leq i \leq m_2$,

$1 \leq j \leq n_1$) は0である. これは $\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分にほか

ならない. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & F \\ O & G \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分

($m_1 + 1 \leq i \leq m_2$, $n_1 + 1 \leq j \leq n_2$) は $\sum_{k=1}^{\ell_2} c_{ik} g_{kj}$ である. これは

$\begin{pmatrix} AD & AF + BG \\ O & CG \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分にほかならない.

(3) $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ は m 次元列ベクトルである. この第 i

成分は $\sum_{k=1}^n a_{ik} c_k$ である. これは m 次元列ベクトル $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n$ の第 i 成分にほかならない.

注: この間は行列を分割して積を計算する方法を示した. 行列の分割の仕方は他にもたくさんある.

2.2 連立1次方程式(掃き出し法)・行列の階数

次にあげる3つの例は与えられた連立1次方程式をそれと同値な方程式に変形して解く方法を紹介するものである。

例1. 連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \text{係数行列} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

上から2つの方程式を入れ換えると

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \quad \dots \text{①} \\ 2x - 2y + z = 0 \quad \dots \text{②} \\ -3x + 2y = 0 \quad \dots \text{③} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

② + ① × (-2), ③ + ① × 3 を作ると

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \quad \dots \text{①} \\ -6y + 9z = 0 \quad \dots \text{④} \\ 8y - 12z = 0 \quad \dots \text{⑤} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 9 \\ 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

④ × (- $\frac{4}{3}$) = ⑤ より⑤は不要.

④ × (- $\frac{1}{6}$) を作ると

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \quad \dots \text{①} \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \quad \dots \text{⑥} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

① + ⑥ × (-2) を作ると

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

この形の行列を階段行列という。

よって与えられた連立1次方程式は $x = z, y = \frac{3}{2}z$ となるから、その解は $z = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

となる。なお、 $z = 2t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

となる。

例2. 連立1次方程式

拡大係数行列

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ 2x - y - 3z + 3u = 10 \cdots \textcircled{2} \\ -x + 3y + 3z - 2u = 2 \cdots \textcircled{3} \\ x + 2y - u = -10 \cdots \textcircled{4} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -10 \end{array} \right)$$

②+①×(-2), ③+①, ④+①×(-1)
を作ると

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ 2y + z = 7 \cdots \textcircled{6} \\ 3y + 2z - 3u = -15 \cdots \textcircled{7} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -15 \end{array} \right)$$

⑥+⑤×(-2), ⑦+⑤×(-3)を作ると

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ -z + 2u = 7 \cdots \textcircled{8} \\ -z = -15 \cdots \textcircled{9} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -15 \end{array} \right)$$

⑨×(-1)を作り⑧と入れ換えると

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ z = 15 \cdots \textcircled{10} \\ -z + 2u = 7 \cdots \textcircled{8} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

{⑧+⑩}× $\frac{1}{2}$ を作ると

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y + z - u = 0 \cdots \textcircled{5} \\ z = 15 \cdots \textcircled{10} \\ u = 11 \cdots \textcircled{11} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

⑤+⑩×(-1)+⑪を作ると

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2u = 5 \cdots \textcircled{1} \\ y = -4 \cdots \textcircled{12} \\ z = 15 \cdots \textcircled{10} \\ u = 11 \cdots \textcircled{11} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

①+⑫+⑩×2+⑪×(-2)を作ると

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -4 \\ z = 15 \\ u = 11 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

階段行列となる。

よって、与えられた連立1次方程式の解はただ一つで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

となる.

例 3.

連立1次方程式	拡大係数行列
$\begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 7 \cdots \textcircled{1} \\ -2x + 3y - 13z + 2u = -2 \cdots \textcircled{2} \\ 3x + 3y - 3z + 2u = 13 \cdots \textcircled{3} \end{cases} \longleftrightarrow$	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & -2 & 8 & -3 & 7 \\ -2 & 3 & -13 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & 2 & 13 \end{array} \right)$
<p>② + ① × 2, ③ + ① × (-3) を作ると</p>	↓
$\begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 7 \cdots \textcircled{1} \\ -y + 3z - 4u = 12 \cdots \textcircled{4} \\ 9y - 27z + 11u = -8 \cdots \textcircled{5} \end{cases} \longleftrightarrow$	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & -2 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 9 & -27 & 11 & -8 \end{array} \right)$
<p>{⑤ + ④ × 9} × (-$\frac{1}{25}$), ④ × (-1) を作ると</p>	↓
$\begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 7 \cdots \textcircled{1} \\ y - 3z + 4u = -12 \cdots \textcircled{6} \\ u = -4 \cdots \textcircled{7} \end{cases} \longleftrightarrow$	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & -2 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$
<p>① + ⑦ × 3, ⑥ + ⑦ × (-4) を作ると</p>	↓
$\begin{cases} x - 2y + 8z = -5 \cdots \textcircled{8} \\ y - 3z = 4 \cdots \textcircled{9} \\ u = -4 \cdots \textcircled{7} \end{cases} \longleftrightarrow$	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & -2 & 8 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$
<p>⑧ + ⑨ × 2 を作ると</p>	↓
$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 3z = 4 \\ u = -4 \end{cases} \longleftrightarrow$	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$

階段行列となる.

よって与えられた連立1次方程式は $x = 3 - 2z, y = 4 + 3z, u = -4$ となるから、 $z = t$ とおけばその解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

となる.

例1~3の変形を係数行列または拡大係数行列に注目してまとめてみると次のようになる。

行に関する基本変形

$m \times n$ 型の行列 A に対し、次の (1)~(3) の変形を A の行に関する基本変形という。

- (1) A の2つの行を入れ換える。
- (2) A のある行を c 倍 ($c \neq 0$) する。
- (3) A のある行に他の行の c 倍を加える。

さて、一般の連立1次方程式 $Ax = b$ の解法についてふれてみよう。ここで、 x は未知数ベクトルで

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

であり、 A を係数行列、 $(A | b)$ を拡大係数行列といい、 A は $m \times n$ 型の行列、 $(A | b)$ は $m \times (n+1)$ 型の行列である。行に関する基本変形を $(A | b)$ に数回適用し簡単な形の連立1次方程式になっても同値性は保たれる。このようにして連立1次方程式の解を求める方法を掃き出し法という。

例1は $b = 0$ の場合であり、このような連立1次方程式を同次連立1次方程式と呼ぶ。同次連立1次方程式の場合は係数行列のみを基本変形して解くことができる。

階段行列と行列の階数

$m \times n$ 型の行列 A に対し、行に関する基本変形をして

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & & 1 & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & & & & & 0 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} r \text{ 個の行}$$

となったとき、得られた行列を階段行列といい、 A の階数は r であるという。このとき $\text{rank } A = r$ とかく。

例1~3で得られた行列の階数は次のようになる。

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} = 4,$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

注1. 階段のできる個数が行列の階数である。

注2. 行列の階数は変形の仕方によらず決まる数であるから階段行列になる前の時点で階数は求まる。

注3. $m \times n$ 型の行列 A に対し,

$$\text{rank } A \leq m, n$$

である。

定理1 (連立1次方程式 $Ax = b$ の解の存在).

- (1) $\text{rank } A = \text{rank}(A | b)$ ならば, $Ax = b$ は解をもつ。
- (2) $\text{rank } A < \text{rank}(A | b)$ ならば, $Ax = b$ は解をもたない。

定理2 (同次連立1次方程式の非自明解).

A を $m \times n$ 型の行列とする。

$Ax = 0$ が 0 でない解 (非自明解) をもつための必要十分条件は $\text{rank } A < n$ である。

例題 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & y \end{pmatrix} \text{ とするとき, } \text{rank } A = 2 \text{ となる } x, y \text{ を求めよ.}$$

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & x & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 & y-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 & y-3 \end{pmatrix}$$

よって

$$\text{rank } A = 2 \iff \begin{cases} x-4=0 \\ y-3=0 \end{cases}$$

より $x = 4, y = 3$.

例題 2.

$$\text{連立1次方程式} \begin{cases} x+3y+u=3 \\ x+2y+z=1 \\ -x+y-4z+3u=a \end{cases} \text{を解け.}$$

解答

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & a+3 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

よって

$$a=5 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ただし, t_1, t_2 は任意定数) $a \neq 5$ のとき 解なし.

A

1. 次の行列 A の階数を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -14 & -13 & 18 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列 A の階数を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & a-2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & a-3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & a-4 \end{pmatrix}$$

3. 次の連立1次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 7y + 5z = 24 \\ 2x + 4y + 2z = 14 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 5x + 6y - 7z = -3 \\ 4x + 7y + 3z = 4 \\ -3x - 9y + z = 4 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 5x + y + 2z = 9 \\ x + y + z = 7 \\ 9x + y + 3z = 11 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x - 2y - 3z = -3 \\ -2x - 3z = -11 \\ x - y - 2z = -3 \end{cases}$$

4. 次の連立1次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 12 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + 2y + z + 3u = 0 \\ 4x - y - 5z - 6u = 9 \\ x - 3y - 4z - 7u = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

5. 次の連立1次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3s + 4t = 2 \\ -x + 2y - 4z + s = 2 \\ 2x + y + 3z - 2s - 10t = -4 \\ -2x + y - 5z + s + 3t = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 4z + 2s + 9t = 0 \\ x + y + z + 2s + 3t = 3 \\ -2x + y - 5z + 2s + 6t = 4 \\ 2x + y + 3z - s - 7t = -4 \end{cases}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ とするとき連立1次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

および $A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を解け.

7. 連立1次方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + u = 1 \\ x + z + u = 1 \\ y + z + (c-2)u = 1 \end{cases}$ がただ1組の解をもつた

めの c の条件を求めよ. また, このときの解を求めよ.

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

き、連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつように a, b を定めよ。また、そのときの解 \mathbf{x} を求めよ。

$$9. \quad \text{同次連立1次方程式} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \end{cases} \text{ が非自明解をもつための } a, b$$

の条件を求め、その条件を満たす (a, b) を ab 平面上に図示せよ。

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & -2 & 1-a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} \text{ とするとき、次の間に答えよ。}$$

(1) $\text{rank } A$ を求めよ。

$$(2) \text{ 連立1次方程式 } A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ が解をもつための } a, b \text{ の条件を求めよ。}$$

(3) (2) の条件が成立しているとき、この方程式の解を求めよ。

B

1. $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m)$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m)$ に対して $A = {}^t\mathbf{ab}$ とおくと、 $\text{rank } A = 1$ であることを示せ。

$$2. \quad \text{行列 } A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ a & 2 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ の階数を求めよ。}$$

3. 次の行列 A の階数を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

A の解答

$$1. (1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank } A = 2.$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \text{rank } A = 1.$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より rank } A = 3.$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -14 & -13 & 18 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -4 & -14 & -13 & 18 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -24 & -15 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この段階で rank $A = 2$ がわかる.

2. (1)

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix},$$

ここで $x+2=0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となり rank } A = 2.$$

 $x+2 \neq 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

となる. さらに $x=1$ または $x \neq 1$ で分けると $x=1$ のとき rank $A = 1$,

$x \neq 1$ のとき $\text{rank } A = 3$. 以上よりまとめると

$$x = 1 \text{ のとき } \text{rank } A = 1$$

$$x = -2 \text{ のとき } \text{rank } A = 2$$

$$x \neq 1 \text{ かつ } x \neq -2 \text{ のとき } \text{rank } A = 3.$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

より $a = 1$ のとき $\text{rank } A = 1$, $a \neq 1$ のとき $\text{rank } A = 3$.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & a-2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & a-3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & a-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 7 & 10 \\ 0 & 0 & a+3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

より $a = 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a + 3 = 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$a = 0 \text{ または } a = -3 \text{ のとき } \text{rank } A = 3$$

$$a \neq 0 \text{ かつ } a \neq -3 \text{ のとき } \text{rank } A = 4.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3. (1)} \quad & \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -5 \\ 0 & -17 & 17 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \text{ より } x = 2, y = -1. \end{aligned}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 5 & 24 \\ 2 & 4 & 2 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

よって $\begin{cases} x - 3z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$ となるから, $z = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & -7 & -3 \\ 4 & 7 & 3 & 4 \\ -3 & -9 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 \\ -3 & -9 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 0 & 11 & 43 & 32 \\ 0 & -12 & -29 & -17 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & -12 & -29 & -17 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -24 & -22 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \\ 0 & 0 & -197 & -197 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -24 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ より } x = 2, \quad y = -1, \quad z = 1.$$

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \text{ より解なし.}$$

(5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & -26 \\ 0 & -8 & -6 & -52 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ より } \begin{cases} x + \frac{1}{4}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{3}{4}z = \frac{13}{2} \end{cases} \text{ となるから, } z = 4t \text{ とおけば}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(6)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & -11 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & -11 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & -17 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{より} \end{aligned}$$

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3.$$

4. (1)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 3 & -5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 4 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 50 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -61 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 50 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 4 \end{array} \right) \text{より} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 19 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 61 \\ -50 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

より解なし.

(3)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & -6 & 9 \\ 1 & -3 & -4 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数}).$$

5. (1)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -4 \\ -2 & 1 & -5 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 11 & 7 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 11 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数}).$$

(2)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -7 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -7 & -4 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 12 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -13 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 12 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -13 & -10 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{array} \right) \text{より解なし.}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -7 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 7 & 9 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{10}{7}z = \frac{5}{7} \\ y + \frac{9}{7}z = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u - \frac{10}{7}w = -\frac{3}{7} \\ v + \frac{9}{7}w = \frac{2}{7} \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (s \text{ は任意定数}).$$

7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & c-2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & c-2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c-1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & | & 1 \end{pmatrix}$$

より $c=0$ のとき解なし. $c \neq 0$ のとき, さらに変形して

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 - \frac{2}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \text{ となるから } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{c} \\ \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & | & a \\ -2 & -2 & -1 & -1 & | & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & | & a-3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & b+2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+1 \end{pmatrix}$$

よって $Ax = b$ が解をもつためには $a = 2, b = -1$. このとき $x_3 = t_1,$

$x_4 = t_2$ とすると

$$x_1 = -t_1, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2$$

したがって

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数}).$$

9.

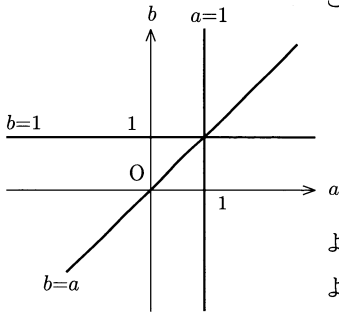
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & b-1 & b^2-1 \end{pmatrix}$$

ここで $a=1$ または $b=1$ のとき $\text{rank } A < 3$ となり、非自明解をもつ。

$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

より $b-a=0$ ならば非自明解をもち、 $b-a \neq 0$ ならば非自明解をもたない。
よって非自明解をもつ条件は $a=1$ または $b=1$ または $a=b$ 。図示すると欄外の図のようになる(太線部分)。



10.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & -2 & 1-a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$\text{rank } A = 2$.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b \end{array} \right) \text{ より}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ が解をもつためには } 2a-b=0. \text{ よって } b=2a.$$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & 2a & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ より}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

B の解答

1. $a_i \neq 0$ とするとき, A の第 j 行 ($j \neq i$) に第 i 行の $\left(-\frac{a_j}{a_i}\right)$ 倍を加えてみればよい.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ a & 2 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & -(a+1)(a-2) & -2a-3 & a+2 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-9 & 4(a-1) \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & a+1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-9 & 4(a-1) \end{pmatrix}$$

より $a+1=0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \end{pmatrix},$$

$a-9=0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix},$$

$a+1 \neq 0$ かつ $a-9 \neq 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{a+1} & \frac{3}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4(a-1)}{a-9} \end{pmatrix}$$

となる. 以上をまとめると $\text{rank } A = 3$.

(別解) $Ax = \mathbf{0}$ の変数ベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の変数の順序を変えると A の

列が入れ換わるが, そのようにしても最終的に得られる解に含まれる任意定数の

$$\text{個数は同じであることが保証されているので, } A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & a-1 \\ 2 & -3 & a & 2 \\ 3 & 3 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

とすると, $\text{rank } A = \text{rank } A'$ である.

$$A' \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2a \\ 0 & 9 & 3 & 4a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2a \\ 0 & 0 & -9a-15 & -14a-2 \end{pmatrix}$$

$-9a-15=0$ のとき $-14a-2 \neq 0$ であり, $\text{rank } A' = 3$.

3. (1) (i) $a = b = 0$ のとき $\text{rank } A = 0$.

$$(ii) a \neq 0 \text{ のとき } A \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(iii) b \neq 0 \text{ のとき } A \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以上まとめて

$$a = b = 0 \text{ のとき } \text{rank } A = 0$$

$$\text{それ以外のとき } \text{rank } A = 1.$$

(2) (i) $a = b = c = 0$ のとき $\text{rank } A = 0$.

(ii) a, b, c のうち, 少なくとも1つが0でない場合, 例えば $a \neq 0$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以上まとめて

$$a = b = c = 0 \text{ のとき } \text{rank } A = 0$$

$$\text{それ以外のとき } \text{rank } A = 1.$$

(3) (i) $a = b = c = 0$ のとき $\text{rank } A = 0$.

(ii) $a = b = c \neq 0$ のとき $\text{rank } A = 1$.

(iii) $a = b = c$ でない場合

① $a+b+c=0$ のとき, a, b, c の中に0でないものが存在しているので, 例えば $a \neq 0$ とすると

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} & \frac{a^2-bc}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ここで $\frac{ac-b^2}{a} = \frac{1}{a}\{a(-a-b) - b^2\} = \frac{1}{a}\{-(a+\frac{b}{2})^2 - \frac{3}{4}b^2\} \neq 0$. よって
rank $A = 2$.

② $a+b+c \neq 0$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & c-b & a-b \end{pmatrix} \text{ となるが}$$

a, b, c の中に異なるものがあるから rank $A = 3$.

2.3 逆行列

正則行列

n 次正方行列 A に対し, $AX = XA = E$ となる n 次正方行列 X が存在するとき A を正則行列という. このとき X を A の逆行列といい, $X = A^{-1}$ とかく. たとえば $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $\Delta = ad - bc \neq 0$ ならば A は正則で, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である.

正則行列に対して, 次の性質が成り立つ.

- (1) A が正則行列ならば, A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$ である.
- (2) A, B が正則行列ならば, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である.
- (3) A が正則行列ならば tA も正則行列で, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である.

行列の負の累乗

正則行列 A の逆行列 A^{-1} を n 個掛け合わせた積を A^{-n} と表す. このとき, 0 以上の整数 m, n に対して成り立っていた

$$(1) A^m A^n = A^{m+n} \quad (2) (A^m)^n = A^{mn}$$

はすべての整数に対して成り立つことがわかる.

逆行列の求め方

A を n 次の正則行列とし, X を A の逆行列とすると $AX = XA = E$ となる.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \text{ の第 } j \text{ 列を } \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \text{ とおけば}$$

$$AX = E \iff A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

となる. よって $AX = E$ をみたす X を求めることは n 個の連立1次方程式 $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$ をみたす $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ を求めることと同値だから $(A|E)$ が行に関する基本変形で $(A|E) \rightarrow (E|B)$ となれば $X = B = A^{-1}$ である.

注1. 行列 X が $AX = E$ をみたせば $XA = E$ が成り立つことがわかっている (第3章3.2の定理5を参照せよ).

注2. 行に関する基本変形で $(A|E) \rightarrow (C|D)$ となり $\text{rank } C < n$ であれば A は正則行列でない.

例題 1.

n 次正方行列 A が $A^3 = O$ を満たせば $A + E$ は正則行列になることを示せ.

解答

$$(A + E)(A^2 - A + E) = (A^2 - A + E)(A + E) = A^3 + E = E.$$

よって $A + E$ は正則で, $(A + E)^{-1} = A^2 - A + E$ となる.

例題 2.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ は正則か. 正則ならば逆行列を求めよ.

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank } A = 2 < 3$ より A は正則でない.

例題 3.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & | & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right) \text{より}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A

1. 次を示せ.

(1) n 次正方行列 A が正則ならば逆行列 A^{-1} も正則で

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(2) n 次正方行列 A, B が正則ならば AB も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(3) n 次正方行列 A が正則ならば tA も正則で

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

2. $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次のことを示せ.

$$(1) A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$$

$$(2) A(\theta)^{-1} = A(-\theta)$$

$$(3) SA(\theta)S^{-1} = A(\theta)^{-1}$$

3. 正方行列 A が $A^2 - A + E = O$ をみたすとき A は正則であることを示せ. さらに A^{-1} を求めよ.

4. 正方行列 A が $A^m = O$ (m は自然数) となるとき $E - A$ の逆行列を求めよ.

5. 次の行列が正則であるかどうかを調べて正則ならばその逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

6. 次の行列 A の逆行列を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 2+2i & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

7. 次の行列 A の逆行列を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ とするとき } A^{-1}, B^{-1},$$

$(AB)^{-1}$ を求めよ.

9. 次の行列 A の逆行列を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 \\ 0 & 1 & b & bc \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix} \text{ とするとき, 次の間に答えよ.}$$

(1) A が正則であるための c の条件を求めよ.

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき A の逆行列を求めよ.

B

1. A を m 次正方行列, D を n 次正方行列, B を $m \times n$ 型の行列, C を $n \times m$ 型の行列とし, $X = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$ とおく. A, D が正則行列のとき X および Y の逆行列を求めよ.

2. k を自然数とし, A を $m \times n$ 型の行列とするととき, 次の間に答えよ. ただし, E_m は m 次の単位行列を表す.

$$(1) \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k \text{ を求めよ.}$$

$$(2) \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} \text{ を求めよ.}$$

$$(3) \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-k} \text{ を求めよ.}$$

$$(4) B^2 = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \text{ となる行列 } B \text{ を1つ求めよ.}$$

A の解答

1. (1) A^{-1} が正則であるということは $A^{-1}X = XA^{-1} = E$ を満たす行列 X が存在するということである. ところが $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ だから A^{-1} は正則で $(A^{-1})^{-1} = A$ である.

(2)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = E$$

よって AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である.

(3)

$${}^tA {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = E, \quad {}^t(A^{-1}) {}^tA = {}^t(AA^{-1}) = E$$

よって tA は正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である.

2. (1)

$$\begin{aligned} A(\theta_1)A(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = A(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

(2)

$$A(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = A(-\theta)$$

(3)

$$\begin{aligned} SA(\theta)S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A(\theta)^{-1} \end{aligned}$$

3. $A(E-A) = A - A^2 = E$, $(E-A)A = A - A^2 = E$. よって A は正則で,
 $A^{-1} = E - A$ である.

4.

$$\begin{aligned} E - A^m &= (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) \\ &= (E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})(E - A). \end{aligned}$$

 $A^m = O$ より

$$\begin{aligned} (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) \\ = (E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})(E - A) = E \end{aligned}$$

となり $E - A$ の逆行列は $E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$ である.

5. (1) $3 \times 1 - (-1)(-2) = 1$ より $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $1 \times (-4) - 2 \times (-2) = 0$ より $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ は正則でない.

(3) $101^2 - 99^2 = 200 \times 2 = 400$ より $\begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{400} \begin{pmatrix} 101 & -99 \\ -99 & 101 \end{pmatrix}$

(4) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - (-\sqrt{3}) \cdot 0 = 1$ より $\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

6. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -12 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{より}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -1 & 5 \\ 10 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{より逆行列は存在しない.}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

より

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 8 & -12 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 2+2i & 1 & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+3i & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1-i & \frac{3-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & i & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-i}{4} & \frac{1-i}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1-i & \frac{3-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & i & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \end{array} \right)
\end{aligned}$$

より

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1+i & 1-i \\ 4-4i & 6-2i & -2+2i \\ 4i & 2i & -2i \end{pmatrix}$$

7. (1)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \text{より}
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \text{より}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left(= \frac{1}{4} A \right)$$

$$8. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{より } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{よ} \wr B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ -2 & -5 & 22 \\ 8 & 22 & -95 \end{pmatrix}.$$

9. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{よ} \wr A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -ab & -a & | & 1 & -a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & | & 1 & -a & ab-1 \end{pmatrix}$$

 $a \neq 0$ のとき, さらに変形して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{a} - b \end{pmatrix}$$

となる. よって $a \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{a} - b \end{pmatrix}$$

$a = 0$ のとき A の逆行列は存在しない.

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & bc & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & ab & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -a & 0 & abc \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & abc \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & -1 & | & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 - 1 & | & c & -1 & -c & 1 \end{pmatrix} \text{より}$$

A が正則である条件は $c^2 - 1 \neq 0$ である. よって $c \neq \pm 1$.

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき (1) の最終の変形に代入すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2\sqrt{2} & 3 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{array} \right) \text{より} \\ &A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{2} & 3 & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bの解答

1. $X^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix}$ であろうと予想すると

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & AQ + BR \\ O & DR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

より $P = A^{-1}$, $R = D^{-1}$, $AQ + BR = O$, $Q = -A^{-1}BD^{-1}$ とならねばならない. 実際に計算すれば

$$\begin{aligned} X \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BD^{-1} + BD^{-1} \\ O & DD^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}A & A^{-1}B - A^{-1}BD^{-1}D \\ O & D^{-1}D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}. \end{aligned}$$

よって

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

同様に $Y^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$ であることも確かめられる。

2. (1) $\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法を用いて示す。

$k=1$ のときは成り立っている。 $k-1$ で成り立つと仮定すれば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{k-1} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & (k-1)A \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & (k-1)A + A \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって k のときも成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}, \\ \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-k} &= \left\{ \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-1} \right\}^k \\ &= \begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} E_m & -kA \\ O & E_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) $B = \begin{pmatrix} E_m & \frac{1}{2}A \\ O & E_n \end{pmatrix}$ とすると

$$B^2 = \begin{pmatrix} E_m & \frac{1}{2}A \\ O & E_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E_m & 2 \cdot \frac{1}{2}A \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

第3章

行列式

3.1 行列式の定義と性質

行列式の導入

次の連立1次方程式を消去法で解いてみよう.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \cdots \textcircled{1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① $\times a_{22}$ - ② $\times a_{12}$ を計算すると

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

また ② $\times a_{11}$ - ① $\times a_{21}$ を計算すると

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

よって

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \tag{1}$$

ならば、解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

を得る.

同じようにして、連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

を考えると

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0 \tag{2}$$

のとき、解を表す式が得られることがわかる.

$$(1) \text{の左辺を } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, (2) \text{の左辺を } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{と表し, それぞ}$$

れ 2 次の行列式, 3 次の行列式という.

順列

n 個の数 $1, 2, \dots, n$ を任意の順序で 1 列に並べたものを n 次の順列といい, $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ で表す. n 次の順列は全部で $n!$ 個ある.

$(p_1 p_2 \cdots p_n)$ を順列とする. 各 p_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) に対し, p_i の右側にある数 p_{i+1}, \dots, p_n のうち p_i より小さい数の個数を k_i とおく. また $k_n = 0$ とする. このとき和 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$ を順列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ の転倒数という.

順列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ の転倒数が偶数のとき $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ は偶順列, 転倒数が奇数のとき奇順列であるという. このとき順列の符号 $\varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n)$ を

$$\varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) = \begin{cases} 1 & ((p_1 p_2 \cdots p_n) \text{ が偶順列のとき}) \\ -1 & ((p_1 p_2 \cdots p_n) \text{ が奇順列のとき}) \end{cases}$$

によって定める.

例. 4 次の順列 (2143) について, $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 1$ だから転倒数は $1 + 0 + 1 = 2$. よって (2143) は偶順列である.

定理 1. 順列の隣同士の数を入れ換えると, 順列の符号が変わる:

$$\varepsilon(p_1 \cdots p_i p_{i+1} \cdots p_n) = -\varepsilon(p_1 \cdots p_{i+1} p_i \cdots p_n).$$

行列式の定義

正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対し, その成分によって定義される式

$$\sum \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

を A の行列式 (determinant) という. A が n 次のとき, その行列式を n 次の行列式という. ここで \sum は n 次の順列 $(p_1 p_2 \cdots p_n)$ すべてについて和をとる

ことを表す. A の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表し, 略して $|A|, \det A$ とも書く.

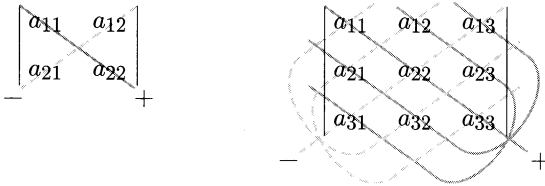
例. 1次と2次の行列式はそれぞれ次のようになる:

$$|a_{11}| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(12)a_{11}a_{22} + \varepsilon(21)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

また, 3次の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon(123)a_{11}a_{22}a_{33} + \varepsilon(231)a_{12}a_{23}a_{31} + \varepsilon(312)a_{13}a_{21}a_{32} \\ + \varepsilon(132)a_{11}a_{23}a_{32} + \varepsilon(213)a_{12}a_{21}a_{33} + \varepsilon(321)a_{13}a_{22}a_{31}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ となり, これらは先に述べた定義と一致する. 2次と3次の行列式は次のたすき掛けの方法で記憶すると便利である. なお, 4次以上の行列式にはこの方法は適用できない.



行列式の性質

定理 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理2より、特に次の式が成り立つことがわかる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

定理 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 5. 2つの行を入れ換えると行列式の符号が変わる:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

定理 6. 2つの行が一致すれば、行列式の値は0である。

定理 7. 1つの行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{jn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

定理 8. 行と列を入れ換えても行列式の値は変わらない:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 8 より, 行列式の行に関する性質 (定理 3~定理 7) は列に対しても同様に成り立つ.

定理 9 (積の行列式). n 次正方行列 A, B に対して, 次の等式が成り立つ.

$$|AB| = |A| |B|$$

行列式の幾何学的意味

平面上の点 O を始点とする 2 つのベクトル $\vec{OA} = (a, b), \vec{OB} = (c, d)$ のつくる平行四辺形の面積 S は 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値 $|\det A|$ に他ならない:

$$S = |ad - bc| = |\det A|.$$

一方, 空間の点 O を始点とする 3 つのベクトル $\vec{OA} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{OB} = \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{OC} = \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ について, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が右手系 (左手系) をなす条件は 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ が正 (負) であることである. また, ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のつくる平行六面体の体積 V は行列 A の行列式の絶対値 $|\det A|$ に他ならない:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\det A|.$$

例題 1.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とする. このとき

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を示せ. また, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$ を示せ.

解答

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

だから

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

次に定理 6 より

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

例題 2.

次の行列式を計算せよ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

解答 2行に1行を, 3行と4行に1行の2倍をそれぞれ加えると

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & 14 & 5 \\ 0 & -12 & 13 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -9 & 14 & 5 \\ -12 & 13 & -2 \end{vmatrix}$$

さらに2行に1行の(-9)倍, 3行に1行の(-12)倍をそれぞれ加えると

$$\Delta = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & -22 & -22 \\ 0 & -35 & -38 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -22 & -22 \\ -35 & -38 \end{vmatrix}$$

1行から(-22)を, 2行から(-1)をそれぞれくくり出すと

$$\Delta = (-1)^2 \cdot (-22)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 35 & 38 \end{vmatrix} = (-1)^4 22(38 - 35) = 66.$$

例題 3.

次の行列式を因数分解せよ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

解答 1行に2行と3行を加えて, 1行から $(a+b+c)$ をくくり出すと

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

2列と3列に1列の(-1)倍をそれぞれ加えて, 直接展開すると

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ c-b & a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)\{(a-c)(a-b) - (b-c)(c-b)\} \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \end{aligned}$$

A

1. 次の順列の転倒数を求め, 偶順列か奇順列かを判定せよ. さらに符号を求めよ.

- (1) (4 3 2 1) (2) (2 5 3 1 4) (3) (3 1 4 6 5 2)

2. 4 次の行列式は、たすき掛けの方法では求められない. その理由を行列式の定義に戻り説明せよ.

3. 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \quad (2) \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} & \quad (3) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
 (4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} & \quad (5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \quad (6) \begin{vmatrix} 20 & 33 & -30 \\ -20 & -11 & 0 \\ 70 & 55 & 70 \end{vmatrix} \\
 (7) \begin{vmatrix} 123 & 122 & 124 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix} & \quad (8) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \quad (9) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 (10) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} & \quad (11) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} & \quad (12) \begin{vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & & 2 \\ & & & 3 \\ & \ddots & & \\ & & & 0 \\ & & & n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

4. 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} & \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} & \quad (3) \begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+4 \end{vmatrix} \\
 (4) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} & \quad (5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 (6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} & \quad (7) \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} & \quad (8) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & b & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & c & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

5. (1) $\left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right|$ はどのような図形の面積を表しているか, 図示せよ.

(2) $\left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$ はどのような立体の体積を表しているか、図示せよ。

6. ベクトル $(2, 1, 1)$, $(-1, 0, 2)$, $(-1, 2, 1)$ で作られる平行六面体を図示し、さらに体積 V を求めよ。

7. 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(4, 6, 5)$, $C(2, 6, 4)$ を頂点とする四面体の体積 V を求めよ。

8. 2次方程式 $f(x) = ax^2 + 2bx + c = 0$ ($a \neq 0$) に対して行列式 $\Delta =$

$$-\frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2a & 2b & 0 \\ 0 & 2a & 2b \end{vmatrix}$$

の符号により、 $f(x) = 0$ の解の様子が変わることを示せ。

9. (1) 正則行列 A の逆行列の行列式を求めよ。

(2) 奇数次の交代行列 A の行列式を求めよ。

(3) ${}^tAA = E$ をみたす行列 A (直交行列) の行列式を求めよ。

10. 次の行列式 Δ を求めよ。

$$\Delta = \begin{vmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & E_n \\ & & O & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & \vdots & & \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & & O \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & & \end{vmatrix}$$

B

1. 次の等式を示せ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

2. 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 27 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 99 & 99^3 & 99^2 \\ 100 & 100^3 & 100^2 \\ 101 & 101^3 & 101^2 \end{vmatrix}$$

3. 次の行列式を因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix}$$

4. A を m 次正方行列, B を n 次正方行列とすると, 次が成り立つことを示せ.

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

5.

$$p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j + s_i s_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \text{ のとき}$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{vmatrix} = \pm 1$$

を示せ.

6. A, B を n 次正方行列とすると, 次を示せ.

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

$$(2) \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB| \quad (i \text{ は虚数単位})$$

特に A, B の成分がすべて実数のとき

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = (|A+iB| \text{ の絶対値})^2$$

A の解答

1. (1) 転倒数 6, 偶順列, $\varepsilon(4321) = 1$.

(2) 転倒数 5, 奇順列, $\varepsilon(25314) = -1$.

(3) 転倒数 6, 偶順列, $\varepsilon(3\ 1\ 4\ 6\ 5\ 2) = 1$.

$$2. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \text{ の展開式における項 } a_4 b_3 c_2 d_1 \text{ の係数は A の } 1(1) \text{ より}$$

+1 である. ところがたすき掛けのような考え方で求めようとする, この項の係数を -1 と誤解することになり正しい値を求められない.

3. (1) 62 (2) 1 (3) 30 (4) 45 (5) -18 (6) 40700 (7) 1107

$$\begin{vmatrix} 123 & 122 & 124 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 369 & 369 & 369 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix} = 369 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 124 & 123 & 122 \\ 122 & 124 & 123 \end{vmatrix} \text{ とし}$$

て計算せよ.

(8) 12 (9) 16 (10) -224 (11) 0

(12)

$$\begin{vmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & & & 2 \\ & & & & & & 3 \\ & & \ddots & & & & & \ddots \\ n & & & & & & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$$

4. (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c(a-b) \\ c-a & b(a-c) \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -1 & c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+2 & -1 & 1 \\ a+2 & a-3 & 1 \\ 0 & -6 & a+4 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-3 & 1 \\ 0 & -6 & a+4 \end{vmatrix} \\ &= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 0 & a-2 & a+4 \end{vmatrix} = (a+2)(a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+4 \end{vmatrix} = (a+2)(a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+4 \end{vmatrix} \\ &= (a+2)(a-2)(a+4) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \\ &= (2a+2b+2c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} = (2a+2b+2c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \\ &= 2(a+b+c)^3 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 & = (a+3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+3)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 & = -(a+3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3)
 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & a-x & a-x \\ x & y-x & b-x & b-x \\ x & y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} \\
 & = (a-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & b-x & b-x \\ y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} = (a-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y-x & b-y & b-y \\ y-x & z-y & c-y \end{vmatrix} \\
 & = (a-x)(b-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z-y & c-y \end{vmatrix} = (a-x)(b-y)(c-z).
 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} \\
 & = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & -b & c-b \\ c & -c & a-c & b-c \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & -b & c-b \\ -c & a-c & b-c \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & a-b-c & 0 \\ -c & a-c & b-c \\ c & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & a-b-c & 0 \\ 0 & a+b-c & a+b-c \\ c & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ c & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) \\
&= -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)
\end{aligned}$$

(8)

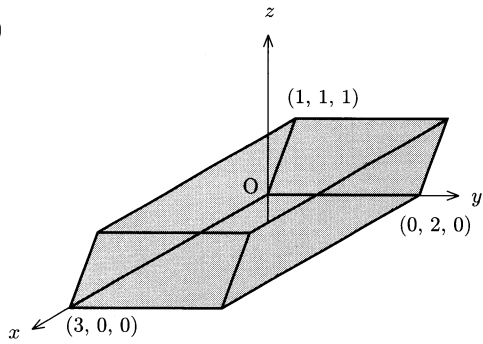
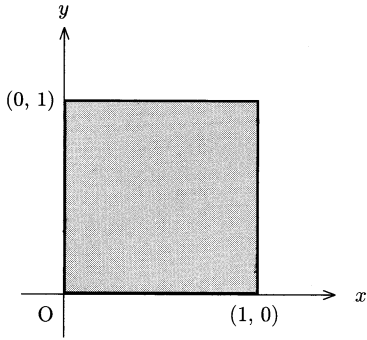
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & b & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & c & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-p & 0 & 0 & 0 & 0 & p-a \\ 0 & b-q & 0 & 0 & q-b & 0 \\ 0 & 0 & c-r & r-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-p)(b-q)(c-r) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

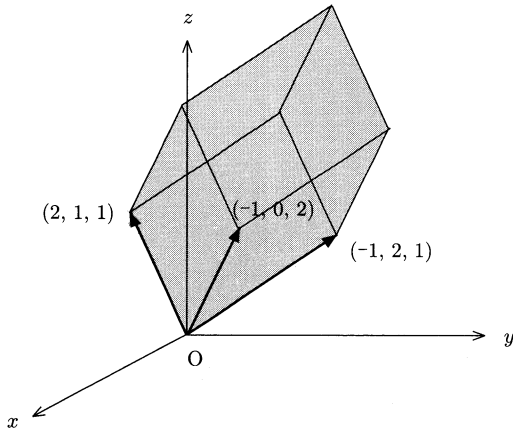
$$= (a-p)(b-q)(c-r) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & c+r & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & b+q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & a+p \end{vmatrix}$$

$$= (a-p)(b-q)(c-r)(a+p)(b+q)(c+r)$$

5. (1) (2)



6.



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -11 \text{ より, } V = |-11| = 11.$$

7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 18 \text{ より, } V = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3.$$

$$8. \Delta = -\frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2a & 2b & 0 \\ 0 & 2a & 2b \end{vmatrix} = 4(b^2 - ac) \text{ は 2 次方程式 } f(x) = 0 \text{ の判別式で}$$

ある.

$$9. (1) AA^{-1} = E \text{ より } |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \therefore |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

$$(2) {}^tA = -A \text{ より } |A| = |{}^tA| = (-1)^n |A|, \{1 - (-1)^n\} |A| = 0.$$

n は奇数だから $|A| = 0$.

$$(3) |{}^tA| \cdot |A| = |A|^2 = 1 \quad \therefore |A| = \pm 1.$$

10.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{n2} \begin{vmatrix} & O & & \vdots & E_n \\ & \dots & & \dots & \dots \\ 2 & & 0 & & \dots \\ 0 & & 2 & & \dots \\ & & & \vdots & O \end{vmatrix} = (-1)^{2n2^2} \begin{vmatrix} & \vdots & & E_n \\ & O & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & & \vdots & O \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3n2^3} |E_n| = (-1)^n 2^3 = \begin{cases} 8 & (n = \text{偶数}) \\ -8 & (n = \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

Bの解答

1. (1),(2) は省略する.

(3) 左辺の行列式で $x_i = x_j$ ($i \neq j$) とおくと第 i 列と第 j 列が一致するから, 行列式の値は 0. よって $(x_j - x_i)$ ($i < j$) で割り切れる. したがって,

$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ でも割り切れる. 両辺とも $1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

次の多項式だから, 定数 k があって左辺 $= k \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)$. 行列式の中

で対角成分の積を考えると両辺における $x_2 \cdot x_3^2 \cdot \dots \cdot x_n^{n-1}$ の係数はどちらも 1 だから $k = 1$.

2. Bの1を利用する. (1) -48 .

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 99 & 99^3 & 99^2 \\ 100 & 100^3 & 100^2 \\ 101 & 101^3 & 101^2 \end{vmatrix} &= (-99) \cdot 100 \cdot 101 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 99 & 100 & 101 \\ 99^2 & 100^2 & 101^2 \end{vmatrix} \\ &= -1999800. \end{aligned}$$

3. (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} &= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ a-b-c+d & a-b-c+d & 0 \\ a-b+c-d & 0 & a-b+c-d \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & -d & 2c & -2d \\ d & c & 2d & 2c \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} \\
 \stackrel{(*)}{=} 4 \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

(注：(*) では B の 4 の結果を使った.)

4. $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$ を示す. $N = m+n$ とし, $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$

とおくと定義から

$$(*) \quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 \cdots p_N)} \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_N) a_{1p_1} \cdots a_{mp_m} a_{m+1p_{m+1}} \cdots a_{Np_N}$$

である. 仮定より $a_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = m+1, \dots, N$) だから p_1, \dots, p_m の中に m より大きい数があれば

$$a_{1p_1} \cdots a_{mp_m} a_{m+1p_{m+1}} \cdots a_{Np_N} = 0.$$

よって (*) の右辺の順列 $(p_1 \cdots p_N)$ についての和は $(p_1 \cdots p_m)$ が $1, 2, \dots, m$ の順列となっているもののみで取ればよい. このとき $(p_{m+1} \cdots p_N)$ は $m+1, \dots, N$ の順列である. したがって $\varepsilon(p_1 \cdots p_N) = \varepsilon(p_1 \cdots p_m)\varepsilon(p_{m+1} \cdots p_N)$

となることに注意すれば

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} &= \sum_{(p_1 \cdots p_m)} \sum_{(p_{m+1} \cdots p_N)} \varepsilon(p_1 \cdots p_m) \varepsilon(p_{m+1} \cdots p_N) \\ &\quad \times a_{1p_1} \cdots a_{mp_m} a_{m+1p_{m+1}} \cdots a_{Np_N} \\ &= \left(\sum_{(p_1 \cdots p_m)} \varepsilon(p_1 \cdots p_m) a_{1p_1} \cdots a_{mp_m} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{(p_{m+1} \cdots p_N)} \varepsilon(p_{m+1} \cdots p_N) a_{m+1p_{m+1}} \cdots a_{Np_N} \right) \\ &= |A||B|. \end{aligned}$$

等式 $\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ の証明については、行列を転置して考えればよい。

5. $A = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^t A = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |A^t A| = |A| \cdot |^t A| = |A|^2 = 1 \quad \therefore |A| = \pm 1$$

6. B の 4 を用いる。

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} \\ = |A+B||A-B|.$$

$$(2) \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} \\ = |A+iB||A-iB|.$$

3.2 余因子展開

行列式の余因子展開

n 次正方行列 A から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と表す. また $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ とおき, \tilde{a}_{ij} を a_{ij} の余因子という.

例. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ に対して

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -4, \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^5 \cdot (-4) = 4.$$

定理 1. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $|A|$ は次のように余因子展開される.

(1) $|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$ (第 i 行に関する展開)

(2) $|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$ (第 j 列に関する展開)

定理 2. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $a_{i1}\tilde{a}_{j1} + a_{i2}\tilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{jn} = 0$ ($i \neq j$ のとき)

(2) $a_{1i}\tilde{a}_{1j} + a_{2i}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\tilde{a}_{nj} = 0$ ($i \neq j$ のとき)

余因子行列, 正則行列

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し, a_{ij} の余因子 \tilde{a}_{ij} を成分とする行列

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

の転置行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列という (\tilde{A} の (i, j) 成分は \tilde{a}_{ji} であることに注意せよ).

定理 3. 正方行列 A に対し

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} |A| & & & 0 \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

定理 4. A が n 次正方行列のとき, 次の (1)~(3) は互いに同値である.

(1) A は正則である.

(2) $|A| \neq 0$.

(3) $\text{rank } A = n$.

さらに A が正則であるとき, A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

で与えられる.

定理 5. 正方行列 A に対し, $BA = E$ となる正方行列 B が存在すれば $AB = E$ が成り立つ. すなわち A は正則で, $B = A^{-1}$ である. $AC = E$ となる C が存在する場合も同様である.

クラメル (Cramer) の公式

x_1, x_2, \dots, x_n を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とにおいて $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表す. もし $|A| \neq 0$ ならば, この連立 1 次方程式はただ 1 組の解をもち, その解は

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

で与えられる. ここで A_j は A の第 j 列を \mathbf{b} で置き換えた行列である:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

注: 特に $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のとき $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非自明解をもつための必要十分条件は $|A| = 0$ である.

例題 1.

第 1 列で展開して、次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ b & x & -1 & 0 \\ c & 0 & x & -1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

解答

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ b & x & -1 & 0 \\ c & 0 & x & -1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\ &\quad + c \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

例題 2.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ が正則か否かを判定し、正則ならばその逆行列を余因子行列を求めることで求めよ。

解答

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

だから A は正則である。

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & \tilde{a}_{21} &= - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, & \tilde{a}_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, \\ \tilde{a}_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, & \tilde{a}_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, & \tilde{a}_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{より } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -7 & -5 & 4 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{よって } A^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -7 & -5 & 4 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

例題 3.

クラメルの公式を用いて、次の連立1次方程式を解け。

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = -2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \text{ よりクラメルの公式が使える.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11}{4},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}.$$

A

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ を第1行で展開して計算し、たすき掛けの方法で

求めたものと等しくなることを確かめよ.

2. 次の行列式を第1行の展開および第3列の展開によって求め、値が等しいことを確かめよ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ x & y & z & u & w \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ax + by + cz + du + ew$$

とするとき、 a, b, c, d, e を求めよ.

4. 余因子展開を利用して、次の行列式を因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の余因子行列 \tilde{A} を求めよ.

また $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$ が成り立つことを確かめよ.

6. 次の行列の余因子行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 100 & 101 & 99 \\ 99 & 100 & 101 \\ 101 & 99 & 100 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

7. 次の行列の逆行列を余因子行列を利用して求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2i \\ i & 1-i & 0 \\ 0 & -1-i & -i \end{pmatrix}$$

8. n 次正方行列 A, B の積 AB が正則ならば, A, B はそれぞれ正則であることを示せ.

9. 次の連立1次方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$(1) \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 3y + 3z = 9 \\ 3x + 4y - 5z = -6 \\ 2x + 3y - 4z = -7 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x - 4y + 3z = 2 \\ 5x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\det A$ を求めよ.

(2) A^{-1} の (2,3) 成分を求めよ.

(3) クラメルの公式を用いて, 連立1次方程式 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ の解

x_2 を求めよ.

11. 連立1次方程式
$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ ax + y - z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$
 がただ1つの解をもつための

a の条件を求め, そのときこの連立1次方程式を解け.

B

1.

$$F_n = \begin{vmatrix} x & -1 & & & & & \\ 0 & x & -1 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -1 & \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \end{vmatrix}$$

とおく.

(1) F_n を第 n 列で余因子展開すると F_n と F_{n-1} との関係式が得られる. それを求めよ.

$$(2) F_1 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1x + a_0 \text{ であることから順に } F_n \text{ を求めよ.}$$

2. n 次正方形行列 A の余因子行列 \tilde{A} について次を示せ.

$$(1) |\tilde{A}| = |A|^{n-1}$$

$$(2) \tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-2}A \text{ (ただし, } n=2 \text{ のとき, } |A|=0 \text{ ならば } 0^0=1 \text{ とする.)}$$

3. 連立1次方程式

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \cdots + x_n = b \\ x_1 + x_2 + ax_3 + \cdots + x_n = b \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + ax_n = b \end{cases}$$

の係数行列を A とし, $b \neq 0$ とする. このとき

(1) $|A|$ を因数分解せよ.

(2) A が正則であるための a の条件を求めよ.

(3) A が正則であるとき, クラメルの公式より方程式を解け.

(4) A が正則でないとき, 方程式の解は存在するか. 存在すれば解を求めよ.

A の解答

1. 第1行で展開すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 42.$$

たすき掛けの方法で計算すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - (-7) \cdot 5 \cdot 3 = 42.$$

2. 第1行による展開

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &+ 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -(-12 + 27) - 2(-6 - 9) + 0 - (-6 - 9) = 30.$$

第3列による展開

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 3(-9 + 2 + 4 + 3 + 4 + 6) + 0 + 0 = 30. \end{aligned}$$

3. Δ を第3行で展開する.

$$\begin{aligned} \Delta &= x(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + z(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + u(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + w(-1)^{3+5} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x + 6y - 6z + 6u - 9w. \end{aligned}$$

$$\text{よって } a = 3, b = 6, c = -6, d = 6, e = -9.$$

4. (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ -a+b+c & 0 & c & b \\ a-b-c & -c & 0 & a \\ -(a+b+c) & -b & -a & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ -a+b+c & 0 & c & b \\ 0 & -c & c & a+b \\ 0 & a-b & b-a & c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & c & a+b \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} - (-a+b+c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -c & c & a+b \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} c & c & b \\ 0 & c & a+b \\ 0 & b-a & c \end{vmatrix} + (a-b-c) \begin{vmatrix} a+b & b & c \\ 0 & c & a+b \\ 0 & b-a & c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)c\{c^2 - (a+b)(b-a)\} + (a-b-c)(a+b)\{c^2 - (a+b)(b-a)\} \\
&= (a^2 - b^2 + c^2)\{(a+b+c)c + (a-b-c)(a+b)\} = (a^2 - b^2 + c^2)^2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \\
&= x \left\{ x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \right\} + \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \\
&= x\{x(x^3 + 2x) + x^2 + 1\} + (x^3 + 2x) \\
&= x(x^4 + 4x^2 + 3) = x(x^2 + 3)(x^2 + 1)
\end{aligned}$$

5.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & abc \\ 0 & 0 & abd & 0 \\ 0 & acd & 0 & 0 \\ bcd & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = abcd,$$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} abcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & abcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abcd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abcd \end{pmatrix} = |A|E.$$

$$6. (1) \begin{pmatrix} 1 & -299 & 301 \\ 301 & 1 & -299 \\ -299 & 301 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2+i & 0 & 2i \\ i & 1-i & 0 \\ 0 & -1-i & -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+i & -2-2i & 0 \\ i & 1-i & 0 \\ 0 & -1-i & -i \end{vmatrix}$$

$$= -i \begin{vmatrix} 2+i & -2-2i \\ i & 1-i \end{vmatrix} = 1-i,$$

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1-i & 0 \\ -1-i & -i \end{vmatrix} = -1-i, \quad \tilde{a}_{12} = - \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = -1,$$

$$\tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} i & 1-i \\ 0 & -1-i \end{vmatrix} = 1-i, \quad \tilde{a}_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 2i \\ -1-i & -i \end{vmatrix} = 2-2i,$$

$$\tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 2+i & 2i \\ 0 & -i \end{vmatrix} = 1-2i, \quad \tilde{a}_{23} = - \begin{vmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{vmatrix} = 1+3i,$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} = -2-2i, \quad \tilde{a}_{32} = - \begin{vmatrix} 2+i & 2i \\ i & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 2+i & 0 \\ i & 1-i \end{vmatrix} = 3-i, \quad \frac{1}{|A|} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} -1-i & 2-2i & -2-2i \\ -1 & 1-2i & -2 \\ 1-i & 1+3i & 3-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2i & 4 & -4i \\ -1-i & 3-i & -2-2i \\ 2 & -2+4i & 4+2i \end{pmatrix}$$

8. AB が正則であるから $|AB| \neq 0$. $|A||B| = |AB| \neq 0$ より $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ である. よって A, B は正則である.

9.

$$(1) x = \frac{26}{29}, \quad y = -\frac{25}{29} \quad (2) x = 3, \quad y = 5, \quad z = 7$$

$$(3) x = \frac{1}{36}, \quad y = -\frac{23}{36}, \quad z = -\frac{7}{36}$$

10.

$$(1) \det A = -9$$

(2) A の余因子行列の $(2, 3)$ 成分は $(-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -6$ だから,

A^{-1} の $(2, 3)$ 成分は $\frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$.

(3)

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 4 & 11 & 5 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}}{\det A} = -\frac{19}{3}.$$

11. 与えられた方程式がただ1つの解をもつ条件は

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-1) \neq 0,$$

すなわち $a \neq -\frac{1}{2}, 1$. このときクラメルの公式から

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{-(2a+1)(a-1)} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{-(2a+1)(a-1)} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{-(2a+1)(a-1)} = -1.$$

B の解答

1.

$$F_n = (-1)(-1)^{2n-1} \begin{vmatrix} x & -1 & & & & & \\ 0 & x & -1 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & & -1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \end{vmatrix}$$

$$+ a_n(-1)^{2n} \begin{vmatrix} x & -1 & & & & & \\ & x & -1 & & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & \ddots & -1 & & \\ & & & & & x & \end{vmatrix} = F_{n-1} + a_n x^n.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & F_n = a_n x^n + F_{n-1} \\
 & F_{n-1} = a_{n-1} x^{n-1} + F_{n-2} \\
 & \vdots \\
 & F_2 = a_2 x^2 + F_1 \\
 +) \quad & F_1 = a_1 x + a_0 \\
 \hline
 & F_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0
 \end{aligned}$$

2.

(1) $|A| \neq 0$ のとき

$$A\tilde{A} = |A|E \text{ より } |A|\tilde{A} = |A|^n \quad \therefore \quad \tilde{A} = |A|^{n-1}.$$

$|A| = 0$ のとき

$|\tilde{A}| \neq 0$ なら, \tilde{A} に逆行列があることになり $A\tilde{A} = O$ より $A = O$ となるが, A の成分がすべて 0 なら $\tilde{A} = O$ であり矛盾. よって $|\tilde{A}| = 0$.

(2) $|A| \neq 0$ のとき

$$\tilde{A}\tilde{A} = |\tilde{A}|E = |A|^{n-1}E \text{ より } A\tilde{A}\tilde{A} = |A|^{n-1}A \text{ である. } A\tilde{A} = |A|E \text{ より } |A|\tilde{A} = |A|^{n-1}A \quad \therefore \quad \tilde{A} = |A|^{n-2}A.$$

$|A| = 0$ のとき

(i) $n > 2$ の場合

$\text{rank } A \leq n-1$ であり, $\text{rank } A < n-1$ であれば, A の $(n-1)$ 次小行列式はすべて 0 となるので, $\tilde{A} = O$. よって $\tilde{\tilde{A}} = O$.

$\text{rank } A = n-1$ であれば, $A\tilde{A} = O$ より $\text{rank } \tilde{A} = 1 < n-1$ なので, \tilde{A} の $(n-1)$ 次小行列式はすべて 0 で $\tilde{\tilde{A}} = O$.

(ii) $n = 2$ の場合

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ に対し } \tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ なので } \tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

これは $\tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-2}A$ であることを示している.

$$3. (1) \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & a & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

(2) A が正則 $\iff |A| \neq 0 \quad \therefore a \neq 1$ かつ $a \neq 1-n$

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a & \cdots & b & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & b & \cdots & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= b \begin{vmatrix} a-1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= b \begin{vmatrix} a-1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = b(a-1)^{n-1}$$

$$\therefore x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{b}{a+n-1} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(4) $a = 1$ のとき

$$x_j = t_j \quad (j = 2, 3, \dots, n) \text{ とおけば } x_1 = b - \sum_{j=2}^n t_j.$$

$a = 1-n$ のとき

$$\text{rank} \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} b \\ \vdots \\ b \end{matrix} \end{array} \right) > \text{rank } A \text{ より解なし.}$$

第4章

ベクトル空間

4.1 ベクトル空間とその部分空間

ベクトル空間

1行だけの行列や1列だけの行列を行ベクトルや列ベクトルと呼んだ。これらをまとめて数ベクトルと呼び、実数を成分とする n 次元列ベクトルや行ベクトルの全体である

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbf{R}_n = \{(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)\}$$

をそれぞれ n 次元列ベクトル空間、 n 次元行ベクトル空間と呼ぶ。主に列ベクトル空間を考えることが多い。 $\mathbf{R}(= \mathbf{R}^1 = \mathbf{R}_1)$ は実数全体、 \mathbf{R}^2 は xy 平面、 \mathbf{R}^3 は xyz 空間と対応している。複素数を成分とする数ベクトルを考えると、 \mathbf{C}^n 、 \mathbf{C}_n も同様に定義できる。

n 次元列ベクトル空間 \mathbf{R}^n のベクトルについては以下の性質が成り立つことがわかる。

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n \text{ ならば } \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, k \in \mathbf{R} \text{ ならば } k\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$$

つまり、和と実数倍について閉じているという性質であり、これを線形性と呼ぶ。

一般に、集合 V の要素について上と同様の性質が成り立つ場合、その集合のことを（一般の）ベクトル空間と呼ぶが、ここではあまり詳しく触れない。 n 次以下の多項式の全体や連続関数の全体などが例としてあげられる。

部分空間

ベクトル空間の部分集合がそれ自身上記のような線形性をもつ場合、その部

分集合のことを部分空間と呼ぶ。 xy 平面において原点を通る直線は部分空間であり、 xyz 空間において原点を通る平面は部分空間である。 xy 平面の第 1 象限や、 xyz 空間における原点を通らない平面などは部分空間にならない。

2つの部分空間の共通部分も部分空間となるが、一方がもう一方に完全に含まれている場合を除き、合併集合は部分空間とはならない。

n 次元列ベクトル空間、 n 次元行ベクトル空間およびそれらの部分空間のことを総称して数ベクトル空間と呼ぶ。

この章ではベクトル空間として数ベクトル空間を考えるが、一般のベクトル空間についてあてはまる事柄も多い。

同次連立 1 次方程式の解空間

$m \times n$ 型の行列 A を係数行列とする同次連立 1 次方程式

$$Av = \mathbf{0}$$

の解の全体である

$$W_A = \{v \mid Av = \mathbf{0}\}$$

は \mathbf{R}^n の部分空間となる。これを同次連立 1 次方程式の解空間と呼ぶ。

定数項ベクトルが零ベクトルでないような、一般の連立 1 次方程式の解の全体は部分空間とならない。

生成元

\mathbf{R}^n のいくつかのベクトル v_1, v_2, \dots, v_k を考えたとき、これらの実数倍の和のことを 1 次結合と呼び、1 次結合の全体である

$$V = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbf{R}\}$$

は \mathbf{R}^n の部分空間となる。これを v_1, v_2, \dots, v_k の生成する（張る）部分空間と呼び、 v_1, v_2, \dots, v_k のことを V の生成元と呼ぶ。 v_1, v_2, \dots, v_k の生成する部分空間のことを

$$W\{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$$

などと書き表す。

同次連立 1 次方程式の一般解 v は、基本解と呼ばれるいくつかのベクトル v_1, v_2, \dots, v_k によって

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \quad (a_1, a_2, \dots, a_k \text{ は任意実数})$$

と書き表されるので、解空間は基本解によって生成されていることになる。

例題 1.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - 4z = 0 \right\}$$

は \mathbf{R}^3 の部分空間であることを示せ.

解答 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbf{R}$ とする. このとき

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 4z_1 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x_2 + y_2 - 4z_2 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立する. これらのベクトルの和と実数倍を成分で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}$$

となるが, ここで

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 4(z_1 + z_2) = 0$$

$$k \times \textcircled{1} \text{ より } 2(kx_1) + ky_1 - 4(kz_1) = 0$$

が成立することがわかるので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W$$

となり, W は \mathbf{R}^3 の部分空間である.

例題 2.

次の集合は \mathbf{R}^n の部分空間であるかどうか確かめよ.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 = 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1 a_2 = 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid 2a_1 - a_2 = a_n \right\},$$

$M_4 = M_1 \cup M_3$, $M_5 = M_1 \cap M_3$. ただし $n \geq 3$ とする.

解答 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_1$ ならば $a_1 + a_2 = 0, b_1 + b_2 = 0$ だから,

和 $\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ と実数倍 $\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ も条件 $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0$,

$ka_1 + ka_2 = 0$ を満たすので M_1 に属する. よって M_1 は部分空間である.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_2 \text{ だが和 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は } M_2 \text{ に属さないから } M_2 \text{ は部分空}$$

間でない.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_3 \text{ ならば } 2a_1 - a_2 = a_n, 2b_1 - b_2 = b_n \text{ だか}$$

$$\text{ら和} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \text{と実数倍} \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} \text{も条件 } 2(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) =$$

$a_n + b_n, 2(ka_1) - ka_2 = ka_n$ を満たすので M_3 に属する. よって M_3 は部分空間である.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_3 \text{ だが, 和} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \notin M_1 \cup M_3. \text{ よって } M_4$$

は部分空間でない.

$u, v \in M_5$ ならば $u, v \in M_1$ かつ $u, v \in M_3$. M_1 と M_3 は部分空間だから $u + v \in M_1$ かつ $u + v \in M_3$ で, $k \in \mathbf{R}$ に対し $ku \in M_1$ かつ $ku \in M_3$. よって $u + v, ku \in M_1 \cap M_3$ となり $M_5 = M_1 \cap M_3$ は部分空間である.

例題 3.

次の関係が成り立つかどうか調べよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

解答 (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ となる数 a, b を求めてみる.

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2 \\ a + 4b = 3 \end{cases} \text{ を解くと } a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{4}{5} \text{ となる.}$$

よって $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ となるから

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ となる数 } a, b \text{ を求めてみる.}$$

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2 & \cdots \cdots \text{ ①} \\ a + 4b = 1 & \cdots \cdots \text{ ②} \\ 5a + 7b = 6 & \cdots \cdots \text{ ③} \end{cases}$$

①と②より $a = 1, b = 0$ となる. この a, b は③を満たさない.

$$\text{よって } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ となる } a, b \text{ は存在しないから}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \text{ は成り立たない. すなわち}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

A

1. 次の集合は \mathbf{R}^2 の部分空間であるかどうか確かめよ.

$$(1) S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\} \quad (2) S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 1 \right\}$$

$$(3) S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = x^2 \right\} \quad (4) S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 \leq 0 \right\}$$

2. 次の集合は \mathbf{R}^3 の部分空間であるかどうか確かめよ.

$$(1) S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y \geq z \right\} \quad (2) S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3} \right\}$$

$$(3) S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{-3} \right\}$$

$$(4) S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y - z = 0, \\ y + 2z = 0 \end{array} \right\} \quad (5) S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y = 0, \\ y + z - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(6) S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y^2 + z^2 = 2yz \right\} \quad (7) S_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 = z^2 \right\}$$

3. A を $m \times n$ 型の行列とすると、 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ は \mathbf{R}^n の部分空間であることを表せ。

4. 次の集合は \mathbf{R}^n の部分空間であるかどうか確かめよ。

$$(1) S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n ix_i = 0 \right\} \quad (2) S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \right\}$$

$$(3) S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\} \quad (4) S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_4, \\ \dots, \\ x_{n-1} = x_n \end{array} \right\} \quad (n \text{ は偶数})$$

5. 次の関係が成り立つかどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

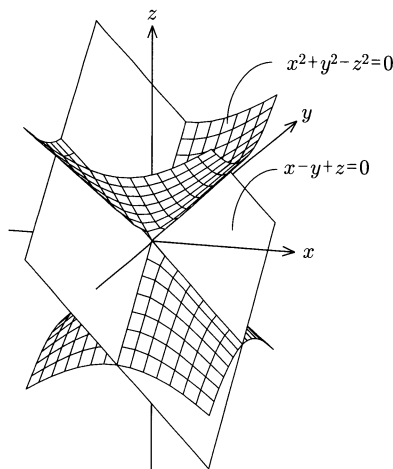
6. 次の部分空間を図示せよ.

$$(1) W \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(4) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (5) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

B

1. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, x - y + z = 0 \right\}$ は \mathbf{R}^3 の部分空間か.



2. 平行四辺形は1つの対角線によって面積の等しい2つの三角形に分割される.

(1) 平行六面体は体積の等しい6つの四面体に分割されることを示せ.

(2) 平行六面体の4次元版, すなわち1次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^4$ に対し

$$S = \{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c} + v\mathbf{d} \in \mathbf{R}^4 \mid 0 \leq s, t, u, v \leq 1\}$$

は四面体の4次元版のもの, すなわち

$$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c} + v\mathbf{d} \in \mathbf{R}^4 \mid s + t + u + v \leq 1, 0 \leq s, t, u, v\}$$

と体積の等しいような, いくつかの部分に分割されるか調べよ.

A の解答

1. (1) 条件式 $x + y = 0$ は原点を通る直線を表すから、 S_1 は部分空間である。

$$(S_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{である.})$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2 \text{ より } S_2 \text{ は部分空間でない.}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_3 \text{ だが } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S_3$$

なので S_3 は部分空間でない。

$$(4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_4 \text{ だが } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_4$$

なので S_4 は部分空間でない。

$$2. (1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_1 \text{ だが } (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_1 \text{ なので } S_1 \text{ は部分空間ではない.}$$

(2) 条件式は原点を通る直線を表しているので S_2 は部分空間である。

$$(S_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{となる.})$$

$$(3) \text{条件式は原点を通らない直線を表しているので } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_3. \text{ よって } S_3$$

は部分空間でない。

(4) 条件式は原点を通る平行でない2平面の共通部分を表しているので原点

$$\text{を通る直線となり, } S_4 \text{ は部分空間である. } (S_4 = W \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{となる.})$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_5 \text{ なので } S_5 \text{ は部分空間でない. (注: 条件式は原点を通る平面と原点を通らない平面との共通部分を表しているから原点を通らない直線を表している.)}$$

(6) $y^2 + z^2 = 2yz \iff y = z$ なので条件式は原点を通る平面を表している。

よって S_6 は部分空間である. ($S_6 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ となる.)

$$(7) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_7 \text{ だが } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_7$$

なので S_7 は部分空間でない.

3. $Ax = 0, Ay = 0$ とすれば $A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$,
 $A(kx) = kAx = k \cdot 0 = 0$.

よって $x, y \in \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax = 0\}$, $k \in \mathbf{R}$ ならば

$$x+y, kx \in \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax = 0\}$$

となるから $\{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax = 0\}$ は \mathbf{R}^n の部分空間である.

$$4. (1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S_1, k \in \mathbf{R} \text{ とすると } \sum_{i=1}^n ix_i = 0, \sum_{i=1}^n iy_i = 0.$$

このとき, 和 $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ と実数倍 $\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$ も $\sum_{i=1}^n i(x_i+y_i) = 0$,

$\sum_{i=1}^n i(kx_i) = 0$ を満たすから S_1 に属する. よって S_1 は部分空間である.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S_2 \text{ だが } (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2 \text{ なので } S_2 \text{ は部分空}$$

間でない.

$$(3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_3 \text{ より } S_3 \text{ は部分空間でない.}$$

$$(4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S_4, k \in \mathbf{R} \text{ とすれば } x_1 = x_2, x_3 = x_4, \dots,$$

$$x_{n-1} = x_n, y_1 = y_2, y_3 = y_4, \dots, y_{n-1} = y_n \text{ を満たすから和 } \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{と実数倍 } \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} \text{ も } x_1 + y_1 = x_2 + y_2, x_3 + y_3 = x_4 + y_4, \dots,$$

$x_{n-1} + y_{n-1} = x_n + y_n, kx_1 = kx_2, kx_3 = kx_4, \dots, kx_{n-1} = kx_n$ を満たす. よって S_4 は部分空間である.

$$5. (1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より } W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{だから } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \notin W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ となる数 } a, b, c \text{ を}$$

$$\text{求めてみる. 連立1次方程式 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を解けば

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

よって, t は任意だから例えば $t=0$ のときの $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を使って

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と表せるので

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(3) (2) \text{ と同様な方法で } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{19}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{7}{19} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4) (2) と同様な方法で

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ となる数}$$

a, b, c, d が存在するかどうか調べる. この連立1次方程式の拡大係数行列を簡

約行列に変形すると

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

となるので、このような a, b, c, d は存在しない。よって

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

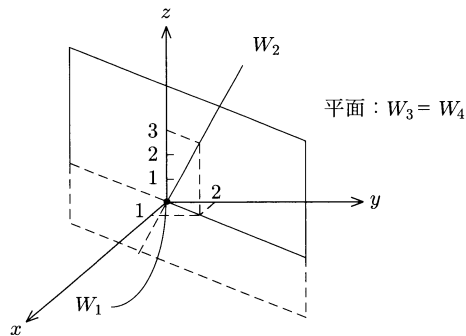
6. (1)~(5) の部分空間を順に $W_1 \sim W_5$ とする。ベクトルと位置ベクトルの終点を対応させて図示する。 W_1 は原点に対応する。 W_2 は原点を通る直線に対応する。 W_3 は原点を通る平面に対応する。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より $W_4 = W_3$ となる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x-3y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから W_5 は xyz 空間に対応している。よって $W_1 \sim W_4$ を図示すると次のようになる。



B の解答

$$1. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x - y + z = 0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より $x = y - z$, ①より $x^2 + (y + z)(y - z) = 0$ にこれを代入すると $(y - z)^2 + (y + z)(y - z) = 0$, すなわち $2y(y - z) = 0$. よって

$$y = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

もしくは

$$y - z = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③の時は, ①は $x^2 - z^2 = 0$, ②は $x + z = 0$ で, ②が成立すれば①も成立するので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad (a \text{ は任意}), \quad \text{特に} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W.$$

④の時は, ②は $x = 0$. すると①は $y^2 - z^2 = 0$ で, ④が成立すれば①も成立するので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} \quad (b \text{ は任意}), \quad \text{特に} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W.$$

W が部分空間なら

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

となるはずだが, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は①の条件を満たさない. よって W は部分空間で

はない.

2. (1) 平行六面体の1つの頂点を固定する. その頂点を含まない面が3つある. それら3つの面の各々と固定された頂点で錐を作るとよい. 平行六面体はこれら3つの錐に分割され, さらに問題の前置きにした平行四辺形の分割により各錐は2つの四面体に分割される.

(2) (1)の考えを式を頼りに応用するとよい. 例えば S において固定する頂点を $s = t = u = v = 0$ としたとき, $s = 1, 0 \leq t, u, v \leq 1$ はこれに含まない1つの3次元面(平行六面体)である. このような3次元面が4つ存在することに注意すれば答は24個である.

4.2 次元と基底・1次独立性

次元と基底

点を0次元，直線を1次元，平面を2次元，空間を3次元というが，この次元という概念はベクトル空間の広がり程度を表している．点は広がりをもたず，直線は1方向に広がっており，平面はある直線方向とさらにもう1つ別の方向に広がっていると考えられ，空間は3方向への広がりをもつ．

直線上に原点を定め，直線上のベクトル \mathbf{v}_1 を1つ決めれば，その直線上の点の位置を実数値で表すことができる．このようにして定義するのが数直線だが，このとき，任意の点の位置ベクトル \mathbf{v} は \mathbf{v}_1 を単位として

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1$$

と表され， a が位置を表す実数値，すなわち座標成分ということになる．そして直線の場合はこの1つの数値で点の位置が定まるので，広がり程度は1方向，つまり，1次元であるということになる．

平面の場合も，2つの座標軸を導入することで点の位置を2つの実数値の組で表すことができるが，この場合も，2つの座標軸の単位になるベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を決めて

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$$

のようにして平面上の点の位置ベクトルを表すときの a_1, a_2 が座標成分ということになる，平面上の点を表すにはどうしても2方向考えなくてはならず，しかも2方向で十分なので，広がり程度は2方向，つまり2次元であるということになる．

これを一般化して考えてみると，ベクトル空間の広がり程度を表す次元という値は，いくつの座標軸を導入して考えなくてはいけないか，言い換えると，座標軸の単位になるベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ をいくつ導入すれば，そのベクトル空間のすべてのベクトルを

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$$

のように表せるか，その必要かつ十分な個数 n を意味しているのだ．

ここで考えた座標軸の単位になるベクトルのことを基底ベクトルと呼ぶ．ベクトル空間 V の基底とは，そのベクトル空間のすべてのベクトル \mathbf{v} を上のように1次結合で表すために必要なベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ のことである．すなわち，ベクトル空間の生成元であって，どれか1つでも欠けるとベクトル空間全体を表すことが出来ないようなベクトルの組のことである．

ベクトル空間 V に対して，基底になるベクトルの組は何組も考えることができるが，基底を構成するベクトルの個数である次元の値は1つに定まることを

証明できる. V の次元 (dimension) の値は $\dim V$ と書く,

n 次元列ベクトル空間・行ベクトル空間の次元は,

$$\dim \mathbf{R}^n = \dim \mathbf{R}_n = n$$

である. 基本単位ベクトルの組 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbf{R}^n の基底である. この基底を \mathbf{R}^n の標準基底という.

$m \times n$ 型の行列 A を係数行列とする同次連立1次方程式 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の解空間 W_A の次元は

$$\dim W_A = n - \text{rank } A$$

である. 先に述べた基本解とは, 解空間の基底のことである.

いくつかのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ によって生成された部分空間 $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ の次元は, これらのベクトルを並べてできる行列を

$$A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k)$$

としたとき

$$\dim W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{rank } A$$

となる. 基底については後述の定理2を参照せよ.

1次独立性・1次従属性

ベクトル空間の基底となるベクトルの組は, そのベクトル空間を生成することの他に, 1つでも欠けると全体を生成出来ないことが条件であった. それはベクトル空間の広がり度を考えるにあたって, 余分な座標軸が1つもないことを意味する. 余分であるとは, その座標軸の基底ベクトルがなくてもベクトル空間を生成できるということである. 考えているベクトルの組を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ として, 余分なベクトルを \mathbf{v}_i とすると, 考えているベクトルの組からこれを除いた残りのベクトルでもベクトル空間を生成できているため, \mathbf{v}_i が, それら残りのベクトルの1次結合で表せることになる. 逆に言えば, 余分なベクトルがないとは, どのベクトルも, それを除いた残りのベクトルの1次結合としては表せないという状況ということになる.

あるベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ について, どのベクトルもそれ以外のベクトルの1次結合として表せないことを1次独立といい, どれかのベクトルがそれ以外のベクトルの1次結合として表せることを1次従属という.

1次独立性・1次従属性を正確に考えるために, ベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ に対していくつか用語の定義を列挙する.

1 次結合

すでに説明しているが、ベクトルの実数倍の和

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

のことを1次結合という。

1 次関係式

1次結合が零ベクトルになる場合、考えているベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ の間には何らかの関係が成立していると考えられる。この関係式

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

のことを1次関係式という。

自明な1次関係式

係数がすべて0である1次関係式は実際には何の関係も表していない。どんなベクトルの組を考えても、係数をすべて0にすればその1次関係式

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

は必ず成立するので、これを自明な1次関係式と呼ぶ。

非自明な1次関係式

自明な1次関係式以外の1次関係式のことを非自明な1次関係式と呼ぶ。

1 次従属性

ベクトルの組に対して非自明な1次関係式が成立する場合、それらのベクトルの組は1次従属であるという。上に書いたように、どれかのベクトルがそれ以外のベクトルの1次結合として表せる。

1 次独立性

1次従属ではないベクトルの組を1次独立であるという。つまり、非自明な1次関係式が全く成立しない、言い換えると、成立する1次関係式は自明なものに限るようなベクトルの組のことである。上に書いたように、1次独立なベクトルの組では、どのベクトルもそれ以外のベクトルの1次結合として表せない。

独立最大数

n 個のベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ に対して、その中から最大いくつのベクトルを1次独立なものとして取り出せるか、その最大個数を独立最大数と呼ぶ。また、1次独立になるように最大限多く取り出したベクトルの組を独立最大の組と呼ぶ。独立最大数が n となることとベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が1次独立であることは同値である。

独立最大の組に関しては次の定理が成立する.

定理 1. ベクトルの組から取り出した独立最大の組によって、もとのベクトルの組に含まれる残りのベクトルは独立最大の組のベクトルの1次結合で表せる.

逆に、与えられたベクトルの組から1次独立なベクトルの組を取り出して、残りのベクトルをその1次結合で表せたとすると、それが独立最大の組である.

定理 2. ベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ から取り出した独立最大の組は $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ の基底となり、独立最大数が $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ の次元となる.

具体的に独立最大数や独立最大の組を求めるには次の定理を利用すればよい.

定理 3. ベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を並べてできる行列を $A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$ とする. これを行の基本変形で階段行列に変形した場合、 $\text{rank } A$ を決めることになる各行最初の0でない成分である1を含む列と同じ列番号の A の列ベクトルの組が独立最大の組であり、独立最大数は $\text{rank } A$ と一致する.

このことから次の定理も証明される.

定理 4. 行列 A を行の基本変形によって階段行列 B に変形する場合、途中経過は異なっても、最終的に得られる階段行列 B はただ1つに確定する.

さらに、独立最大数に関連して次のような定理も成り立つ.

定理 5. 行列 A の列ベクトルの生成する部分空間の次元および行ベクトルの生成する部分空間の次元は、 A の階数 $\text{rank } A$ と一致する.

そして転置行列の行ベクトルはもとの行列の列ベクトルを横にしただけであるから、次のような定理が成り立つ.

定理 6. $\text{rank } {}^t A = \text{rank } A$

例題 1.

次の \mathbf{R}^3 のベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が1次独立か1次従属か判定せよ. さらに1次従属の場合には自明でない1次関係式を例示せよ.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解答 定理3より行列 $(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$ を行の基本変形で階段行列にして判定する.

$$(1) \left(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となる.}$$

$\text{rank} \left(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \right) = 2 < 3$ よりベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は1次従属で,
 $\mathbf{a}_3 = -\frac{1}{7}\mathbf{a}_1 + \frac{5}{7}\mathbf{a}_2$ より $\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_2 + 7\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

$$(2) \left(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{となる.}$$

$\text{rank} \left(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \right) = 3$ よりベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は1次独立である.

例題 2.

$$W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{の基底と次元を求めよ.}$$

解答 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ よりベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{は基底である. そして次元は3である.}$$

例題 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{とする. 連立1次方程式 } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解空間}$$

$$W_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

の基底と次元を求めよ.

解答
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の解は}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$

である。よって W_A の基底の1つとしてベクトルの組 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ があ

り、 $\dim W_A = 2$ である。

A

1. 次のベクトルの組は1次独立か1次従属か判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 次のベクトルの組が1次独立であるための a の条件を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

3. \mathbf{R}^3 のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を次の通りとする.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) ベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が 1 次従属となるように a の値を求めよ. さらにそのときの自明でない 1 次関係式を求めよ.

(2) $a = 8$ のとき, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の張る平行六面体の体積を求めよ.

(3) $\mathbf{a}_3 \in W\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ となるときの, \mathbf{a}_3 を \mathbf{a}_1 と \mathbf{a}_2 の 1 次結合で表せ.

(4) $a = 4$ のとき, $\mathbf{a}_1 \in W\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が成り立つかどうか判定せよ. 成り立つ場合, \mathbf{a}_1 を \mathbf{a}_2 と \mathbf{a}_3 の 1 次結合で表せ.

4. (1) 同次連立 1 次方程式
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$$
 を解け.

(2) \mathbf{R}^n の 1 次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対し, $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = -4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ とおく. このとき $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ は 1 次独立か 1 次従属かを (1) を用いて調べよ.

5. \mathbf{R}^n のベクトルの組 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 1 次独立とする ($n \geq 3$).

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} = \beta\mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{z} = \gamma\mathbf{c}$$

とおくとき, ベクトルの組 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ が 1 次従属であるための α, β, γ がみたす条件を求めよ.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ が正則か否かを調べることにより, A の 3 個の

列ベクトルの組が 1 次独立かを判定せよ.

7. 次のベクトルの組の独立最大数を求めよ. またその独立最大の組を選べ.

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

8. 次の部分空間の基底と次元を求めよ.

$$(1) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -38 \\ -29 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 38 \\ -21 \\ 68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ -13 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -47 \\ 91 \end{pmatrix} \right\}$$

9. 次の連立1次方程式の解空間の基底と次元を求めよ.

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 0 \\ -2x + 3y - 13z + 2u = 0 \\ 3x + 3y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

10. \mathbf{R}^4 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

$$W_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とする. このとき $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

B

1. 3個のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が1次独立であり, 4個のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ が1次従属になるとき, \mathbf{v} は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の1次結合として表されることを示せ.

2. 行基本変形の仕方にかかわらず, 階段行列はただ一通りに定まる. 理由を考えよ.

3. $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ は n 次元数ベクトル空間 \mathbf{R}^n の基底で, $\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{a}_i$ ($j =$

$2, \dots, n$) とする. $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ が \mathbf{R}^n の基底となるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

であることを示せ.

4. p, q を異なる素数とするとき

$$1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}$$

は有理数体 \mathbf{Q} 上 1 次独立であること, すなわち $a \cdot 1 + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} = 0$ をみたす有理数 a, b, c, d は $a = b = c = d = 0$ に限ることを示せ.

A の解答

1. (1) $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$ より 1 次独立である.

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より 1 次従属である.

(3) $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$ より 1 次独立である.

(4) $\text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 < 3$ より 1 次従属である.

(5) $\text{rank} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$ より 1 次独立である.

(6) $\text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 < 4$ より 1 次従属である.

2. (1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a - 2 \neq 0$ より, $a \neq \frac{2}{3}$.

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 3 \neq 0 \text{ より, } a \neq 3.$$

$$3. (1) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -7 \\ 4 & -3 & a \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-7 \end{pmatrix}$$

よりベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が1次従属となるのは $a = 7$ のときである. このとき $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ より $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ である.

(2) $a = 8$ のとき $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = 26$ だから, 平行六面体の体積は 26 である.

(3) $\mathbf{a}_3 \in W\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ となるとき, (1) より $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

(4) $a = 4$ のときベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は1次独立だから, $\mathbf{a}_1 \notin W\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ である.

$$4. (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(2) $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{0}$ とする. $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = -4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を代入して整理すると $(\alpha + 2\beta - 4\gamma)\mathbf{a} + (2\alpha - 2\beta + \gamma)\mathbf{b} + (-3\alpha + 2\beta)\mathbf{c} = \mathbf{0}$ となる. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は1次独立だから $\alpha + 2\beta - 4\gamma = 0$, $2\alpha - 2\beta + \gamma = 0$, $-3\alpha + 2\beta = 0$ となる. α, β, γ は (1) の非自明解, たとえば $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ をとれば, $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w} = \mathbf{0}$ となり $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ は1次従属である.

$$5. c_1 \mathbf{x} + c_2 \mathbf{y} + c_3 \mathbf{z} = \mathbf{0} \iff (c_1 \alpha)\mathbf{a} + (c_1 + c_2 \beta)\mathbf{b} + (c_1 + c_2 + c_3 \gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ は1次独立だから連立1次方程式 } \begin{cases} \alpha c_1 & = 0 \\ c_1 + \beta c_2 & = 0 \\ c_1 + c_2 + \gamma c_3 & = 0 \end{cases} \text{ が成り立つ. こ}$$

$$\text{の方程式が } c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ でない解をもつための条件は } \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

よって求める条件は $\alpha\beta\gamma = 0$, すなわち $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ または $\gamma = 0$.

$$6. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \text{ より } A \text{ は正則である. よって } A \text{ の3個}$$

の列ベクトルの組は1次独立である.

$$7. (1) \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より独立最大数は2で, \mathbf{a}, \mathbf{b} は独立最大の組である.

$$(2) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より独立最大数は3で, } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \text{ は独立最大の組}$$

である.

$$8. (1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ よりベクトルの組 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ は基底で, 次元は2である.}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ よりベクトルの組}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は基底で, 次元は2である.}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & -38 & 38 & 19 & 16 \\ 3 & -29 & -21 & -13 & -47 \\ 0 & 9 & 68 & 31 & 91 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よりベクトルの組 } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -38 \\ -29 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 38 \\ -21 \\ 68 \end{pmatrix} \text{ は基底で, 次元は3である.}$$

9. (1) 連立1次方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である.

よって解空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で、次元は1である.

(2) 連立1次方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である.

よって解空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で、次元は1である.

10. W_1 の条件式の解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t_1, t_2 は任意

定数) である. よって $W_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ となり、基底は

$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、次元は2である.

W_2 について

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より W_2 の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ で、次元は } 3 \text{ である.}$$

$x \in W_1 \cap W_2$ ならば

$$x = a_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表される.

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ を解くと、解は}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}). \text{ よって}$$

$$x = a_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{となるから } W_1 \cap W_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ 従って基底は } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 次元は } 1$$

である.

B の解答

1. a, b, c, v が 1 次従属だから非自明な 1 次関係式

$$pa + qb + rc + sv = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ. ここで $s = 0$ であれば $pa + qb + rc = 0$ が成立することになる

が $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が 1 次独立なので $p = q = r = 0$ となり, ①が非自明な 1 次関係式であることに矛盾する. よって $s \neq 0$ から

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{p}{s}\right) \mathbf{a} + \left(-\frac{q}{s}\right) \mathbf{b} + \left(-\frac{r}{s}\right) \mathbf{c}$$

となり, 結論が示された.

2. 行列 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ から基本変形を繰り返して行列 $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n)$ になったとする. これらの行列を係数行列とする同次連立 1 次方程式の解は完全に一致するから, ベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の間に成り立つ 1 次関係式と全く同じ係数の 1 次関係式がベクトルの組 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ の間にも成り立つことになる.

また, 簡約な行列においては, 各行の最初の 0 でない成分が 1 (先頭の 1) であり, 先頭の 1 を含む列ベクトルは基本単位ベクトル (先頭の 1 以外の成分が 0) である. よって, 先頭の 1 を含まない列ベクトルは, 自分よりも前にある先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で一意的に表されることになる. このとき, 1 次結合の係数は, 今考えている列ベクトルの成分であることに注意せよ.

さて, A から基本変形で 2 つの異なる簡約な行列 B, C に簡約化されたとする. このとき, B と $C = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n)$ の各列が最初に異なる列番号を j とし, \mathbf{b}_j が先頭の 1 を含む列であるか否かで場合分けする.

先頭の 1 を含む列ベクトルである場合:

\mathbf{b}_j と \mathbf{c}_j は異なるため, \mathbf{c}_j は先頭の 1 を含まない列ベクトルということになる. しかし, この場合 \mathbf{c}_j は $j-1$ 列までの先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で表されることになり, \mathbf{b}_j は先頭の 1 を含む列ベクトルであるため $j-1$ 列までの先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で表すことはできない. よって矛盾が生じる.

先頭の 1 を含まない列ベクトルである場合:

\mathbf{c}_j が先頭の 1 を含む列ベクトルである場合は \mathbf{b}_j と \mathbf{c}_j の役割を交代して考えることにより, 矛盾が生じることになる. よって, \mathbf{c}_j も先頭の 1 を含まない列ベクトルであって, その成分が \mathbf{b}_j と異なるという状況で考えればよい. この場合, \mathbf{b}_j も \mathbf{c}_j も $j-1$ 列までの先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で表されることになる. ここで, それぞれの 1 次結合の係数は $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j$ の成分である. これらの式を 1 次関係式と見たとき, B, C の列ベクトルの間に成り立つ 1 次関係式は全く同じ係数になるのだから, \mathbf{b}_j と \mathbf{c}_j の成分が異なるのは矛盾である.

よって, いずれの場合もあり得ないのだから, B, C は各列ベクトルがすべて一致する, すなわち, $B = C$ であることがわかった.

$$3. P = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{とおけば } (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n)P$$

と表せる. ここで $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ が \mathbf{R}^n の基底 $\iff (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n)$ が正則

$$\iff P \text{ が正則} \iff \begin{vmatrix} p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ であるから, 結果が得られる.}$$

$$4. a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbf{Q}) \text{ とすると}$$

$$a + b\sqrt{p} = \sqrt{q}(-c - d\sqrt{p}).$$

ここで $c + d\sqrt{p} = 0$ とすると $a + b\sqrt{p} = 0$ となるが \sqrt{p} は無理数だから

$$a + b\sqrt{p} = 0 \iff a = b = 0$$

$$c + d\sqrt{p} = 0 \iff c = d = 0$$

であるから $a = b = c = d = 0$ となる.

$c + d\sqrt{p} \neq 0$ であれば

$$\sqrt{q} = \frac{a + b\sqrt{p}}{-c - d\sqrt{p}} = r + s\sqrt{p} \quad (r, s \in \mathbf{Q})$$

であるが, $\sqrt{q}, \sqrt{\frac{q}{p}}$ は無理数だから $r \neq 0, s \neq 0$. よって

$$q = (r^2 + s^2p) + 2rs\sqrt{p}$$

で \sqrt{p} が有理数となり矛盾.

4.3 線形写像と表現行列

線形写像・線形変換 (1 次変換)

集合 A の各要素に対し、集合 B の要素が 1 つ対応しているとき、この対応のことを A から B への写像と呼び

$$f: A \rightarrow B$$

などと書く。 A の要素 a に対応する B の要素は $f(a)$ と表す。

2 つのベクトル空間 V, W の間の写像

$$f: V \rightarrow W$$

が、線形性と呼ばれる次の条件

$$v, w \in V \text{ に対して, } f(v + w) = f(v) + f(w)$$

$$v \in V, k \in \mathbf{R} \text{ に対して, } f(kv) = kf(v)$$

をみたすとき、これを線形写像と呼ぶ。ベクトルの和や実数倍をそのまま対応させるような写像のことである。

たとえば xy 平面上の点を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転させるような写像は線形写像となるし、 xyz 空間の各点から最短距離にある xy 平面上の点を対応させるような写像は線形写像となる。しかし、 xy 平面上の点を x 軸方向へ 1 動かすような写像は線形写像ではない。

自分自身への線形写像のことを線形変換 (1 次変換) とも呼ぶ。

表現行列

$m \times n$ 型の行列 A に対して、 $f_A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ を

$$f_A(v) = Av$$

と定義すると、 f_A は線形写像となる。逆に、 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への線形写像 f は

$$f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$$

を並べてできる行列を A とし、 $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と置けば

$$f(v) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 f(\mathbf{e}_1) + a_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_n f(\mathbf{e}_n) \\
 &= (f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2) \ \cdots \ f(\mathbf{e}_n)) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A\mathbf{v}
 \end{aligned}$$

によって $f = f_A$ となることがわかる。 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m へのどんな線形写像も、行列を掛ける形に表せるわけだ。このとき A をこの線形写像 f の表現行列と呼ぶ。

一般に、2つの線形写像

$$g: U \rightarrow V, \quad f: V \rightarrow W$$

の合成写像

$$f \circ g: U \rightarrow W$$

も線形写像となるが、 f, g の表現行列が A, B であるとき、合成写像 $f \circ g$ の表現行列はこれらの積 AB となる。

平面上の点を原点中心として反時計回りに角 θ だけ回転させる線形変換は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

で表現される。また、 x 軸を、原点中心にして反時計回りに角 θ だけ回転させた直線を l とするとき、 l に関する対称移動の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

である。

核と像

線形写像 $f: V \rightarrow W$ に関しては必ず $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となる。 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{v} \in V$ の全体である

$$\text{Ker } f = \{\mathbf{v} \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

を f の核 (kernel) と呼ぶ。 $\text{Ker } f$ は V の部分空間である。

また、 V のベクトルが f によって対応する W のベクトルの全体である

$$\text{Im } f = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$$

を f の像 (image) と呼ぶ。 $\text{Im } f$ は W の部分空間である。

$m \times n$ 型の行列 A を係数行列とする同次連立1次方程式の解空間 W_A は A を表現行列とする線形写像 f_A の核となる。すなわち $W_A = \text{Ker } f_A$ である。

いくつかのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ によって生成される部分空間 $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ は、これらのベクトルを並べてできる行列を

$$A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_k)$$

としたときの f_A の像である。すなわち $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{Im } f_A$ である。

$m \times n$ 型の行列 A を表現行列とする線形写像を f_A とし、その列ベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ とすると、 $\text{Ker } f_A = W_A$ および $\text{Im } f_A = W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ であったから

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker } f_A) + \dim(\text{Im } f_A) &= \dim W_A + \dim W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \\ &= (n - \text{rank } A) + \text{rank } A = n \end{aligned}$$

となるが、これを一般化すると次の定理にまとめられる。

定理 1. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ について

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$$

が成立する。

$\dim(\text{Im } f)$ のことを線形写像 f の階数といい、 $\text{rank } f$ と書く。

座標ベクトル

ベクトル空間 V に基底を 1 組考え、 V の任意のベクトルをその基底の 1 次結合によって書き表すとき、その係数である座標成分の組はただ 1 つに定ま

る。このとき、座標成分を並べた数ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ のことを座標ベクトルと

呼ぶ。

V のベクトルと座標ベクトルの対応関係はお互いに 1 対 1 の線形写像になっており、これによって V を座標ベクトルの列ベクトル空間 \mathbf{R}^n と同一視できる。

一般の線形写像 $f: V \rightarrow W$ でも、 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への線形写像の場合と同様の表現行列を考えることができる。そのため、 V, W にそれぞれ基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ と $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ を取って考えよう。それぞれのベクトル空間のベクトルを基底の 1 次結合で表すことができるので、それによる座標ベクトルの列ベクトル空間 $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ と V, W をそれぞれ同一視して考えると、 $f: V \rightarrow W$ はこの同一視によって $\tilde{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ という線形写像と考えることができるようになる。この線形写像 \tilde{f} の表現行列のことを f の (これらの基底に関する) 表現行列と呼ぶ。

基底の変換行列

別の基底を考えると表現行列も変わるが、そこには一定の法則がある。

v'_1, v'_2, \dots, v'_n を V のもう 1 組の基底とすると、これらは v_1, v_2, \dots, v_n の 1 次結合で表されるので

$$(v'_1 \ v'_2 \ \cdots \ v'_n) = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)P$$

となる n 次正方行列 P が定まる。この P を基底の変換行列と呼ぶ。基底の変換行列は正則である。

基底の変換行列 P によって、座標ベクトルの対応関係がわかる。 V の 1 つのベクトルに対し、基底 v_1, v_2, \dots, v_n による座標ベクトルを \tilde{v} 、基底 v'_1, v'_2, \dots, v'_n による座標ベクトルを \tilde{v}' するとき、これらの間には

$$\tilde{v} = P\tilde{v}'$$

という関係がある。

同様に W にもう 1 組の基底 w'_1, w'_2, \dots, w'_m を考えて基底の変換行列を Q とすると、今考えている線形写像 $f: V \rightarrow W$ を V, W の基底 v'_1, v'_2, \dots, v'_n と w'_1, w'_2, \dots, w'_m によって表現した行列 B は

$$B = Q^{-1}AP$$

となる。

例題 1.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 A, B が表す変換はどんな働きをする変換であるか図形的に説明せよ。

解答 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$. ここで $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$

とおけば $x \cos \theta - y \sin \theta = r \cos(\alpha + \theta), x \sin \theta + y \cos \theta = r \sin(\alpha + \theta)$.

よって A の表す変換は原点のまわりに θ だけ回転することである。

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{とおけば}$$

$$x + X = x(1 + \cos \theta) + y \sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$y + Y = x \sin \theta + y(1 - \cos \theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{y+Y}{2} = \tan \frac{\theta}{2} \frac{x+X}{2}.$$

よって点 (x, y) と点 (X, Y) の中点は原点を通り傾きが $\tan \frac{\theta}{2}$ の直線 ℓ 上に存在する. また

$$X - x = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$Y - y = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\therefore X - x + \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) (Y - y) = 0$$

すなわち $\begin{pmatrix} X - x \\ Y - y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ である.

よって点 (x, y) と点 (X, Y) は直線 ℓ に関し線対称の位置にあること, 言い換えると B の表す変換は直線 ℓ に関する線対称移動であることがわかる.

また

$$B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

より B の表す変換は x 軸に関して線対称移動をし, さらに原点のまわりに θ だけ回転したものであると考えることもできるし

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

より原点のまわりに $-\theta$ だけ回転し, さらに x 軸に関して線対称移動したものと考えてもよい.

例題 2.

- (1) 直線 $y = 2x$ に関する線対称移動を行列で表現せよ.
 (2) 直線 $2x + 3y = 1$ を (1) の線対称移動したときの図形の方程式を求めよ.

解答 (1) 点 (x, y) が点 (X, Y) にうつったとすると, 中点 $\left(\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2} \right)$

は直線 $y = 2x$ 上の点だから

$$\frac{y+Y}{2} = x+X \quad \text{すなわち} \quad -X + \frac{Y}{2} = x - \frac{y}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 (X, Y) は点 (x, y) を通る傾き $-\frac{1}{2}$ の直線上の点だから

$$Y - y = -\frac{1}{2}(X - x) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}X + Y = \frac{1}{2}x + y \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①と②より

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって(1)の行列は

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

である.

(2) (1) より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

だから $2x + 3y = 1$ に代入すると

$$2\left(-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y\right) + 3\left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y\right) = 1$$

すなわち $6X + 17Y = 5$. よって求める図形の方程式は $6x + 17y = 5$ である.**例題 3.**

線形写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + z \\ x - 2y + 3z \end{pmatrix}$ で定める. こ

のとき $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ の基底と次元を求めよ.

解答 $\begin{pmatrix} 2x + z \\ x - 2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解は } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意})$$

定数) であるから $\text{Ker } f$ の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ で、次元は 1 である。また上の変形

$$\text{より } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ は 1 次独立なので、} \text{Im } f \text{ の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

で、次元は 2 である。

例題 4.

\mathbb{R}^3 の 2 組の基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ と $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

- (1) 基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ から基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ への基底の変換行列を求めよ。
- (2) 基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ に関する座標成分が α, β, γ であるベクトルを求めよ。
- (3) (2) のベクトルの基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ に関する座標成分を求めよ。

解答 (1) $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} P$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 求めるベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 6\beta + 12\gamma \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma \\ \alpha + 3\beta + 7\gamma \end{pmatrix}$$

(3) 求める座標成分を x, y, z とすれば

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ \beta + 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

例題 5.次の線形写像の与えられた基底に関する表現行列 A を求めよ。

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^3 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^2 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

解答

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} \frac{25}{2} & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

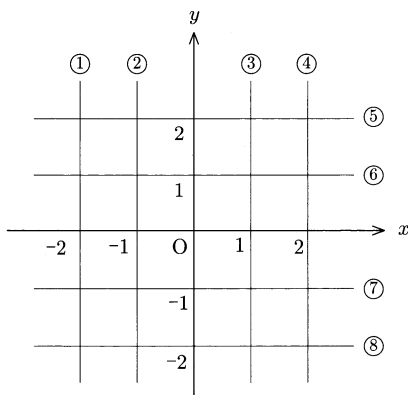
(別解)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{25}{2} & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A

1. 2×2 型の行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ による写像で, 12個のベクトル $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ (ただし $i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2$) はどのようなベクトルにうつるか. 位置ベクトルの終点を図示せよ.

2.



上図のタテヨコの直線を次の行列でうつしたときの図形を描け.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. 次の図形を直線 $y = 2x$ に関して線対称移動した図形の方程式を求めよ.

(1) 直線 $x + 2y = 3$ (2) 円 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

(3) 楕円 $\frac{(x - 2)^2}{4} + y^2 = 1$

4. 次の写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ は線形か否か, 理由をつけて答えよ. 線形ならばその表現行列を求めよ.

$$(1) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(2) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(3) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad (5) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

5. 線形写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

で定義するとき、 f の表現行列 A を求めよ。

6. 線形写像 $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$ をみたすとする。このとき T の表現行列 A を求めよ。

7. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ として、写像 $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ (外積) と

定める。次の間に答えよ。

(1) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, $T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$ (k は実数) を示せ。

(2) $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる行列 A を求めよ。

8. 直線 $y = kx$ に関する線対称移動を行列で表現せよ ($k \neq 0$)。

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき $f_A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の像を図示せよ。

10. 次の行列を表現行列とする線形写像 f の核の次元と像の次元を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 13 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

11. ベクトル空間 \mathbf{R}^2 において $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ が基底をなす

とき、次の間に答えよ。

(1) 実数 k についての条件を求めよ。

(2) 基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に関する $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の座標成分 (座標ベクトル) を求めよ。

12. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 次の間に答えよ。

(i) 基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ に関する座標成分が $1, -1$ であるベクトルの基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に関する座標成分 (座標ベクトル) を求めよ。

(ii) 基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に関する座標成分が $1, -1$ であるベクトルの基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に関する座標成分 (座標ベクトル) を求めよ。

(iii) 基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ から基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ への基底の変換行列を求めよ。

(iv) 基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ から基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ への基底の変換行列を求めよ。

(2) 線形写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2$ で定めるとき、次の間に答えよ。

(i) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ を求めよ。

(ii) f の基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に関する表現行列を求めよ。

(iii) f の基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ と $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に関する表現行列を求めよ。

(iv) f の基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ と $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に関する表現行列を求めよ。

13. 次の線形写像について指定された基底に関する表現行列を求めよ。

$$(1) f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - 4y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^2 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}^3 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^3 \text{の基底} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathbf{R}^2 \text{の基底} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$(3) f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^3 \text{の基底} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

B

1. 次の条件をみたす \mathbf{R}^3 から \mathbf{R}^3 への線形写像の表現行列を求めよ.

(1) yz 平面に関する面対称移動 (2) z 軸のまわりの θ 回転

(3) x 軸を x 軸に, y 軸を y 軸に, z 軸を z 軸にうつす線形写像 (一般形)

(4) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし, 各々のベクトルを方向

ベクトルとする原点を通る直線を l, m, n とする. x 軸を l に, y 軸を m に, z 軸を n にうつす線形写像 (一般形)

(5) x 軸を x 軸に, yz 平面を yz 平面にうつす線形写像 (一般形)

2. V をベクトル空間, $A: V \rightarrow V$ を線形写像, f を多項式 (ただし $f(0) \neq 0$) とする.

(1) $f(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ かつ $A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(2) $A^n f(A) = O$ かつ $A^{n-1} f(A) \neq O$ ならば $\dim\{\mathbf{x} \in V \mid A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \geq n$.

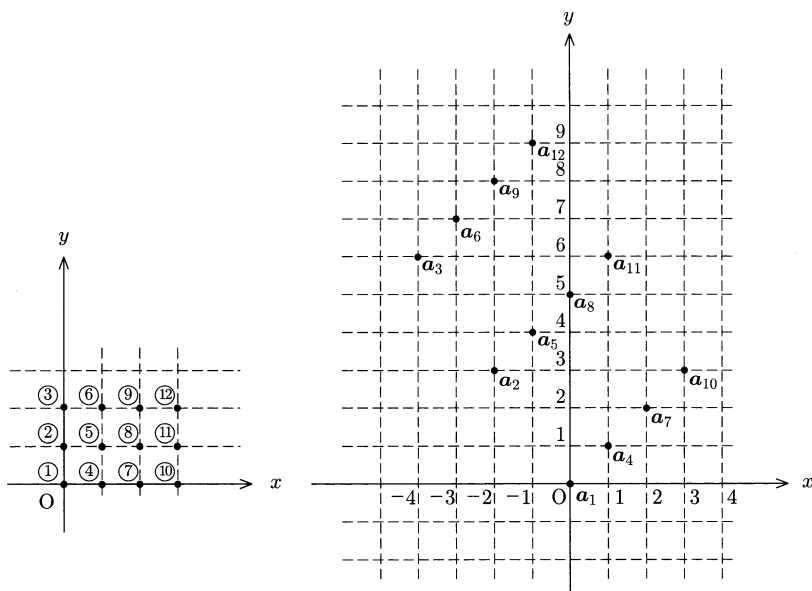
A の解答

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-2j \\ i+3j \end{pmatrix}$ より 12 個のベクトル $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ は $i=0$ に対し $j=0, 1, 2$, $i=1$ に対し $j=0, 1, 2, \dots$ と順に求めると, 次の 12 個のベクトル \mathbf{a}_k ($k=1, 2, \dots, 12$) にうつる.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_9 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{10} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$



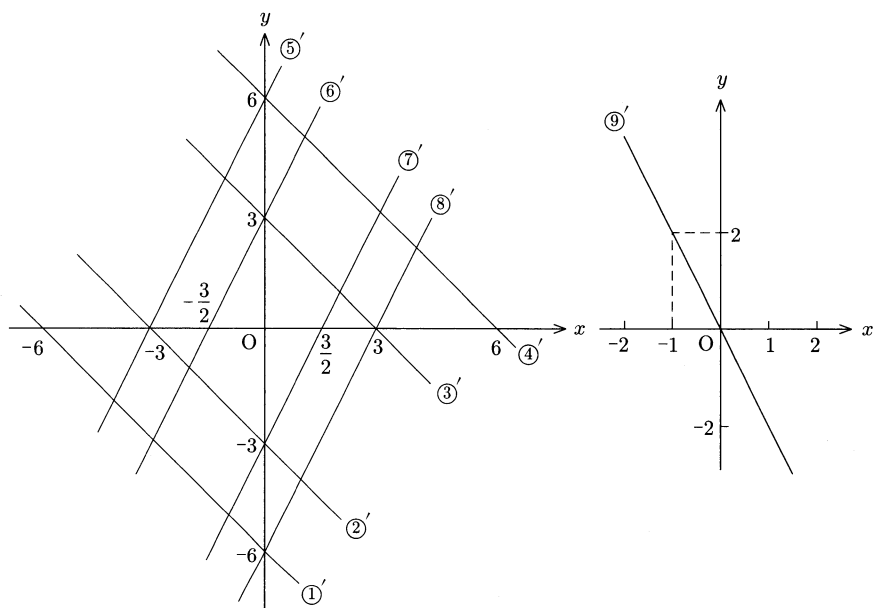
ベクトル⑫はベクトル \mathbf{a}_k にうつっている.

$$2. (1) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ のとき } \begin{cases} X = x - y & \text{より} \\ Y = 2x + y \end{cases}$$

$X + Y = 3x$, $2X - Y = -3y$ である. よって①~⑧の直線は下図の①'~⑧' にうつる.

$$(2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ のとき } \begin{cases} X = -x + y & \text{より} \\ Y = 2x - 2y \end{cases}$$

$2X + Y = 0$ である. よって①~⑧の直線は下図の⑨' にうつる.



3. 例題 2 より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ にうつるとき $\begin{cases} x = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y \\ y = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y \end{cases}$ で

あった.

(1) $x + 2y = 3$ より

$$-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y + 2\left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y\right) = 3.$$

よって $X + 2Y = 3$ より求める図形の方程式は $x + 2y = 3$.

(2) $\left(-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y + 1\right)^2 + \left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y - 1\right)^2 = 1$ より

$$X^2 + Y^2 - \frac{14}{5}X + \frac{2}{5}Y = -1, \text{ すなわち}$$

$$\left(X - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{5}\right)^2 = -1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1.$$

よって求める図形の方程式は $\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{5}\right)^2 = 1$.

(3) $\frac{\left(-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y - 2\right)^2}{4} + \left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y\right)^2 = 1$ を整理して

$$73X^2 + 52Y^2 + 72XY + 60X - 80Y = 0.$$

よって求める図形の方程式は $73x^2 + 72xy + 52y^2 + 60x - 80y = 0$ である.

4. (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ によって定まる写像だから線形で, 表現行列は

A である.

$$(2) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ x + 3y \end{pmatrix} \text{である. } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{で, } f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f((-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \neq (-1)f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{となる}$$

から線形ではない.

$$(3) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{となり,}$$

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって定まる写像だから線形で, 表現行列は A である.

$$(4) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{となり, 行列 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{によつて}$$

定まる写像だから線形で, 表現行列は A である.

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{が} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{にうつるから線形ではない.}$$

$$5. f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{より } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. (1) T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$$

$$T(k\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{x}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$$

$$(2) T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - z \\ 2x - 2z \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{より } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. 点 (x, y) が点 (X, Y) にうつったとすると, 中点 $\left(\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}\right)$ は $y = kx$ 上の点となるから

$$\frac{y+Y}{2} = k \frac{x+X}{2} \quad \therefore y+Y = k(x+X)$$

$$-kX + Y = kx - y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

点 (X, Y) は点 (x, y) を通る傾き $-\frac{1}{k}$ の直線上の点だから

$$Y - y = -\frac{1}{k}(X - x)$$

$$\therefore \frac{1}{k}X + Y = \frac{1}{k}x + y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①と②より

$$\begin{pmatrix} -k & 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -k & 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-k - \frac{1}{k}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{k} & -k \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{-k - \frac{1}{k}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{k} & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{-k^2 - 1} \begin{pmatrix} k - \frac{1}{k} & -1 - 1 \\ -1 - 1 & \frac{1}{k} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

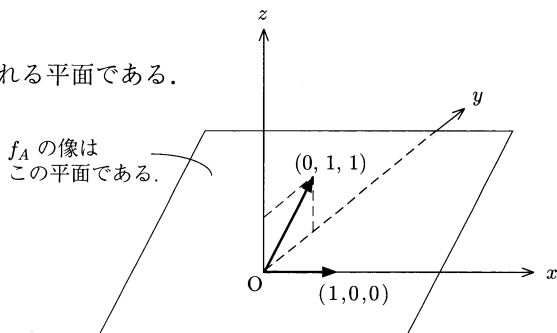
$$= \begin{pmatrix} -\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} & \frac{2k}{k^2 + 1} \\ \frac{2k}{k^2 + 1} & \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

よって表現行列は $\begin{pmatrix} -\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} & \frac{2k}{k^2 + 1} \\ \frac{2k}{k^2 + 1} & \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \end{pmatrix}$ である.

$$9. f_A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_A \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_A \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ である. よって } f_A \text{ の像はベク}$$

トル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる平面である.



$$10. (1) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 13 \end{pmatrix} = 2 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 4 - 2 = 2, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

$$(2) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - 2 = 1, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

$$(3) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 3 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 4 - 3 = 1, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 3.$$

$$(4) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 4 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 0, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 4.$$

$$11. (1) k \neq 2 \quad (2) \begin{pmatrix} \frac{k-5}{k-2} \\ \frac{3}{k-2} \end{pmatrix}$$

$$12. (1) (i) \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} -40 & -11 \\ 29 & 8 \end{pmatrix} \quad (iv) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) (i) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -9x + 16y \\ 13x - 23y \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} -9 & 16 \\ 13 & -23 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (iv) \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$13. (1) f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって表現行列は } \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$(2) f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ である.

$$(3) f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である.

Bの解答

$$1. (1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} (abc \neq 0) \quad (4) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & 0 & 0 \\ a & b & -c \end{pmatrix} (abc \neq 0)$$

$$(5) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} (a(be - cd) \neq 0)$$

2. (1) $f(A) = g(A)A + f(0)E$ (g は多項式) とかけるので $A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}$ より

$$f(A)A^{n-1}\mathbf{x} = g(A)A^n\mathbf{x} + f(0)A^{n-1}\mathbf{x} = f(0)A^{n-1}\mathbf{x}$$

また $f(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より

$$f(A)A^{n-1}\mathbf{x} = A^{n-1}f(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

よって $f(0)A^{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となるが $f(0) \neq 0$ であるから $A^{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が得られる。これをくり返すことにより $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を得る。

(注意) より一般に、互いに素な多項式 f, g に対し

$$f(A)\mathbf{x} = g(A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

である。

(2) $A^{n-1}f(A)\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ となる $\mathbf{y} \in V$ をとり $\mathbf{x} = f(A)\mathbf{y}$ とおけば

$$A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad A^{n-1} \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

このとき $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, \dots, A^{n-1}\mathbf{x}$ は 1 次独立である。

$$\left(\because \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の両辺に } A^{n-1} \text{ を作用させて } c_0 A^{n-1} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \therefore c_0 = 0. \right.$$

次に A^{n-2} を作用させて $c_1 A^{n-1} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ より $c_1 = 0$ 以下同様。) 従って

$$\dim\{\mathbf{x} \in V \mid A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \geq n$$

(注意) ある B に対し $A^n B = O, A^{n-1} B \neq O$ であればよい。

4.4 正規直交基底

ユークリッド内積

平面・空間のベクトルに対して定義した内積を n 次元数ベクトル空間 \mathbf{R}^n に自然に拡張したものをユークリッド内積と呼ぶ。

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

と定義したものである。 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ の他に、 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ もしくは (\mathbf{v}, \mathbf{w}) と書くこともある。

ユークリッド内積に関して次のような法則が成り立つ。

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$(k\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (k\mathbf{w}) = k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad (\text{等号成立は } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ のときに限る。})$$

ユークリッド内積以外にも、また、一般のベクトル空間に対しても、上記の性質をみたす（一般の）内積を定義できる（内積の導入されたベクトル空間を内積空間と呼ぶ。）が、ここではあまり詳しく触れない。

ベクトルの長さ

$$\text{一般の次元の数ベクトル } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ に対しても}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

としてベクトルの長さ（ノルム）を定義する。

ベクトルの長さに関して次のような法則が成り立つ。

$$|k\mathbf{v}| = |k| |\mathbf{v}|$$

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$$

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}||\mathbf{w}|$$

$$|\mathbf{v}| \geq 0 \quad (\text{等号成立は } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ のときに限る.})$$

角度・直交性

平面・空間のベクトルの場合と同様に、2つのベクトル \mathbf{v}, \mathbf{w} のなす角 θ は

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$$

をみたす $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲の角度として定義する。また、これらが直交していることを $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ で定義する。直交していることは

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$$

と書く。

直交補空間

W をベクトル空間 V の部分空間であるとする。 $\mathbf{v} \in V$ が W のすべてのベクトルに直交していることを

$$\mathbf{v} \perp W$$

と書き、このようなベクトルの全体

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \perp W, \mathbf{v} \in V\}$$

のことを W の直交補空間と呼ぶ。直交補空間は V の部分空間である。

直交補空間の直交補空間はもとの部分空間に一致する。すなわち

$$(W^\perp)^\perp = W$$

となる。

正規直交基底

お互いに直交するベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を直交系と呼ぶ。直交系は1次独立であることを証明できる。特に、ベクトル空間の基底が直交系である場合、直交基底と呼ぶ。

直交系のそれぞれのベクトルの長さが1であるとき、すなわち

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となるとき、正規直交系と呼ぶ。特に、ベクトル空間の基底が正規直交系である場合、正規直交基底と呼ぶ。

標準基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbf{R}^n の正規直交基底である。

正規直交基底に関して次の定理が成立する。

定理 1. v_1, v_2, \dots, v_n がベクトル空間 V の正規直交基底であるとき、 V の任意のベクトル v をこの基底の1次結合として

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

のように表すと、その係数（座標成分）は $a_i = v \cdot v_i$ として求められる。

さらに、 V の別のベクトル w が

$$w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n, \quad b_i = w \cdot v_i$$

と表されるとき、 v と w の内積は

$$v \cdot w = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

として求められる。

正射影

平面上に真上から光を当てると空中にある物体の影が真下にできるように、ベクトル空間の各ベクトルを、その部分空間上に垂直にうつす写像を正射影という。

ベクトル空間を V 、その部分空間を W 、 $v \in V$ が W 上のベクトル $w \in W$ に正射影されたとすると $v - w$ が v から W に下ろした垂線の方向ベクトルとなるので

$$v - w \perp W$$

となる。

W の正規直交基底を w_1, w_2, \dots, w_k とすると

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k, \quad a_i = v \cdot w_i$$

となることを証明できる。

$v \in V$ を $w \in W$ に対応させる写像は線形写像である。

グラム・シュミット (Gram-Schmidt) の正規直交化法

1次独立なベクトルの組 v_1, v_2, \dots, v_n をもとにして正規直交系 w_1, w_2, \dots, w_n を構成することができる。

最初のベクトル v_1 については、同じ向きで長さが1であるベクトルを考えればよいから

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$

とすればよい。

2つ目のベクトル v_2 については、まず w_1 に直交するベクトル u_2 を求めて、

次にその長さを1にする. 具体的には, v_2 を w_1 方向に正射影したベクトル

$$(v_2 \cdot w_1)w_1$$

を考え

$$u_2 = v_2 - (v_2 \cdot w_1)w_1$$

と定義すると $u_2 \perp w_1$ となるので

$$w_2 = \frac{u_2}{|u_2|}$$

とすればよい.

3つ目のベクトル v_3 については, まず w_1, w_2 の両方に直交するベクトル u_3 を求めて, 次にその長さを1にする. 具体的には, v_3 を $W\{w_1, w_2\}$ に正射影したベクトル

$$(v_3 \cdot w_1)w_1 + (v_3 \cdot w_2)w_2$$

を考え

$$u_3 = v_3 - (v_3 \cdot w_1)w_1 - (v_3 \cdot w_2)w_2$$

と定義すると $u_3 \perp W\{w_1, w_2\}$ となるので

$$w_3 = \frac{u_3}{|u_3|}$$

とすればよい.

これを次々に繰り返すと, w_1, w_2, \dots, w_n が構成できる. w_k は

$$u_k = v_k - (v_k \cdot w_1)w_1 - (v_k \cdot w_2)w_2 - \dots - (v_k \cdot w_{k-1})w_{k-1}$$

から

$$w_k = \frac{u_k}{|u_k|}$$

として求める.

このようにして正規直交系を求めることを, グラム・シュミット (Gram-Schmidt) の正規直交化法とよぶ. ベクトル空間の基底から, この手法で正規直交基底を得ることができる.

直交変換・直交行列

線形変換 $f: V \rightarrow V$ が内積を変えない, すなわち, 任意の $u, v \in V$ に対して

$$f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$$

が成立する場合, この線形変換を直交変換と呼ぶ. u と v が直交しているとき, $f(u)$ と $f(v)$ も直交しているので, このように呼ばれる. 内積が変わらないのでベクトルの長さも変わらない. 原点を中心とした平面上の点の回転や, 原点を通る直線に関する対称移動は直交変換である.

直交変換に関して次の定理が成立する.

定理 2. v_1, v_2, \dots, v_n が V の正規直交基底であるとする. 線形変換 $f: V \rightarrow V$ が直交変換である必要十分条件は $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ が V の正規直交基底になることである.

\mathbf{R}^n の直交変換の表現行列を直交行列と呼ぶ.

n 次正方形行列 P の列ベクトルを p_1, p_2, \dots, p_n とすると

$$p_i = Pe_i = f_P(e_i)$$

であり, e_1, e_2, \dots, e_n は \mathbf{R}^n の正規直交基底だから, 上の定理によって, P の列ベクトルの組 p_1, p_2, \dots, p_n が \mathbf{R}^n の正規直交基底であるような P が直交行列であることになる.

これを条件式で表すと

$${}^tPP = E$$

となる. このことから直交行列 P は正則な行列で $P^{-1} = {}^tP$ であることがわかる. また

$$|P|^2 = |{}^tP||P| = |E| = 1$$

より, $|P| = \pm 1$ であることもわかる. $|P| = 1$ である直交行列のことを, 特に, 回転行列と呼ぶことがある.

例題 1.

$$\mathbf{R}^4 \text{ におけるベクトル } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ について, 長さ } |\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$$

と内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ および \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角 θ を求めよ.

解答

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 + 3 - 1 + 4 = 9$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{9}{2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

よって $\theta = \frac{\pi}{3}$ である.

例題 2.

\mathbf{R}^3 において $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間を W

とすると、 W^\perp を求めよ。

解答 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$ をみたす $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解である。これを解くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

よって

$$W^\perp = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}.$$

幾何学的には W は \mathbf{a}_1 と \mathbf{a}_2 を含む平面で、 W^\perp は原点を通る W の法線である。

例題 3.

\mathbf{R}^3 のベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、 \mathbf{R}^3 の部分空間 $W_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, $W_2 =$

$W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ に正射影したベクトルを、それぞれ求めよ。

解答 W_1 の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるから $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を W_1 に正射

影したベクトルは

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である.

$$W_2 \text{ の正規直交基底は } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ であるから } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を } W_2$$

に正射影したベクトルは

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

例題 4.

$$\mathbf{R}^3 \text{ におけるベクトル } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ から}$$

正規直交系 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ を作れ.

$$\text{解答 } \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ より } \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{20}{34} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ -60 \end{pmatrix} = \frac{30}{34} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より $w_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ である. よって正規直交系は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である.

A

1. \mathbf{R}^4 のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 3k \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -2k \\ 2 \end{pmatrix}$ が直交するような k

の値を求めよ.

2. ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ がベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と直交す

るような単位ベクトルであるとき, a, b, c を求めよ.

3. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ のなす角を求めよ.

4. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ が互いに直交するとき, これらのベクトルは 1 次独立であることを示せ. ただし, $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{a}_r \neq \mathbf{0}$ とする.

5. \mathbf{R}^4 において $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間 W の

直交補空間 W^\perp を求めよ.

6. \mathbf{R}^3 の部分空間 $W_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, $W_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ に

ついて

(1) \mathbf{R}^3 から W_1, W_2 への正射影を表す線形写像の表現行列 A_1, A_2 をそれぞれ求めよ.

(2) W_1, W_2 への正射影を表す線形写像 f_{A_1}, f_{A_2} の核をそれぞれ求めよ.

7. 次の基底から正規直交基底を作れ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. $A = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ.

9. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & a \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, a, b, c の値を求めよ.

10. A を n 次の直交行列であるとするとき, 次の問に答えよ.

(1) \mathbf{R}^n の任意のベクトル \mathbf{v} に対し, $|f_A(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$ が成立すること, すなわち直交変換でベクトルの長さは変わらないことを示せ.

(2) \mathbf{R}^n のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のなす角が θ であるとするとき, $f_A(\mathbf{v}_1), f_A(\mathbf{v}_2)$ のなす角も θ となること, すなわち直交変換でベクトルのなす角は変わらないことを示せ.

11. A, B が直交行列ならば, A^{-1}, AB もそうであることを示せ.

B

1. \mathbf{R}^3 において $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とし, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が \mathbf{R}^3 の正規直交基底に

なるような組 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ をすべて求めよ.

2. $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ とする.

(1) $\mathbf{a}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ とおくとき, \mathbf{a}^\perp は \mathbf{R}^n の $(n-1)$ 次元部分空間になることを示せ.

(2) 写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$$

と定めるとき, f は線形変換であることを示せ. さらに直交変換であることを示せ. この f を部分空間 \mathbf{a}^\perp に関する対称移動という.

3. n 次元数ベクトル空間 \mathbf{R}^n において, m 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ が 1 次従属であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_m \end{vmatrix} = 0$$

であることを示せ.

A の解答

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = k - 1 - 2k - 6k^2 + 2 = -6k^2 - k + 1 = 0$ を解いて $k = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$.

2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0, |\mathbf{a}| = 1$ より

$$b = -\frac{3}{2}a, c = 2a, 2a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

これを解いて $a = \pm \frac{2}{\sqrt{33}}, b = \mp \frac{3}{\sqrt{33}}, c = \pm \frac{4}{\sqrt{33}}$ (複号同順).

3. \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角を θ とすれば

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-9}{\sqrt{36}\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角は $\frac{5}{6}\pi$ である.

4. $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ とおき, \mathbf{a}_1 との内積を考えると

$$(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r) \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_1 = 0$$

$$k_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_1 = 0$$

$$k_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \quad (\because \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_1 = 0)$$

$$\therefore k_1 = 0 \quad (\because \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0})$$

同様に $k_2 = 0, \dots, k_r = 0$.

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$W^\perp = W \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. (1) W_1 の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ である. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

を W_1 に正射影したベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ とすると

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって

$$A_1 = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

である.

W_2 の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を W_2 に正射影したベクトルを $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ とすると

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 0 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$A_2 = \left(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

である.

$$(2) f_{A_1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解は}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数})$$

である. よって

$$\text{Ker } f_{A_1} = W \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$f_{A_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の解は}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

である。よって

$$\text{Ker } f_{A_2} = W \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$7. (1) \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{より } \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ よって正規直交基底は}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(2) \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ より } w_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} u_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{105} \begin{pmatrix} -90 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より } w_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ よって正規直交} \end{aligned}$$

基底は

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

8. tAA を計算すると

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

9. ${}^tAA = E$ から

$$a + 2b + 2c = 0, \quad b = c, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

となる. これを解いて

$$a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad b = c = \mp \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad (\text{複号同順})$$

10. A は直交行列だから ${}^tAA = E$ をみたとす.

(1) $|f_A(\mathbf{v})|^2 = f_A(\mathbf{v}) \cdot f_A(\mathbf{v}) = {}^t(A\mathbf{v})A\mathbf{v} = {}^t\mathbf{v}{}^tAA\mathbf{v} = {}^t\mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$.
よって $|f_A(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$ である.

(2) $f_A(\mathbf{v}_1) \cdot f_A(\mathbf{v}_2) = {}^t(A\mathbf{v}_1)A\mathbf{v}_2 = {}^t\mathbf{v}_1{}^tAA\mathbf{v}_2 = {}^t\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$.
(1) より $|f_A(\mathbf{v}_1)| = |\mathbf{v}_1|$, $|f_A(\mathbf{v}_2)| = |\mathbf{v}_2|$ だから

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{f_A(\mathbf{v}_1) \cdot f_A(\mathbf{v}_2)}{|f_A(\mathbf{v}_1)||f_A(\mathbf{v}_2)|}$$

となり $f_A(\mathbf{v}_1)$, $f_A(\mathbf{v}_2)$ のなす角も θ となる.

11. ${}^tAA = E$ だから $A^{-1} = {}^tA$. ${}^t(A^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$. したがって A^{-1} は直交行列. 次に ${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = E$ だから AB も直交行列である.

Bの解答

1. $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ だから

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad (a \neq 0 \text{ または } b \neq 0).$$

よって

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-a-b)^2 + a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

次に \mathbf{a}_3 を求める. $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y} = 0$ をみたす $\mathbf{y} \neq 0$ は

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -c-d \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (c \neq 0 \text{ または } d \neq 0) \quad \dots\dots (*)$$

とかけるから

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c-d \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff c(2a+b) + d(a+2b) = 0 \quad \dots\dots (**)$$

$a \neq 0$ または $b \neq 0$ だから $2a+b \neq 0$ または $a+2b \neq 0$. よって $(**)$ を c ま

たは d について解いて (*) に代入すれば

$$\mathbf{y} = k \begin{pmatrix} a - b \\ a + 2b \\ -2a - b \end{pmatrix} \quad (k \text{ は定数})$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + (a+2b)^2 + (-2a-b)^2}} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \\ -2a-b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \\ -2a-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上により

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \\ -2a-b \end{pmatrix} \quad (a \neq 0 \text{ または } b \neq 0). \end{aligned}$$

2. (1) $1 \times n$ 型の行列 A を $A = {}^t \mathbf{a}$ とおくと、 \mathbf{a}^\perp は連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間である。 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ より $\text{rank } A = 1$ だから解空間の次元は $n - 1$ である。

(2)

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) - \frac{2\mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \\ &= \alpha \left(\mathbf{x} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) + \beta \left(\mathbf{y} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) \\ &= \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

だから f は線形変換である。次に

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= \left(\mathbf{x} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) \cdot \left(\mathbf{y} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) - \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) + \frac{4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{a}|^4} |\mathbf{a}|^2 \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

だから f は直交変換である。

3. まず, u_1, \dots, u_m についての方程式

$$u_1 \mathbf{a}_1 + \dots + u_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

は m 個の方程式 (連立 1 次方程式)

$$(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_1)u_1 + \dots + (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_m)u_m = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と同値であることがいえる. 実際, ②は①の両辺と \mathbf{a}_i との内積から得られ, 逆に①は②に u_i をかけて $i = 1, \dots, m$ について加えて得られる.

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ が 1 次従属であるための条件は, u_1, \dots, u_m についての連立方程式②が非自明解をもつこととなり, それは $\det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = 0$ と同値である.

第5章

固有値と固有ベクトル

5.1 固有値と固有ベクトル

正方行列 A に対し、 $\mathbf{0}$ でないベクトル \mathbf{x} と定数 λ が存在して

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (1)$$

をみたすとき、 λ を A の固有値、 \mathbf{x} を λ に対する A の固有ベクトルという。言い換えれば、固有ベクトルとは線形変換 $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ によって‘向き’の変わらないベクトルのことであり、固有値 λ は固有ベクトルが同一方向にのびる割合を表す。(反対方向も含めて考える。)

$A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする。(1) 式は

$$\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と書けるから、 λ が A の固有値であるということは同次連立1次方程式

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

が非自明解をもつということである。そして、その非自明解が λ に対する固有ベクトルである。(2) の解空間、すなわち λ に対する固有ベクトルの全体 (と $\mathbf{0}$) を固有値 λ に対する固有空間という。

連立1次方程式 (2) が非自明解をもつための必要十分条件は $|\lambda E - A| = 0$ 、すなわち

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことである。言い換えれば、未知数 x に関する方程式

$$\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

が解 $x = \lambda$ をもつということにほかならない。(3)の左辺を展開すると x の n 次多項式が得られる。これを $\varphi_A(x)$ で表し、 A の固有多項式という。さらに方程式 $\varphi_A(x) = 0$ を A の固有方程式という。 λ が A の固有値であるとは、 λ が固有方程式 $\varphi_A(x) = 0$ の解であるということにほかならない。ところで固有方程式 $\varphi_A(x) = 0$ は n 次方程式であり、 n 次方程式は n 個の複素数解 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (重解はその重複だけ数える) をもつことが知られている。したがって A はこれら n 個の $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を固有値としてもつ。このとき $\varphi_A(x)$ を 1 次式に因数分解すると

$$\varphi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

となる。同じ固有値をまとめれば

$$\varphi_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$$

の形になる。各 n_i を固有値 λ_i の重複度という。

注： A の成分が実数であっても固有値は実数とは限らないから、対応する固有ベクトルは複素数を成分とするベクトルを考える必要がある。しかし、固有値がすべて実数ならば、固有ベクトルは実数の範囲で求めることができる。

例 1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について

$$\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & -3 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

だから、固有値は 1 と 5 である。固有値 1 に対する固有空間を W_1 とお

くと、 W_1 は $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, すなわち $\begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ を解いて $W_1 =$

$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}$. 固有値 5 に対する固有空間を W_2 とおくと、 W_2 は

$(5E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, すなわち $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$ を解いて $W_2 = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbf{R} \right\}$

となる。すなわち W_1, W_2 は \mathbf{R}^2 の 1 次元部分空間である (W_1 は直線 $y = -x$,

W_2 は直線 $y = \frac{1}{3}x$ を表す)。 W_1 に属するベクトル $\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($\alpha \neq 0$)

は $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ をみたく。すなわち $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ によって向きも大きさも変わらない

ベクトルである。 W_2 に属するベクトル $\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\beta \neq 0$) は $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$

をみます. すなわち f_A によって大きさが5倍のベクトルになる. W_1, W_2 に属さないベクトル \mathbf{x} はこのような性質をもたないが, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は \mathbf{R}^2

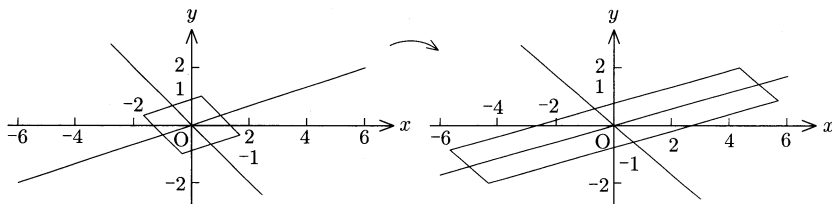
の基底だから, $\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せる. このとき

$$f_A(\mathbf{x}) = \alpha f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \beta f_A\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるから, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする座標系を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

方向の座標成分は変わらず $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向の座標成分は5倍になることがわかる.

このことから平面全体が $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に5倍にのびる様子が想像できる. このように, 固有値と固有ベクトルは線形変換の性質を知るのに役立つ.



例 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える. この行列は原点のまわりの 90 度の回転

を表す. この回転で不変な方向は存在しないから, \mathbf{R}^2 の線形変換としては固有ベクトルをもたない. しかし, 複素数まで範囲を広げれば存在する. 実際

$$\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

だから, 固有値は $i, -i$ である. i に対する固有ベクトルは, $(iE - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を

解いて, $\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ (α は 0 でない複素数) となる. また $-i$ に対する固有

ベクトルは, $(-iE - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて, $\mathbf{x} = \beta \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ (β は 0 でない複素数) となる.

定理 1. A を n 次正方行列, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を A の固有値とする. このとき

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr } A, \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A$$

が成り立つ.

定理 2. A を n 次正方行列, P を n 次正則行列とし, $B = P^{-1}AP$ とおく. このとき A と B の固有多項式は一致する. したがって A と B の固有値も一致する.

定理 3. n 次正方行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, 各固有値 λ_i に対する固有ベクトルを \mathbf{x}_i とする ($i = 1, 2, \dots, r$). このとき $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ は 1 次独立である.

定理 4 (ハミルトン・ケーリー (Hamilton-Cayley) の定理). A を n 次正方行列, $\varphi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ を A の固有多項式とする. このとき

$$\varphi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0E = O$$

が成り立つ.

例 3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき

$$\varphi_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O.$$

例題 1.

次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

解答

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -(x+1) \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x & -4 \\ -4 & -2 & x-7 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} x & -4 \\ -2 & x-7 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(x^2 - 7x - 8) = (x-8)(x+1)^2. \end{aligned}$$

よって A の固有値は 8, -1 (重複度は 2) である.

固有値が 8 のとき, $(8E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ すなわち

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4z = 0 \\ -2x + 8y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \text{ の解を求めると, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ よって固有}$$

値 8 に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は 0 でない任意定数) である.

固有値 -1 のとき, $(-E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ すなわち

$$\begin{cases} -4x - 2y - 4z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \\ -4x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \text{ を解くと } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって固有値 -1 に対する固有ベクトルは $t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ただし

t_1 と t_2 は同時には 0 でない任意定数) である.

例題 2.

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とするとき

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr } A, \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A$$

を示せ.

解答 $A = (a_{ij})$ とし, $\varphi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$ とする.

すると

$$\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n) \cdots (*)$$

が成り立つ. ここで (*) 式で両辺の x^{n-1} の係数を考える. 左辺の行列式の展開を考えると x^{n-1} の項が出てくるのは $(x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$ からだか

ら、さらに展開して考えると x^{n-1} の係数は $-a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn} = -\operatorname{tr} A$ である。一方、右辺の x^{n-1} の係数は $-\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_n = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$ である。よって

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

となる。

次に(*)式の両辺に $x=0$ を代入すると

$$|-A| = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

ここで $|-A| = (-1)^n |A| = (-1)^n \det A$ だから $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A$ となる。

例題 3.

ハミルトン・ケリーの定理を用いて $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ がみたす 3

次の関係式を求めよ。

$$\text{解答 } \varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{ より}$$

$$A^3 - 2A^2 - A + 2E = O$$

となる。

A

1. 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ の固有値が 1 と 3 であるとき、整数 a, b, c の値を

求めよ.

3. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ の異なる固有値が 2 個であるための条件を求めよ.

4. B を m 次正方形行列とし、その固有値を μ_1, \dots, μ_m とする. 任意の実数 λ と m 次元行ベクトル \mathbf{d} に対して、行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

の固有値は $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_m$ であることを示せ.

5. A を n 次正方形行列, P を n 次正則行列とし, $B = P^{-1}AP$ とおく. このとき A と B の固有多項式および固有値は一致することを示せ.

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ について

(1) ハミルトン・ケリーの定理を用いて, A がみたす 3 次の関係式を求めよ.

(2) A^{10} を求めよ.

7. 次を示せ.

(1) n 次正方形行列 A が正則であるための必要十分条件は A が 0 を固有値にもたないことである.

(2) n 次正則行列 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とするとき, A^{-1} の固有値は $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ である.

B

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

ただし, $n \geq 2$ かつ $a = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ とする.

$$2. \quad n \text{ 次正方行列 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ の固有値と固有ベクトル}$$

を求めよ.

3. n 次正方行列 A, B に対し, AB と BA の固有値は一致することを示せ.

A の解答

$$1. (1) \quad \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3) \text{ より } A \text{ の固有値は } 1, 3 \text{ である.}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 3E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より固有値 } 1 \text{ に対する固}$$

有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は 0 でない任意定数) で, 固有値 3 に対する固有ベ

クトルは $s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (s は 0 でない任意定数) である.

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x-8 & 10 \\ -5 & x+7 \end{vmatrix} = (x-3)(x+2) \text{ より } A \text{ の固有値は } 3, -2 \text{ である.}$$

$$3E - A = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}, \quad -2E - A = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ より固有値 } 3, 2 \text{ に}$$

対する固有ベクトルはそれぞれ $t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t, s は 0 でない任意定数)

である.

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 3 \\ -4 & x-6 & 10 \\ -2 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x-4) \text{ より } A \text{ の固有値は}$$

2, 3, 4 である.

$$2E - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 10 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3E - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & 10 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$4E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 10 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{より固有値 } 2, 3, 4 \text{ に対する固有ベクトルはそ}$$

$$\text{れぞれ } t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} t, s, u \text{ は } 0 \text{ でない任意定数) である.}$$

$$(4) \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -5 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^2 \text{ より } A \text{ の固有値は } 2, 1 \text{ (重複度}$$

は 2) である.

$$2E - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, E - A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より固有}$$

$$\text{値 } 2, 1 \text{ に対する固有ベクトルはそれぞれ } t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} t, s \text{ は } 0 \text{ でない}$$

任意定数) である.

$$(5) \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -6 & -3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-10)(x+1)^2 \text{ より } A \text{ の固有値は } 10, -1 \text{ (重}$$

複度は 2) である.

$$10E - A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & -2 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}, -E - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \text{ より固}$$

$$\text{有値 } 10 \text{ に対する固有ベクトルは } t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (} t \text{ は } 0 \text{ でない任意定数) で, 固有}$$

$$\text{値 } -1 \text{ に対する固有ベクトルは } t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (} t_1, t_2 \text{ は同時には}$$

0 でない任意定数) である.

$$(6) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & 2 & x-3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^3 \text{ より } A \text{ の固有値は } 2, 1$$

(重複度は3)である.

$$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ より固有}$$

値2に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は0でない任意定数)で, 固有値1

に対する固有ベクトルは $t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t_1, t_2 は同時には0でない

任意定数)である.

2. $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x \end{vmatrix} = x^2 - ax - bc = (x-1)(x-3)$ であるとき $-a = -4, -bc = 3$ をみたら. a, b, c は整数だから $a = 4, b = \pm 1, c = \mp 3$ (複号同順) または $a = 4, b = \pm 3, c = \mp 1$ (複号同順) である.

3.

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-a & 0 & -c \\ 0 & x-b & 0 \\ -c & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x-b)\{x-(a-c)\}\{x-(a+c)\}.$$

ゆえに固有値は $b, a-c, a+c$ である.

$$c = 0 (\iff a-c = a+c) \text{ のとき } b \neq a$$

$$c \neq 0 \text{ のとき } b = a-c \text{ または } b = a+c$$

よって求める条件は $\begin{cases} c = 0 \text{ かつ } b \neq a \\ \text{または, } c \neq 0 \text{ かつ } b = a-c \\ \text{または, } c \neq 0 \text{ かつ } b = a+c \end{cases}$ である.

4.

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) &= |xE_{m+1} - A| = \begin{vmatrix} x - \lambda & -d \\ \mathbf{0} & xE_m - B \end{vmatrix} \\ &= (x - \lambda) |xE_m - B| = (x - \lambda)\varphi_B(x). \end{aligned}$$

よって A の固有値は λ と B の固有値だから $\lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ である.

5. P は正則行列だから $P^{-1}P = E$ で $|P^{-1}P| = |P^{-1}| \cdot |P| = 1$ である. この性質を使うと

$$\begin{aligned} \varphi_B(x) &= |xE - B| = |xP^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE - A)P| \\ &= |P^{-1}| \cdot |xE - A| \cdot |P| = |xE - A| = \varphi_A(x). \end{aligned}$$

よって A と B の固有多項式が一致する. $\varphi_B(x) = \varphi_A(x) = 0$ の解を考えると, A の固有値と B の固有値は一致する.

$$6. (1) \varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -3 & 2 \\ 2 & x+5 & -3 \\ 3 & 7 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 + x + 1 \text{ より } A^3 + A^2 + A + E = O.$$

(2) $A^4 - E = (A - E)(A^3 + A^2 + A + E) = O$ より $A^4 = E$. よって

$$A^{10} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. (1) A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると, 例題 2 より

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0 \iff \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \dots, \lambda_n \neq 0.$$

(2) $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とする. この式の両辺に左から $\lambda_i^{-1} A^{-1}$ をかけると

$$\lambda_i^{-1} \mathbf{x}_i = A^{-1} \mathbf{x}_i.$$

よって λ_i^{-1} は A^{-1} の固有値.

B の解答

$$1. \text{ 固有多項式 } \varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \\ -a_1 & x & 0 & & 0 \\ -a_2 & 0 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} \text{ を第 1 行で余因子}$$

展開すると $\varphi_A(x) = x^n - a_1^2 x^{n-2} - a_2^2 x^{n-2} - \dots - a_{n-1}^2 x^{n-2} = x^{n-2}(x^2 - a^2)$

であるから, 固有値は $0, \pm a$ である.

固有値 0 に対する固有空間は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i = 0 \right\}.$$

また固有値 $a, -a$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t \begin{pmatrix} a \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} a \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}$

(t, s は 0 でない任意定数) である.

2. A の固有値を 2λ , 固有ベクトルを $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ とし, 特に $-1 < \lambda < 1$

で考える.

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} = 2\lambda\mathbf{u} &\iff \begin{cases} u_2 = 2\lambda u_1 \\ u_1 + u_3 = 2\lambda u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} + u_n = 2\lambda u_{n-1} \\ u_{n-1} = 2\lambda u_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_{k-1} + u_{k+1} = 2\lambda u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda^2 \neq 1$ のとき差分方程式 $u_{k-1} + u_{k+1} = 2\lambda u_k$ の一般解は

$$u_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k$$

である. ただし $\lambda_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}, \lambda_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$.

$$\begin{aligned} u_0 = 0 \text{ より } c_1 = -c_2, \quad u_{n+1} = 0 &\iff \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{n+1} = 1 \\ &\iff \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)^{2(n+1)} = 1. \end{aligned}$$

$|\lambda| < 1$ だから $\lambda = \cos \theta$ とおけるので $e^{2(n+1)i\theta} = 1$ すなわち $\theta = \frac{m\pi}{n+1}$

$(m = 1, \dots, n)$ のとき 2λ は A の固有値であり

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin \frac{m}{n+1} \pi \\ \sin \frac{2m}{n+1} \pi \\ \vdots \\ \sin \frac{nm}{n+1} \pi \end{pmatrix} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

は固有ベクトルである。(異なる固有値が n 個得られたので、これ以外に考える必要はない)

3. A, B の一方, 例えば A が正則であるとする, 問題 A の 5 より AB と $A^{-1}(AB)A = BA$ の固有多項式が一致する. よって固有値も一致する.

次に A, B のどちらも正則でないとする. ε を A の固有値と異なる数とすると, $A - \varepsilon E$ は正則である. したがって上の議論から $(A - \varepsilon E)B$ と $B(A - \varepsilon E)$ の固有多項式は一致する. すなわち

$$|xE - (A - \varepsilon E)B| = |xE - B(A - \varepsilon E)|$$

が成り立つ. ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると

$$|xE - AB| = |xE - BA|$$

となり, AB と BA の固有多項式が一致する.

5.2 行列の対角化

A を n 次正方行列とする. もし n 次正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき, すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

となるとき, A は対角化可能であるという. また, このとき A は P によって対角化されるという. (1) の右辺の行列の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ であるから, 5.1 の定理 2 より $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は A の固有値であることがわかる. すなわち, A を対角化したときの対角行列の対角成分は A の固有値が並ぶ.

A が対角化可能であるための条件を考えてみよう. n 次正方行列 A が相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を持つ場合を考える. 各 λ_i に対する固有ベクトルを \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とすると, 5.1 の定理 3 より $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ は 1 次独立である. よって行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

と定めると, P は正則となる. 一方 $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) だから

$$AP = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ となり, } A \text{ は対角化可能である.}$$

したがって次のことが成り立つ.

定理 1. 正方行列 A の固有値がすべて異なるならば, A は対角化可能である.

A の固有値が重複する場合, A は必ずしも対角化可能ではない. これについては次の定理が成り立つ.

定理 2. n 次正方行列 A に対し, 次の (1), (2) は同値である.

(1) A は対角化可能である.

(2) A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ とするとき, 各 λ_i の重複度が λ_i に

$$\text{したがって } A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \text{ となる.}$$

例題 1.

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ について

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A の固有ベクトルを求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と P の逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (4) A^n を求めよ.

解答 (1) 固有方程式 $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-3) = 0$ から A の固有値は $3, -2$ である.

(2) 固有値 $3, -2$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (t, s は 0 でない任意定数) である.

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ で $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ である.

よって

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot 3^n + (-1)^n 2^n}{5} & \frac{3^n + (-1)^{n+1} 2^n}{5} \\ \frac{4 \cdot 3^n + (-1)^{n+1} 2^{n+2}}{5} & \frac{3^n + (-1)^n 2^{n+2}}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例題 2.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.

解答 固有方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & 3 \\ -1 & -1 & x+2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+1) = 0$ より A の固有値は 1 (重複度は 2), -1 である.

固有値 1 に対する固有ベクトルは $t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ただし t_1, t_2 は同時

には 0 でない任意定数), 固有値 -1 に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(t は 0 でない任意定数) である. よって

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A

1. 次の行列は対角化可能かどうか調べ, 可能ならば正則行列 P を用いて対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 8 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列 A を対角化することにより, A^n を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a を実数とする.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ の固有方程式が相異なる 2 実数解, 重解, 虚数解をもつための a の条件をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の行列で対角化できない a を求めよ. それ以外で a を指定することによって対角化できる例を作れ.

4. 線形写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ において, 次の対応が存在する.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

このとき, f の表現行列 A を求めて対角化せよ.

B

1. 次を示せ.

(1) 巾零行列の固有値は 0 のみである.

(2) 零行列でない巾零行列は対角化可能ではない.

2. n 次正方行列 A は $A^{n-1} \neq O$, $A^n = O$ をみたすものとする. ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ を $A^{n-1}\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ となるようにとり, n 次正方行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} A^{n-1}\mathbf{a} & A^{n-2}\mathbf{a} & \cdots & A\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

と定める.

(1) P は正則であることを示せ.

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ.

A の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -2 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)$ より固有値は 1, 2 であり, 固有ベクトルとして

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる. よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とお

けば $P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(2) $\begin{vmatrix} x-5 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 8x + 14$ より固有値は $4 \pm \sqrt{2}$ であり, 固有

ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ をとることができる. よって $P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{とおけば } P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 4+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる.

$$(3) \begin{vmatrix} x & 1 \\ -4 & x \end{vmatrix} = x^2 + 4 \text{ より固有値は } \pm 2i \text{ であり, 固有ベクトルとし}$$

て $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ をとることができる. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{pmatrix}$ とおけば

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$$(4) \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3 \text{ より固有値は } 1 \text{ (重複度は } 3\text{).}$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は 2 より固有空間の次元は 1 (< 3) だから対角化で

きない.

$$(5) \begin{vmatrix} x-5 & 0 & -2 \\ -7 & x-4 & -8 \\ 5 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ より固有値は } 1, 2, 3 \text{ で}$$

あり, 固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとることができる.

$$\text{よって } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 8 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} P =$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる.

$$(6) \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^2 \text{ より固有値は } 1 \text{ (重複度 } 2\text{),}$$

2である。固有値1に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は0でない任意定

数)であるから、固有空間の次元は1 (< 2)となり対角化できない。

$$(7) \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ -1 & x+3 & -1 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+2)^2(x-1) \text{ より固有値は } -2 \text{ (重複度は2),}$$

1である。固有値-2に対する1次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

をとることができる。固有値1に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとるこ

とができる。よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} P =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

2. (1) $\begin{vmatrix} x-5 & -3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)$ より A の固有値は2,3であり,

固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ をとることができる。よって $P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ で } A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & -3 \cdot 2^n + 3^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2) \text{ より } A \text{ の固有値は } 0, 1, 2$$

であり、固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる

る. よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で

$$A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1} & -1 + 2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. (1) 固有方程式は $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -3 & x-a \end{vmatrix} = x^2 - (a+1)x + a+3 = 0$ で, 判別

式は $(a+1)^2 - 4(a+3) = a^2 - 2a - 11$ である. よって

相異なる 2 実数解をもつ $\iff a < 1 - 2\sqrt{3}$ または $a > 1 + 2\sqrt{3}$

重解をもつ $\iff a = 1 \pm 2\sqrt{3}$

虚数解をもつ $\iff 1 - 2\sqrt{3} < a < 1 + 2\sqrt{3}$

(2) 固有方程式が重解 $x = \lambda$ をもつ場合 $\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -3 & \lambda-a \end{pmatrix} = 1$ だけ

ら λ に対する固有空間の次元は 1 となり行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ は対角化できない.

よって $a = 1 \pm 2\sqrt{3}$ のとき対角化できない. 対角化できる例を作ってみる.

たとえば $a = 5$ のとき固有方程式は $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$ となり

固有値は 2, 4 であり, 固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ をとることができる.

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

また $a = 1$ のとき固有方程式は $x^2 - 2x + 4 = 0$ となり固有値は $1 \pm \sqrt{3}i$ であ

る. 固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ をとることができる. よっ

て $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{3}i & \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ と

なる.

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を標準基底の 1 次結合で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 2f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②と③より

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①と④より

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -2 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-3) \text{ より } A \text{ の固有値は } 2 \text{ (重複度は}$$

2), 3である.

固有値 2 に対する 1 次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる

ことができる。固有値 3 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることが

$$\text{できる。よって } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

B の解答

1. (1) A を巾零行列とすると、自然数 k があって $A^k = O$ 。

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

とおく。両辺に左から A をかけると

$$A^2x = \lambda Ax = \lambda^2 x.$$

この操作を続けて

$$A^k x = \lambda^k x.$$

よって $A^k = O$ より $\lambda^k x = 0$ となるが、 $x \neq 0$ だから $\lambda^k = 0$ 、すなわち $\lambda = 0$ 。

(2) 仮に A が対角化可能であるとすると、正則行列 P があって ((1) の結果を用いて)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = O.$$

よって $A = O$ となり、 $A \neq O$ に矛盾する。

2. (1) n 個のベクトル

$$A^{n-1}\mathbf{a}, A^{n-2}\mathbf{a}, \dots, A\mathbf{a}, \mathbf{a}$$

が 1 次独立なことをいえば十分。

$$\alpha_1 A^{n-1}\mathbf{a} + \alpha_2 A^{n-2}\mathbf{a} + \dots + \alpha_{n-1} A\mathbf{a} + \alpha_n \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \dots\dots (*)$$

とおく。この両辺に左から A をかけると ($A^n = O$ に注意して)

$$\alpha_2 A^{n-1}\mathbf{a} + \dots + \alpha_{n-1} A^2\mathbf{a} + \alpha_n A\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

この操作を繰り返すと $\alpha_n A^{n-1}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ となる。ところが $A^{n-1}\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ だから $\alpha_n = 0$ 。(*) で $\alpha_n = 0$ とおいて同じ作業を繰り返すと、結局 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ を得る。

(2)

$$\begin{aligned}
 AP &= A \begin{pmatrix} A^{n-1}\mathbf{a} & A^{n-2}\mathbf{a} & \cdots & A\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A^{n-1}\mathbf{a} & \cdots & A^2\mathbf{a} & A\mathbf{a} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A^{n-1}\mathbf{a} & A^{n-2}\mathbf{a} & \cdots & A\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\
 &= P \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

よって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3 対称行列

行列の三角化

正方行列は必ずしも対角化可能ではないが、対角行列に形の近い三角行列に変形にすることは可能である。ここでは固有値が実数の場合を扱う。

定理 1. n 次実正方行列 A の固有値がすべて実数ならば、適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と三角行列に変形できる。特に P として直交行列をとることができる。

対称行列の対角化

n 次正方行列 A は、 ${}^tA = A$ をみたすとき対称行列であると定義した。もしさらに A の成分が実数であれば、 A は実対称行列であるという。

定理 2. 実対称行列 A の固有値はすべて実数である。

定理 3. 実対称行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する。

定理 4. 実対称行列 A は適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化される。特に P として直交行列をとることができる。

A を対角化する直交行列 P は次のように作ることができる。 n 次実対称行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ とする。各固有値 λ_i の重複度を n_i ($i = 1, 2, \dots, r$) とし、各 λ_i に対する固有空間の基底を \mathbf{x}_{ik} ($k = 1, 2, \dots, n_i$) とおく。各 i について、 n_i 個のベクトル $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{in_i}$ は 1 次独立だから、これらをグラム・シュミットの方法で正規直交化する。このとき n 個のベクトル

$$\mathbf{x}_{11}, \dots, \mathbf{x}_{1n_1}, \mathbf{x}_{21}, \dots, \mathbf{x}_{2n_2}, \dots, \mathbf{x}_{r1}, \dots, \mathbf{x}_{rn_r}$$

は \mathbf{R}^n の正規直交基底になる。したがって n 次正方行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{11} & \cdots & \mathbf{x}_{1n_1} & \mathbf{x}_{21} & \cdots & \mathbf{x}_{2n_2} & \cdots & \mathbf{x}_{r1} & \cdots & \mathbf{x}_{rn_r} \end{pmatrix}$$

と定めると、 P は直交行列であって、さらに A を対角化する行列になる。

正規行列

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、転置行列 tA のすべての成分を共役複素数に置き換えた行列を A^* で表す。すなわち $A^* = (\overline{a_{ji}})$ ($\overline{a_{ji}}$ は a_{ji} の共役複素数) である。

n 次正方行列 A が $A^*A = AA^*$ をみたすとき、 A は正規行列であるという。

例 1. $A = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから、 A は正規行列である。

例 2. $A^* = A$ をみたす行列 A は正規行列である。このような A をエルミート行列という。成分がすべて実数のエルミート行列は実対称行列である。

例 3. $U^*U = UU^* = E$ をみたす行列 U も正規行列である。このような U をユニタリー行列という。成分がすべて実数のユニタリー行列は直交行列である。

定理 5. ユニタリー行列の固有値の絶対値は 1 である。

定理 6. A が正規行列ならば、 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直

交する。ただし、ベクトルの内積は、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

とする。

定理 7. 正規行列 A は適当なユニタリー行列 U によって

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化される。ここで $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は A の固有値である。逆に、正方行列 A がユニタリー行列 U によって対角化可能ならば、 A は正規行列である。

例題 1.

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A の固有ベクトルを求めよ.
- (3) tTAT が対角行列になるような直交行列 T を求めよ.

解答 (1) $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)(x-4)$ より

A の固有値は 1, 2, 4 である.

(2) 固有値 1, 2, 4 に対する固有ベクトルはそれぞれ $t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t, s, u は 0 でない任意定数) である.

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は定理 3 より互いに直交する. これらの

ベクトルの長さを 1 にして並べた行列を $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

とおけば T は直交行列で ${}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

例題 2.

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列 P により上三角行列にせよ.

解答 A の固有方程式は $(x-1)^2(x-2)$ で, 固有値は 1, 2. 固有値 1 に対す

る固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる. これを含む \mathbf{R}^3 の1組の

基底をつくる. 例えば $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし, 次にこれを正規直交

化すれば

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

そこで $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと Q は直交行列で

$$Q^{-1}AQ = {}^tQAQ = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

となる.

次に $B = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ とおき, B に同様の作業を行う. B の固有値

は 1, 2. 固有値 1 に対する固有ベクトルの 1 つ, 例えば $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ をとる. こ

れを含む \mathbf{R}^2 の 1 組の基底として例えば $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとり, 正規直交

化すると

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{11}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \sqrt{\frac{2}{11}} \end{pmatrix}.$$

よって

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} & \sqrt{\frac{2}{11}} \end{pmatrix}$$

とおくと R は 2 次の直交行列である. さらに

$$P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

とおけば、 P は 3 次の直交行列で

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{\sqrt{11}} & \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \\ 0 & 1 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が得られる.

例題 3.

エルミート行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め,

異なる固有値に対応する固有ベクトルが直交することを示せ.

解答 $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -i & -1 \\ i & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x(x-2)(x+1)$ より A の固有値は

$0, 2, -1$ である.

固有値 $0, 2, -1$ に対する固有ベクトルはそれぞれ $t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $s \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$,

$u \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ (t, s, u は 0 でない任意定数) である.

そこで内積を計算すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = i - i = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i + i = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0.$$

よって異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することがいえる.

A

1. 次の対称行列を直交行列 P で対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{13}{9} \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ とする.

(1) A を直交行列によって対角化せよ.

(2) A^n を求めよ.

3. 対称行列 A, B が直交行列 P, Q によってそれぞれ対角化されるとき, 行列

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

を直交行列によって対角化せよ.

4. 実対称行列 A が零行列でなければ, 任意の自然数 m に対して $A^m \neq O$ であることを証明せよ.

5. 正方行列 A が直交行列によって対角化されるならば, A は対称行列であることを示せ.

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}$ に関して以下の問に答えよ.

(1) A はエルミート行列でないことを示せ.

(2) A は正規行列であることを示せ.

(3) A の固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を求めよ.

(4) (3) で求めた固有ベクトルは直交することを示せ.

(5) A を対角化せよ.

B

1. A が実対称行列であり, かつその固有値がすべて正であるためには, $A = {}^t B B$ となる実正則行列 B があることが必要十分条件であることを証明せよ.

2. (1) 行列式の値が 1 の 3 次直交行列 A は回転軸をもつこと, すなわちある直線のまわりの回転を表すことを示せ.

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{の回転軸は何か.}$$

3. 2×2 型の行列 A がエルミート行列とすると、以下の間に答えよ。

ただし $A^* = {}^t(\bar{A}) = \overline{{}^tA}$ 。

(1) エルミート行列の定義を述べよ。

(2) λ を A の固有値、 \mathbf{x} を λ に対応する固有ベクトルとすると、次が成り立つことを示せ。

$$(i) \mathbf{x}^*(A\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x} \quad (ii) (A\mathbf{x})^* = \mathbf{x}^* A^* \quad (iii) (\lambda \mathbf{x})^* \mathbf{x} = \bar{\lambda} (\mathbf{x}^* \mathbf{x})$$

(3) (2) の結果から $\lambda = \bar{\lambda}$ すなわちエルミート行列の固有値は実数であることを示せ。

4. A を 2 次ユニタリ行列とする。 $A^* \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix} A$ はエルミート行列かつトレース 0 だから

$\begin{pmatrix} X & Y+iZ \\ Y-iZ & -X \end{pmatrix}$ とかける。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

は \mathbf{R}^3 の線形変換となる。その表現行列を \hat{A} とする。

(1) \hat{A} は直交行列であることを示せ。

また $A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ のとき \hat{A} を求めよ。

(2) $\hat{A} = E$ となる A は何か。

A の解答

$$1. (1) \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)(x+2) \text{ より固有値は } 3, -2 \text{ である.}$$

固有値 3, -2 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとること

ができる。 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で

$${}^tP \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる.

$$(2) \begin{vmatrix} x-2 & -a \\ -a & x-2 \end{vmatrix} = (x-2-a)(x-2+a) \text{ より固有値は } 2+a, 2-a$$

である.

$$a=0 \text{ のときは } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ なので, すでに対角化されている.}$$

$$a \neq 0 \text{ のとき, 固有値 } 2+a, 2-a \text{ に対応する固有ベクトルとして } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ をとることができる. } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ とおけば } P \text{ は直交行列で}$$

$${}^t P \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2+a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

となる.

$$(3) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-3) \text{ より固有値は } 0, 1, 3 \text{ である.}$$

$$\text{固有値 } 0, 1, 3 \text{ に対応する固有ベクトルとして } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{をとることができる. } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ とおけば } P \text{ は直交行列で}$$

$${}^t P \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる.

$$(4) \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+1) \text{ より固有値は } 1 \text{ (重複度は } 2),$$

-1 である.

$$\text{固有値 } 1 \text{ に対応する } 1 \text{ 次独立な固有ベクトルとして } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ をとる}$$

ことができる.

固有値 -1 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとることができる.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{とおけば } P \text{ は直交行列で}$$

$${}^tP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる.

$$(5) \begin{vmatrix} x - \frac{13}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & x - \frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & x - \frac{13}{9} \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2) \text{ より固有値は } 1 \text{ (重複度}$$

は 2), 2 である. 固有値 1 に対応する 1 次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる. この 2 つのベクトルは直交していないので正規

直交化すると $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ が得られる.

固有値 2 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることができる.

$$\text{よって } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{とおけば } P \text{ は直交行列で}$$

$${}^tP \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{13}{9} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる.

2. (1) $\begin{vmatrix} x - \frac{5}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)$ より A の固有値は $2, -1$ である. 固

有値 $2, -1$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ をとることができる.

できる. $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で, ${}^tP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

から ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

(2) $A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 2^n + (-1)^n}{4} & \frac{-2^n + (-1)^n \sqrt{3}}{4} \\ \frac{-2^n + (-1)^n \sqrt{3}}{4} & \frac{2^n + 3 \cdot (-1)^n}{4} \end{pmatrix}$

3. $R = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$ は直交行列であり

$${}^tRCR = \begin{pmatrix} {}^tPAP & O \\ O & {}^tQBQ \end{pmatrix}$$

は対角行列である.

4. 直交行列 P で ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とできる. ただし $\lambda_1, \dots,$

λ_n は A の固有値である.

ある自然数 k に対し $A^k = O$ ならば

$$({}^tPAP)^k = {}^tPA^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} = O$$

だから $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ となる. すなわち $A = PO{}^tP = O$ となり対称行列 A が零行列でないことに矛盾する. よってすべての自然数 m に対して $A^m \neq O$ である.

5. ${}^tPAP = B$ (P, B はそれぞれ直交行列および対角行列) とすると, $A = PB{}^tP$ である. この転置を考えると (${}^tB = B$ であるから)

$${}^tA = {}^t(PB{}^tP) = P{}^tB{}^tP = PB{}^tP = A$$

すなわち, A は対称行列である.

6. (1) $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix}$ より $A^* \neq A$. よって A はエルミート行列

でない.

(2)

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 3 \end{pmatrix}$$

よって $A^*A = AA^*$ より A は正規行列である.

$$(3) \begin{vmatrix} x & -1-i \\ 1-i & x+i \end{vmatrix} = (x+2i)(x-i) \text{ より } A \text{ の固有値は } i, -2i.$$

固有値 $\lambda_1 = i$ に対する固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ (t_1 は任意定数, $t_1 \neq 0$).

固有値 $\lambda_2 = -2i$ に対する固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$ (t_2 は任意定数, $t_2 \neq 0$).

$$(4) \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = t_1 \bar{t}_2 \begin{pmatrix} 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} = 0$$

$$(5) P = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \text{ とおけば}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B の解答

1. A が実対称行列ならば直交行列 P で ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と

できる。このとき

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP$$

である。 $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ならば

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP$$

とおけば B は正則で

$${}^tBB = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP = A$$

となる。逆に実正則行列 B があって、 $A = {}^tBB$ と仮定する。 λ を A の固有値、 \mathbf{x} をその固有ベクトルとすると $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ より

$${}^t(B\mathbf{x})B\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = \lambda {}^t\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ より ${}^t\mathbf{x}\mathbf{x} > 0$ で ${}^t(B\mathbf{x})B\mathbf{x} > 0$ だから $\lambda > 0$ となる。

2. (1) 定理5より A はユニタリ行列だからその固有値の絶対値は1である。3次実行列の固有方程式は実係数の3次方程式だから必ず実数解をもつ。すなわち3次実行列には必ず実数の固有値 μ が存在する。他の固有値も実数の場合は固有値の絶対値が1であることと固有値の積が $|A| = 1$ となることより必ず固有値1をもつことがわかる。他の固有値が虚数 λ ($|\lambda| = 1$) である場合は $\bar{\lambda}$ も固有値であることと、固有値の積が $|A| = 1$ であることから $\mu\lambda\bar{\lambda} = \mu|\lambda|^2 = 1$ 。ゆえに $\mu = 1$ 。よっていずれにせよ固有値1をもつ。

そこで固有値1に対応する固有ベクトル \mathbf{e} をふくむ正規直交基底により f_A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & B & \end{pmatrix}$$

と表現され、 B は2次直交行列で、行列式の値が1であるから原点のまわりの回転を表す。

従って A は e を含む直線のまわりの回転である.

(2) 固有値 1 に対する固有ベクトルは $e = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから回転軸は

直線 $x = y = z$ である. ($A^3 = E$ だから回転角は $\frac{2}{3}\pi$)

3. (1) $A^* = A$

(2) (i) $Ax = \lambda x$ より $x^*(Ax) = \lambda x^*x$

(ii) $(Ax)^* = {}^t(\overline{Ax}) = {}^t(\overline{A}\overline{x}) = {}^t(\overline{x}){}^t(\overline{A}) = x^*A^*$

(iii) $(\lambda x)^* = {}^t(\overline{\lambda x}) = {}^t(\overline{\lambda}\overline{x}) = \overline{\lambda}{}^t\overline{x} = \overline{\lambda}x^*$ より $(\lambda x)^*x = \overline{\lambda}(x^*x)$

(3) (i) より $x^*(Ax) = \lambda x^*x$. 一方 $A^* = A$ と (ii), (iii) より

$$x^*(Ax) = (x^*A^*)x = (Ax)^*x = (\lambda x)^*x = \overline{\lambda}x^*x$$

$$\therefore \lambda x^*x = \overline{\lambda}x^*x.$$

$x \neq 0$ より $x^*x > 0$ だから $\lambda = \overline{\lambda}$.

4.

(1) $A^* \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} X & Y+iZ \\ Y-iZ & -X \end{pmatrix}$ の両辺の行列式

をとれば

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

よってベクトルの長さが不変だから \hat{A} は直交行列となる.

$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$ のとき $X = x$, $Y+iZ = e^{-2i\alpha}(y+iz) = y \cos 2\alpha + z \sin 2\alpha + i(-y \sin 2\alpha + z \cos 2\alpha)$ だから

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

また $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ のとき

$\begin{cases} X = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ Y = -x \cos 2\theta + y \cos 2\theta \\ Z = z \end{cases}$ だから $\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\hat{A} = E \iff \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix}$ がすべ

ての x, y, z につき成立する

$$\Leftrightarrow A \text{ が } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ と可換である}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ はスカラー行列である, すなわち } A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (} |a| = 1 \text{)}.$$

5.4 2次曲線の分類

2次形式

n 個の変数 x_1, x_2, \dots, x_n に関する実係数の斉2次式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad \dots\dots \quad \textcircled{1}$$

(a_{ij} は実定数で, $a_{ij} = a_{ji}$) を (実) 2次形式という.

例. $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{で } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = (a_{ij}) \text{ とおくと}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = {}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}$$

と書ける. ここで A は実対称行列だから, n 次直交行列 P が存在して

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{と変形できる. このとき}$$

$$\mathbf{x} = P \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \dots\dots \quad \textcircled{2}$$

とおくと

$${}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = {}^t \mathbf{y} {}^t P A P \mathbf{y} = {}^t \mathbf{y} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

すなわち

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad \dots\dots \quad \textcircled{3}$$

を得る. ③の右辺を2次形式①の標準形という.

2次曲線とその分類

次の方程式で表される xy 平面上の曲線を2次曲線という.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \dots\dots ④$$

ここで a, b, c, d, e, f は実数で, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする.

2次曲線を適当な座標変換を行うことにより分類してみよう. ④の左辺におい

て $ax^2 + 2bxy + cy^2$ は2次形式だから, 適当な直交行列 $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

をとって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \dots\dots ⑤$$

とおくことにより, 標準形

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \alpha x'^2 + \beta y'^2$$

が得られる. ここで α, β は $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値である. したがって⑤

の変換(座標軸の回転)によって, ④は

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0 \quad \dots\dots ⑥$$

の形に書くことができる.

$\alpha\beta \neq 0$ のとき, 変換 $x' = X + x_0, y' = Y + y_0$ (座標軸の平行移動) によって⑥は $\alpha X^2 + \beta Y^2 + f'' = 0$ となる. これは

$\alpha\beta > 0$ のとき楕円(1点又は空集合の場合を含む)

$\alpha\beta < 0$ のとき双曲線(交わる2直線の場合を含む)

を表す.

$\alpha\beta = 0$ のとき, 例えば $\beta = 0$ のときは, ⑥において座標軸の平行移動を行うと

$$\alpha X^2 + e'Y = 0 \quad (e' \neq 0 \text{ のとき}), \quad \alpha X^2 + f'' = 0 \quad (e' = 0 \text{ のとき})$$

の形になる. これらはそれぞれ放物線, 平行2直線(1直線又は空集合の場合を含む)を表す. $\alpha = 0$ のときも同様の考察により, 同じ形の曲線が得られることがわかる. ところで, 5.1の定理1より $\alpha\beta = |A| = ac - b^2$ であった. したがって2次曲線④は

$ac - b^2 > 0$ のとき楕円 (1 点又は空集合の場合を含む)

$ac - b^2 < 0$ のとき双曲線 (交わる 2 直線の場合を含む)

$ac - b^2 = 0$ のとき放物線 (平行 2 直線, 1 直線又は空集合の場合を含む)

と分類される.

例題 1.

次の 2 次形式の標準形と変形に使われる直交行列 P を求めよ.

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$$

解答 $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ とおけば}$$

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 2 & x-5 \end{vmatrix} = (x-6)(x-1)$$

より A の固有値は 1, 6 である.

固有値 1, 6 に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることがで

きる. $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ と

なる. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおけば $f(x, y) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X^2 + 6Y^2$. よって $f(x, y)$ の標準形は $X^2 + 6Y^2$ である.

例題 2.

次の 2 次曲線のグラフをかけ.

$$(1) 2x^2 - 4xy + 5y^2 = 36 \quad (2) x^2 - 6xy + y^2 + 2 = 0$$

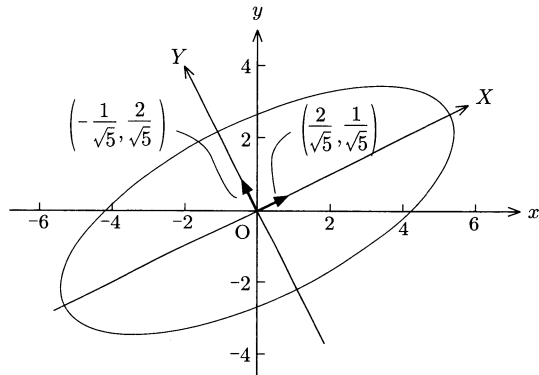
解答 (1) 例題1より $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおくと

$$X^2 + 6Y^2 = 36$$

すなわち

$$\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{6} = 1 \quad (\text{楕円})$$

である.



(2) $x^2 - 6xy + y^2 + 2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 = 0$ と表せる.

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化する. 固有方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 3 & x-1 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2) = 0$ より固有値は $-2, 4$ である.

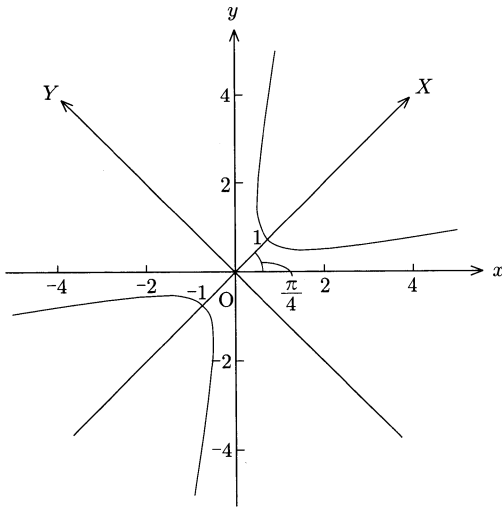
固有値 $-2, 4$ に対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとること

ができる. 直交行列 P として $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

とおき, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$\begin{aligned} x^2 - 6xy + y^2 + 2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2 \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2 \\ &= -2X^2 + 4Y^2 + 2 = 0, \end{aligned}$$

すなわち $X^2 - 2Y^2 = 1$ (双曲線) である.



A

1. 次の2次形式の標準形と変形に使われる直交行列 P を求めよ.

- (1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ (2) $f(x, y) = 6xy$ (3) $f(x, y) = 3xy + 4y^2$
 (4) $f(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$

2. 次の2次曲線のグラフをかけ.

- (1) $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 5$ (2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$
 (3) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = 0$
 (4) $x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y = 0$

B

1. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ のとき, 関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$
 (a_{ij} は実数で $a_{ij} = a_{ji}$) の最大値と最小値はそれぞれ行列 $A = (a_{ij})$ の固有値
 の最大値と最小値に等しいことを示せ.

A の解答

1. (1) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の
 固有値は $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ で, 対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとる

ことができる. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば $f(x, y) = (X \ Y) {}^t P \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X \ Y) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2$ となり標準形が得られる.

(2) $f(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $3, -3$ で, 対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとることができる. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば $f(x, y) = (X \ Y) {}^t P \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} =$

$$(X \ Y) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 3X^2 - 3Y^2 \text{ となり標準形が得られる.}$$

(3) $f(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}$ で, 対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとることが

ことができる. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば $f(x, y) = (X \ Y) {}^t P \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X \ Y) \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{9}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2$ となり標準形が得られる.

(4) $f(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表せる.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $2, -1$ (重複度は 2) である. 固有値 2 に対応す

る固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる. 固有値 -1 に対応す

る1次独立な固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ をとることができる.

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

とおけば $f(x, y, z) = (X \ Y \ Z) {}^t P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} =$

$(X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 2X^2 - Y^2 - Z^2$ となり標準形

が得られる.

2. (1) $3x^2 + 4xy + 3y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せる. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

の固有値は $1, 5$ であり, 対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をと

ることができる. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$ とお

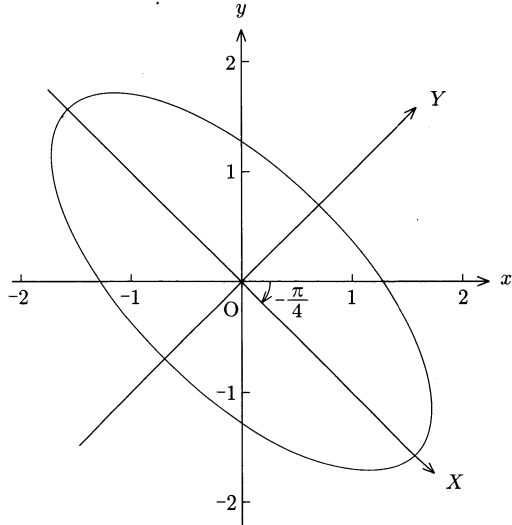
けば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 5 = (X \ Y) {}^t P \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 5$$

$$= (X \ Y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 5$$

$$= X^2 + 5Y^2 - 5 = 0,$$

すなわち $\frac{X^2}{5} + Y^2 = 1$ (楕円) である.



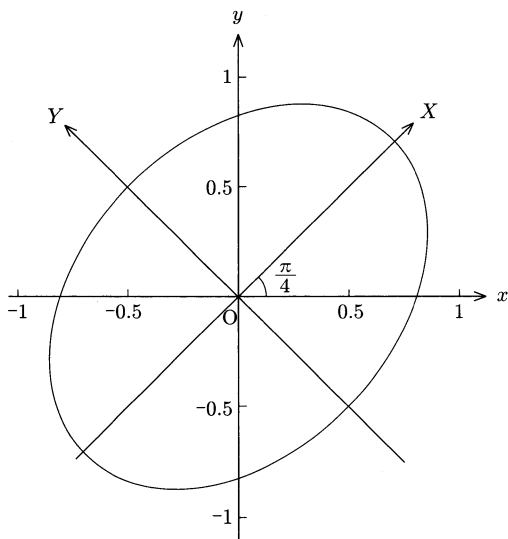
$$(2) 3x^2 - 2xy + 3y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ と表せる.}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ の固有値は } 2, 4 \text{ で, 対応する固有ベクトルとして } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ をとることができる. } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

とおけば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 2 \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 2 \\ &= 2X^2 + 4Y^2 - 2 = 0, \end{aligned}$$

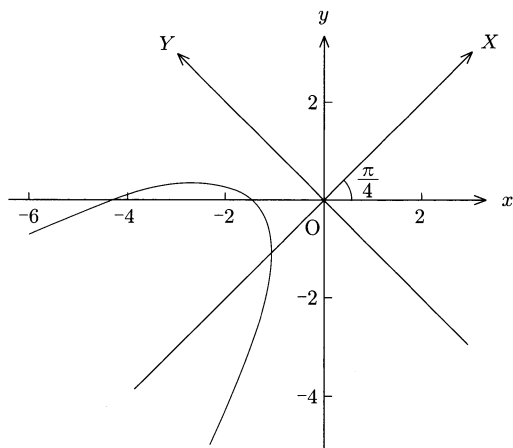
すなわち $X^2 + 2Y^2 = 1$ (楕円) である.



(3) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6$ と表せる. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $0, 2$ で, 対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と変換すれば

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 6 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 6 \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 6 \\ &= 2Y^2 + 4X - 4Y + 6 = 0, \end{aligned}$$

すなわち $X = -\frac{1}{2}(Y-1)^2 - 1$ (放物線) である.



$$(4) \quad x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ と表せる. } \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ の固有値は } \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \text{ で, 対応}$$

$$\text{する固有ベクトルとして } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ をとることができる. } P =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \text{ とおけば } P \text{ は直交行列で, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ と変換すれば}$$

$$x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y$$

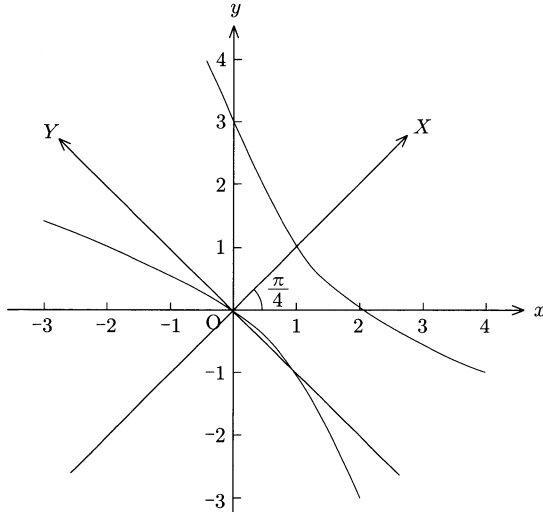
$$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y$$

$$= \frac{5}{2} \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(Y + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 = 0,$$

$$\text{すなわち } \frac{\left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{5} \right)^2} - \frac{\left(Y + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \text{ (双曲線) である.}$$



B の解答

1. 対称行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$) とする. 適当

な直交行列 P を選んで $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とすれば

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} = {}^t \mathbf{y} {}^t P A P \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

P は直交行列だから $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}| = 1$. このとき

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n y_i^2 = \lambda_n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1$$

より $\lambda_1 \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \lambda_n$.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のとき } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_n,$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1$$

だから $f(x_1, \dots, x_n)$ は最大値 λ_n , 最小値 λ_1 をとる.

索引

- あ行
- 1次関係式 118
- 1次結合 103, 118
- 1次従属 117, 118
- 1次独立 117, 118
- 1次変換 131
- 上三角行列 30
- n 次元行ベクトル空間 102
- n 次元列ベクトル空間 102
- エルミート行列 192
- か行
- 解空間 103
- 階数 42
- 階段行列 39, 42
- 回転行列 154
- 核 (kernel) 132
- 拡大係数行列 40, 42
- 型 24
- 括弧積 (bracket) 31
- 奇順列 72
- 基底 116
- 基底の変換行列 134
- 基底ベクトル 116
- 基本解 103
- 基本単位ベクトル 25
- 基本変形 42
- 逆行列 58
- 球面の方程式 12
- 行ベクトル 24
- 行列式 (determinant) 72
- 行列の成分 24
- 空間ベクトルの外積 (ベクトル積) 3
- 偶順列 72
- グラム・シュミット (Gram-Schmidt) の正規直交化法 153
- クラメル (Cramer) の公式 90
- 係数行列 39, 42
- 交代行列 27
- 固有空間 167
- 固有多項式 168
- 固有値 167
- 固有ベクトル 167
- 固有方程式 168
- さ行
- 座標軸 116
- 座標ベクトル 133
- 三角化 191
- 三角行列 30
- 次元 116
- 下三角行列 30
- 実対称行列 191
- 自明な1次関係式 118
- 写像 131
- シュヴァルツ (Schwarz) の不等式 5
- 重複度 168
- 順列 72
- 順列の符号 72
- スカラー三重積 4
- 正規行列 192
- 正規直交基底 151
- 正規直交系 151
- 正射影 152
- 生成元 103
- 生成する部分空間 103
- 正則行列 58
- 正方行列 24
- 零行列 25
- 線形写像 131
- 線形写像の階数 133
- 線形性 131
- 線形変換 131
- 像 (image) 132
- た行
- 対角化 180
- 対角化可能 180
- 対角行列 27
- 対角成分 24
- 対称行列 27
- たすき掛け 73
- 単位行列 25
- 直線のパラメータ表示 12
- 直線の方程式 11
- 直交 151
- 直交基底 151
- 直交行列 31, 154
- 直交系 151
- 直交変換 153
- 直交補空間 151
- 転置行列 26
- 転倒数 72
- 点と平面の距離 12
- 同次連立1次方程式 42
- 独立最大数 118
- 独立最大の組 118
- トレース 31
- な行
- 内積空間 150
- 2次曲線 206
- 2次形式 205
- ノルム 150
- は行
- 掃き出し法 42
- ハミルトン・ケーリー (Hamilton-Cayley) の定理 170

非自明解 43
 非自明な1次関係式 118
 左手系 4, 75
 表現行列 132, 133
 標準基底 117
 部分空間 103
 平行六面体 4, 75
 平面のパラメータ表示 12
 平面の方程式 11
 巾零 31
 ベクトルの内積 (スカラー積)
 2

ベクトルの長さ 150
 方向ベクトル 11
 法線ベクトル 12
 ま行
 右手系 3, 75
 や行
 ヤコビ (Jacobi) の恒等式
 31
 ユークリッド内積 150

ユニタリー行列 192
 余因子 89
 余因子行列 89
 余因子展開 89
 ら行
 累乗 26, 58
 列ベクトル 24

著 者

ふるた こうじ 古田 公司 東京都市大学数学部門
いのうえ こういち 井上 浩一 東京都市大学数学部門
さとう しづこ 佐藤 シヅ子 元東京都市大学数学部門
よしだ めい 吉田 稔 東京都市大学数学部門

とうきょうと しだいがくすうがく
東京都市大学数学シリーズ (2)

せんけいだいすうえんしゅう
線形代数演習

2007年4月10日	第1版 第1刷	発行
2008年4月10日	第2版 第1刷	発行
2012年3月30日	第2版 第5刷	発行

著 者 古田 公司
井上 浩一
佐藤 シヅ子
吉田 稔
発行者 発田 寿々子
発行所 株式会社 学術図書出版社

〒113-0033 東京都文京区本郷5丁目4の6
TEL 03-3811-0889 振替 00110-4-28454
印刷 三松堂印刷 (株)

定価は表紙に表示してあります。

本書の一部または全部を無断で複写 (コピー)・複製・転載することは、著作権法で定められた場合を除き、著者および出版社の権利の侵害となります。あらかじめ、小社に許諾を求めて下さい。

© K. FURUTA, K. INOUE, S. SATOH, M. YOSHIDA

2005, 2008 Printed in Japan

ISBN978-4-7806-0082-7 C3041