

## 第4章

# ベクトル空間

### 4.1 ベクトル空間とその部分空間

#### ベクトル空間

1行だけの行列や1列だけの行列を行ベクトルや列ベクトルと呼んだ。これらをまとめて数ベクトルと呼び、実数を成分とする  $n$ 次元列ベクトルや行ベクトルの全体である

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbf{R}_n = \{(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)\}$$

をそれぞれ  $n$ 次元列ベクトル空間、 $n$ 次元行ベクトル空間と呼ぶ。主に列ベクトル空間を考えることが多い。 $\mathbf{R} (= \mathbf{R}^1 = \mathbf{R}_1)$  は実数全体、 $\mathbf{R}^2$  は  $xy$  平面、 $\mathbf{R}^3$  は  $xyz$  空間と対応している。複素数を成分とする数ベクトルを考えると、 $\mathbf{C}^n$ 、 $\mathbf{C}_n$  も同様に定義できる。

$n$ 次元列ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  のベクトルについては以下の性質が成り立つことがわかる。

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n \text{ ならば } \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$$

$$\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, k \in \mathbf{R} \text{ ならば } k\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$$

つまり、和と実数倍について閉じているという性質であり、これを線形性と呼ぶ。

一般に、集合  $V$  の要素について上と同様の性質が成り立つ場合、その集合のことを（一般の）ベクトル空間と呼ぶが、ここではあまり詳しく触れない。 $n$ 次以下の多項式の全体や連続関数の全体などが例としてあげられる。

#### 部分空間

ベクトル空間の部分集合がそれ自身上記のような線形性をもつ場合、その部

分集合のことを部分空間と呼ぶ。  $xy$  平面において原点を通る直線は部分空間であり、  $xyz$  空間において原点を通る平面は部分空間である。  $xy$  平面の第 1 象限や、  $xyz$  空間における原点を通らない平面などは部分空間にならない。

2つの部分空間の共通部分も部分空間となるが、一方がもう一方に完全に含まれている場合を除き、合併集合は部分空間とはならない。

$n$ 次元列ベクトル空間、  $n$ 次元行ベクトル空間およびそれらの部分空間のことを総称して数ベクトル空間と呼ぶ。

この章ではベクトル空間として数ベクトル空間を考えるが、一般のベクトル空間についてあてはまる事柄も多い。

### 同次連立 1 次方程式の解空間

$m \times n$  型の行列  $A$  を係数行列とする同次連立 1 次方程式

$$Av = \mathbf{0}$$

の解の全体である

$$W_A = \{v \mid Av = \mathbf{0}\}$$

は  $\mathbf{R}^n$  の部分空間となる。これを同次連立 1 次方程式の解空間と呼ぶ。

定数項ベクトルが零ベクトルでないような、一般の連立 1 次方程式の解の全体は部分空間とならない。

### 生成元

$\mathbf{R}^n$  のいくつかのベクトル  $v_1, v_2, \dots, v_k$  を考えたとき、これらの実数倍の和のことを 1 次結合と呼び、1 次結合の全体である

$$V = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbf{R}\}$$

は  $\mathbf{R}^n$  の部分空間となる。これを  $v_1, v_2, \dots, v_k$  の生成する（張る）部分空間と呼び、 $v_1, v_2, \dots, v_k$  のことを  $V$  の生成元と呼ぶ。 $v_1, v_2, \dots, v_k$  の生成する部分空間のことを

$$W\{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$$

などと書き表す。

同次連立 1 次方程式の一般解  $v$  は、基本解と呼ばれるいくつかのベクトル  $v_1, v_2, \dots, v_k$  によって

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \quad (a_1, a_2, \dots, a_k \text{ は任意実数})$$

と書き表されるので、解空間は基本解によって生成されていることになる。

例題 1.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - 4z = 0 \right\}$$

は  $\mathbf{R}^3$  の部分空間であることを示せ.

解答  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbf{R}$  とする. このとき

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 4z_1 = 0 & \cdots \cdots \text{①} \\ 2x_2 + y_2 - 4z_2 = 0 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

が成立する. これらのベクトルの和と実数倍を成分で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}$$

となるが, ここで

$$\text{①} + \text{②} \text{ より } 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - 4(z_1 + z_2) = 0$$

$$k \times \text{①} \text{ より } 2(kx_1) + ky_1 - 4(kz_1) = 0$$

が成立することがわかるので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W$$

となり,  $W$  は  $\mathbf{R}^3$  の部分空間である.

## 例題 2.

次の集合は  $\mathbf{R}^n$  の部分空間であるかどうか確かめよ.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 = 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1 a_2 = 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid 2a_1 - a_2 = a_n \right\},$$

$M_4 = M_1 \cup M_3$ ,  $M_5 = M_1 \cap M_3$ . ただし  $n \geq 3$  とする.

解答  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_1$  ならば  $a_1 + a_2 = 0, b_1 + b_2 = 0$  だから,

和  $\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$  と実数倍  $\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$  も条件  $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0$ ,

$ka_1 + ka_2 = 0$  を満たすので  $M_1$  に属する. よって  $M_1$  は部分空間である.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_2 \text{ だが和 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は } M_2 \text{ に属さないから } M_2 \text{ は部分空}$$

間でない.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_3 \text{ ならば } 2a_1 - a_2 = a_n, 2b_1 - b_2 = b_n \text{ だか}$$

$$\text{ら和} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \text{と実数倍} \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} \text{も条件 } 2(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) =$$

$a_n + b_n, 2(ka_1) - ka_2 = ka_n$  を満たすので  $M_3$  に属する. よって  $M_3$  は部分空間である.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_3 \text{ だが, 和} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \notin M_1 \cup M_3. \text{ よって } M_4$$

は部分空間でない.

$u, v \in M_5$  ならば  $u, v \in M_1$  かつ  $u, v \in M_3$ .  $M_1$  と  $M_3$  は部分空間だから  $u + v \in M_1$  かつ  $u + v \in M_3$  で,  $k \in \mathbf{R}$  に対し  $ku \in M_1$  かつ  $ku \in M_3$ . よって  $u + v, ku \in M_1 \cap M_3$  となり  $M_5 = M_1 \cap M_3$  は部分空間である.

### 例題 3.

次の関係が成り立つかどうか調べよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

解答 (1)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  となる数  $a, b$  を求めてみる.

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2 \\ a + 4b = 3 \end{cases} \text{ を解くと } a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{4}{5} \text{ となる.}$$

よって  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  となるから

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ となる数 } a, b \text{ を求めてみる.}$$

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2 & \cdots \cdots \text{ ①} \\ a + 4b = 1 & \cdots \cdots \text{ ②} \\ 5a + 7b = 6 & \cdots \cdots \text{ ③} \end{cases}$$

①と②より  $a = 1, b = 0$  となる. この  $a, b$  は③を満たさない.

$$\text{よって } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ となる } a, b \text{ は存在しないから}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \text{ は成り立たない. すなわち}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

A

---

1. 次の集合は  $\mathbf{R}^2$  の部分空間であるかどうか確かめよ.

$$(1) S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\} \quad (2) S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 1 \right\}$$

$$(3) S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = x^2 \right\} \quad (4) S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 \leq 0 \right\}$$

2. 次の集合は  $\mathbf{R}^3$  の部分空間であるかどうか確かめよ.

$$(1) S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y \geq z \right\} \quad (2) S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3} \right\}$$

$$(3) S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{-3} \right\}$$

$$(4) S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y - z = 0, \\ y + 2z = 0 \end{array} \right\} \quad (5) S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y = 0, \\ y + z - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(6) S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y^2 + z^2 = 2yz \right\} \quad (7) S_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 = z^2 \right\}$$

3.  $A$  を  $m \times n$  型の行列とすると、 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の部分空間であることを表せ。

4. 次の集合は  $\mathbf{R}^n$  の部分空間であるかどうか確かめよ。

$$(1) S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n ix_i = 0 \right\} \quad (2) S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \right\}$$

$$(3) S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\} \quad (4) S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_4, \\ \dots, \\ x_{n-1} = x_n \end{array} \right\} \quad (n \text{ は偶数})$$

5. 次の関係が成り立つかどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

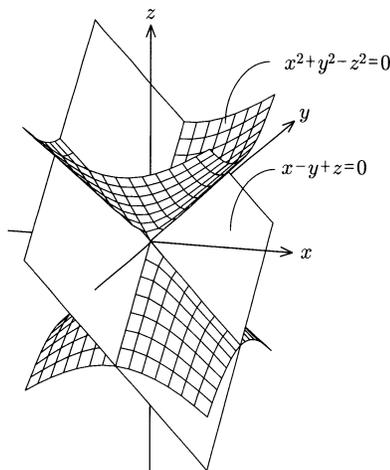
6. 次の部分空間を図示せよ.

$$(1) W \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(4) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (5) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**B**

1.  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, x - y + z = 0 \right\}$  は  $\mathbf{R}^3$  の部分空間か.



2. 平行四辺形は1つの対角線によって面積の等しい2つの三角形に分割される.

(1) 平行六面体は体積の等しい6つの四面体に分割されることを示せ.

(2) 平行六面体の4次元版, すなわち1次独立なベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^4$  に対し

$$S = \{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c} + v\mathbf{d} \in \mathbf{R}^4 \mid 0 \leq s, t, u, v \leq 1\}$$

は四面体の4次元版のもの, すなわち

$$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c} + v\mathbf{d} \in \mathbf{R}^4 \mid s + t + u + v \leq 1, 0 \leq s, t, u, v\}$$

と体積の等しいような, いくつかの部分に分割されるか調べよ.

## A の解答

1. (1) 条件式  $x + y = 0$  は原点を通る直線を表すから、 $S_1$  は部分空間である。

$$(S_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{である.})$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2 \text{ より } S_2 \text{ は部分空間でない.}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_3 \text{ だが } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S_3$$

なので  $S_3$  は部分空間でない。

$$(4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_4 \text{ だが } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_4$$

なので  $S_4$  は部分空間でない。

$$2. (1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_1 \text{ だが } (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_1 \text{ なので } S_1 \text{ は部分空間ではない.}$$

(2) 条件式は原点を通る直線を表しているので  $S_2$  は部分空間である。

$$(S_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{となる.})$$

$$(3) \text{条件式は原点を通らない直線を表しているので } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_3. \text{ よって } S_3$$

は部分空間でない。

(4) 条件式は原点を通る平行でない2平面の共通部分を表しているので原点

$$\text{を通る直線となり, } S_4 \text{ は部分空間である. } (S_4 = W \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{となる.})$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_5 \text{ なので } S_5 \text{ は部分空間でない. (注: 条件式は原点を通る平面と原点を通らない平面との共通部分を表しているから原点を通らない直線を表している.)}$$

(6)  $y^2 + z^2 = 2yz \iff y = z$  なので条件式は原点を通る平面を表している。

よって  $S_6$  は部分空間である. ( $S_6 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  となる.)

$$(7) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_7 \text{ だが } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_7$$

なので  $S_7$  は部分空間でない.

3.  $Ax = 0, Ay = 0$  とすれば  $A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$ ,  
 $A(kx) = kAx = k \cdot 0 = 0$ .

よって  $x, y \in \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax = 0\}$ ,  $k \in \mathbf{R}$  ならば

$$x+y, kx \in \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax = 0\}$$

となるから  $\{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax = 0\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の部分空間である.

$$4. (1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S_1, k \in \mathbf{R} \text{ とすると } \sum_{i=1}^n ix_i = 0, \sum_{i=1}^n iy_i = 0.$$

このとき, 和  $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$  と実数倍  $\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$  も  $\sum_{i=1}^n i(x_i+y_i) = 0$ ,

$\sum_{i=1}^n i(kx_i) = 0$  を満たすから  $S_1$  に属する. よって  $S_1$  は部分空間である.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S_2 \text{ だが } (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_2 \text{ なので } S_2 \text{ は部分空}$$

間でない.

$$(3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_3 \text{ より } S_3 \text{ は部分空間でない.}$$

$$(4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S_4, k \in \mathbf{R} \text{ とすれば } x_1 = x_2, x_3 = x_4, \dots,$$

$$x_{n-1} = x_n, y_1 = y_2, y_3 = y_4, \dots, y_{n-1} = y_n \text{ を満たすから和 } \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{と実数倍 } \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} \text{ も } x_1 + y_1 = x_2 + y_2, x_3 + y_3 = x_4 + y_4, \dots,$$

$x_{n-1} + y_{n-1} = x_n + y_n, kx_1 = kx_2, kx_3 = kx_4, \dots, kx_{n-1} = kx_n$  を満たす. よって  $S_4$  は部分空間である.

$$5. (1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より } W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{だから } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \notin W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ となる数 } a, b, c \text{ を}$$

$$\text{求めてみる. 連立1次方程式 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を解けば

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

よって,  $t$  は任意だから例えば  $t=0$  のときの  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  を使って

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と表せるので

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(3) (2) \text{ と同様な方法で } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{19}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{7}{19} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4) (2) と同様な方法で

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

となるから

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \in W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ となる数}$$

$a, b, c, d$  が存在するかどうか調べる. この連立1次方程式の拡大係数行列を簡

約行列に変形すると

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

となるので、このような  $a, b, c, d$  は存在しない。よって

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

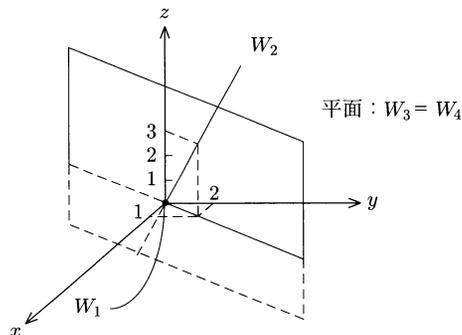
6. (1)~(5) の部分空間を順に  $W_1 \sim W_5$  とする。ベクトルと位置ベクトルの終点を対応させて図示する。 $W_1$  は原点に対応する。 $W_2$  は原点を通る直線に対応する。 $W_3$  は原点を通る平面に対応する。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より  $W_4 = W_3$  となる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x-3y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから  $W_5$  は  $xyz$  空間に対応している。よって  $W_1 \sim W_4$  を図示すると次のようになる。



## B の解答

$$1. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x - y + z = 0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より  $x = y - z$ , ①より  $x^2 + (y + z)(y - z) = 0$  にこれを代入すると  $(y - z)^2 + (y + z)(y - z) = 0$ , すなわち  $2y(y - z) = 0$ . よって

$$y = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

もしくは

$$y - z = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③の時は, ①は  $x^2 - z^2 = 0$ , ②は  $x + z = 0$  で, ②が成立すれば①も成立するので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad (a \text{ は任意}), \quad \text{特に} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W.$$

④の時は, ②は  $x = 0$ . すると①は  $y^2 - z^2 = 0$  で, ④が成立すれば①も成立するので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} \quad (b \text{ は任意}), \quad \text{特に} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W.$$

$W$  が部分空間なら

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

となるはずだが,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  は①の条件を満たさない. よって  $W$  は部分空間で

はない.

2. (1) 平行六面体の1つの頂点を固定する. その頂点を含まない面が3つある. それら3つの面の各々と固定された頂点で錐を作るとよい. 平行六面体はこれら3つの錐に分割され, さらに問題の前置きにした平行四辺形の分割により各錐は2つの四面体に分割される.

(2) (1)の考えを式を頼りに応用するとよい. 例えば  $S$  において固定する頂点を  $s = t = u = v = 0$  としたとき,  $s = 1, 0 \leq t, u, v \leq 1$  はこれに含まない1つの3次元面(平行六面体)である. このような3次元面が4つ存在することに注意すれば答は24個である.

## 4.2 次元と基底・1次独立性

### 次元と基底

点を0次元，直線を1次元，平面を2次元，空間を3次元というが，この次元という概念はベクトル空間の広がり程度を表している．点は広がりをもたず，直線は1方向に広がっており，平面はある直線方向とさらにもう1つ別の方向に広がっていると考えられ，空間は3方向への広がりをもつ．

直線上に原点を定め，直線上のベクトル  $\mathbf{v}_1$  を1つ決めれば，その直線上の点の位置を実数値で表すことができる．このようにして定義するのが数直線だが，このとき，任意の点の位置ベクトル  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{v}_1$  を単位として

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1$$

と表され， $a$  が位置を表す実数値，すなわち座標成分ということになる．そして直線の場合はこの1つの数値で点の位置が定まるので，広がり程度は1方向，つまり，1次元であるということになる．

平面の場合も，2つの座標軸を導入することで点の位置を2つの実数値の組で表すことができるが，この場合も，2つの座標軸の単位になるベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  を決めて

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$$

のようにして平面上の点の位置ベクトルを表すときの  $a_1, a_2$  が座標成分ということになる，平面上の点を表すにはどうしても2方向考えなくてはならず，しかも2方向で十分なので，広がり程度は2方向，つまり2次元であるということになる．

これを一般化して考えてみると，ベクトル空間の広がり程度を表す次元という値は，いくつの座標軸を導入して考えなくてはいけないか，言い換えると，座標軸の単位になるベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$  をいくつ導入すれば，そのベクトル空間のすべてのベクトルを

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$$

のように表せるか，その必要かつ十分な個数  $n$  を意味しているのだ．

ここで考えた座標軸の単位になるベクトルのことを基底ベクトルと呼ぶ．ベクトル空間  $V$  の基底とは，そのベクトル空間のすべてのベクトル  $\mathbf{v}$  を上のように1次結合で表すために必要なベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  のことである．すなわち，ベクトル空間の生成元であって，どれか1つでも欠けるとベクトル空間全体を表すことが出来ないようなベクトルの組のことである．

ベクトル空間  $V$  に対して，基底になるベクトルの組は何組も考えることができるが，基底を構成するベクトルの個数である次元の値は1つに定まることを

証明できる.  $V$  の次元 (dimension) の値は  $\dim V$  と書く,

$n$  次元列ベクトル空間・行ベクトル空間の次元は,

$$\dim \mathbf{R}^n = \dim \mathbf{R}_n = n$$

である. 基本単位ベクトルの組  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  は  $\mathbf{R}^n$  の基底である. この基底を  $\mathbf{R}^n$  の標準基底という.

$m \times n$  型の行列  $A$  を係数行列とする同次連立1次方程式  $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$  の解空間  $W_A$  の次元は

$$\dim W_A = n - \text{rank } A$$

である. 先に述べた基本解とは, 解空間の基底のことである.

いくつかのベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  によって生成された部分空間  $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  の次元は, これらのベクトルを並べてできる行列を

$$A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k)$$

としたとき

$$\dim W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{rank } A$$

となる. 基底については後述の定理2を参照せよ.

### 1次独立性・1次従属性

ベクトル空間の基底となるベクトルの組は, そのベクトル空間を生成することの他に, 1つでも欠けると全体を生成出来ないことが条件であった. それはベクトル空間の広がり度を考えるにあたって, 余分な座標軸が1つもないことを意味する. 余分であるとは, その座標軸の基底ベクトルがなくてもベクトル空間を生成できるということである. 考えているベクトルの組を  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  として, 余分なベクトルを  $\mathbf{v}_i$  とすると, 考えているベクトルの組からこれを除いた残りのベクトルでもベクトル空間を生成できているため,  $\mathbf{v}_i$  が, それら残りのベクトルの1次結合で表せることになる. 逆に言えば, 余分なベクトルがないとは, どのベクトルも, それを除いた残りのベクトルの1次結合としては表せないという状況ということになる.

あるベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  について, どのベクトルもそれ以外のベクトルの1次結合として表せないことを1次独立といい, どれかのベクトルがそれ以外のベクトルの1次結合として表せることを1次従属という.

1次独立性・1次従属性を正確に考えるために, ベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  に対していくつか用語の定義を列挙する.

**1 次結合**

すでに説明しているが、ベクトルの実数倍の和

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

のことを1次結合という。

**1 次関係式**

1次結合が零ベクトルになる場合、考えているベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  の間には何らかの関係が成立していると考えられる。この関係式

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

のことを1次関係式という。

**自明な1次関係式**

係数がすべて0である1次関係式は実際には何の関係も表していない。どんなベクトルの組を考えても、係数をすべて0にすればその1次関係式

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

は必ず成立するので、これを自明な1次関係式と呼ぶ。

**非自明な1次関係式**

自明な1次関係式以外の1次関係式のことを非自明な1次関係式と呼ぶ。

**1 次従属性**

ベクトルの組に対して非自明な1次関係式が成立する場合、それらのベクトルの組は1次従属であるという。上に書いたように、どれかのベクトルがそれ以外のベクトルの1次結合として表せる。

**1 次独立性**

1次従属ではないベクトルの組を1次独立であるという。つまり、非自明な1次関係式が全く成立しない、言い換えると、成立する1次関係式は自明なものに限るようなベクトルの組のことである。上に書いたように、1次独立なベクトルの組では、どのベクトルもそれ以外のベクトルの1次結合として表せない。

**独立最大数**

$n$  個のベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  に対して、その中から最大いくつのベクトルを1次独立なものとして取り出せるか、その最大個数を独立最大数と呼ぶ。また、1次独立になるように最大限多く取り出したベクトルの組を独立最大の組と呼ぶ。独立最大数が  $n$  となることとベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  が1次独立であることは同値である。

独立最大の組に関しては次の定理が成立する.

**定理 1.** ベクトルの組から取り出した独立最大の組によって, もとのベクトルの組に含まれる残りのベクトルは独立最大の組のベクトルの1次結合で表せる.

逆に, 与えられたベクトルの組から1次独立なベクトルの組を取り出して, 残りのベクトルをその1次結合で表せたとすると, それが独立最大の組である.

**定理 2.** ベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  から取り出した独立最大の組は  $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  の基底となり, 独立最大数が  $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  の次元となる.

具体的に独立最大数や独立最大の組を求めるには次の定理を利用すればよい.

**定理 3.** ベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  を並べてできる行列を  $A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$  とする. これを行の基本変形で階段行列に変形した場合,  $\text{rank } A$  を決めることになる各行最初の0でない成分である1を含む列と同じ列番号の  $A$  の列ベクトルの組が独立最大の組であり, 独立最大数は  $\text{rank } A$  と一致する.

このことから次の定理も証明される.

**定理 4.** 行列  $A$  を行の基本変形によって階段行列  $B$  に変形する場合, 途中経過は異なっても, 最終的に得られる階段行列  $B$  はただ1つに確定する.

さらに, 独立最大数に関連して次のような定理も成り立つ.

**定理 5.** 行列  $A$  の列ベクトルの生成する部分空間の次元および行ベクトルの生成する部分空間の次元は,  $A$  の階数  $\text{rank } A$  と一致する.

そして転置行列の行ベクトルはもとの行列の列ベクトルを横にしただけであるから, 次のような定理が成り立つ.

**定理 6.**  $\text{rank } {}^t A = \text{rank } A$

**例題 1.**

次の  $\mathbf{R}^3$  のベクトルの組  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  が1次独立か1次従属か判定せよ. さらに1次従属の場合には自明でない1次関係式を例示せよ.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**解答** 定理3より行列  $(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$  を行の基本変形で階段行列にして判定する.

$$(1) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となる.}$$

$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = 2 < 3$  よりベクトルの組  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は1次従属で,  
 $\mathbf{a}_3 = -\frac{1}{7}\mathbf{a}_1 + \frac{5}{7}\mathbf{a}_2$  より  $\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_2 + 7\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ .

$$(2) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{となる.}$$

$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = 3$  よりベクトルの組  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は1次独立である.

例題 2.

$$W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{の基底と次元を求めよ.}$$

解答  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  よりベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{は基底である. そして次元は3である.}$$

例題 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{とする. 連立1次方程式 } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解空間}$$

$$W_A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

の基底と次元を求めよ.

解答 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の解は}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$

である。よって  $W_A$  の基底の1つとしてベクトルの組  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  があ

り、 $\dim W_A = 2$  である。

---

A

---

1. 次のベクトルの組は1次独立か1次従属か判定せよ。

(1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$       (2)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$       (4)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(5)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$       (6)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 次のベクトルの組が1次独立であるための  $a$  の条件を求めよ。

(1)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$       (2)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

3.  $\mathbf{R}^3$  のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  を次の通りとする.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) ベクトルの組  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  が 1 次従属となるように  $a$  の値を求めよ. さらにそのときの自明でない 1 次関係式を求めよ.

(2)  $a = 8$  のとき,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  の張る平行六面体の体積を求めよ.

(3)  $\mathbf{a}_3 \in W\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  となるときの,  $\mathbf{a}_3$  を  $\mathbf{a}_1$  と  $\mathbf{a}_2$  の 1 次結合で表せ.

(4)  $a = 4$  のとき,  $\mathbf{a}_1 \in W\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  が成り立つかどうか判定せよ. 成り立つ場合,  $\mathbf{a}_1$  を  $\mathbf{a}_2$  と  $\mathbf{a}_3$  の 1 次結合で表せ.

4. (1) 同次連立 1 次方程式 
$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$$
 を解け.

(2)  $\mathbf{R}^n$  の 1 次独立なベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  に対し,  $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = -4\mathbf{a} + \mathbf{b}$  とおく. このとき  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  は 1 次独立か 1 次従属かを (1) を用いて調べよ.

5.  $\mathbf{R}^n$  のベクトルの組  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  は 1 次独立とする ( $n \geq 3$ ).

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} = \beta\mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{z} = \gamma\mathbf{c}$$

とおくとき, ベクトルの組  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  が 1 次従属であるための  $\alpha, \beta, \gamma$  がみたす条件を求めよ.

6.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  が正則か否かを調べることにより,  $A$  の 3 個の

列ベクトルの組が 1 次独立かを判定せよ.

7. 次のベクトルの組の独立最大数を求めよ. またその独立最大の組を選べ.

(1)  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2)  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

8. 次の部分空間の基底と次元を求めよ.

$$(1) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -38 \\ -29 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 38 \\ -21 \\ 68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ -13 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -47 \\ 91 \end{pmatrix} \right\}$$

9. 次の連立1次方程式の解空間の基底と次元を求めよ.

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 0 \\ -2x + 3y - 13z + 2u = 0 \\ 3x + 3y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

10.  $\mathbf{R}^4$  の部分空間  $W_1, W_2$  を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

$$W_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とする. このとき  $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$  の基底と次元を求めよ.

### B

1. 3個のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が1次独立であり, 4個のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$  が1次従属になるとき,  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の1次結合として表されることを示せ.

2. 行基本変形の仕方にかかわらず, 階段行列はただ一通りに定まる. 理由を考えよ.

3.  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  は  $n$ 次元数ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  の基底で,  $\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{a}_i$  ( $j =$

$2, \dots, n$ ) とする.  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  が  $\mathbf{R}^n$  の基底となるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

であることを示せ.

4.  $p, q$  を異なる素数とするとき

$$1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}$$

は有理数体  $\mathbf{Q}$  上 1 次独立であること, すなわち  $a \cdot 1 + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} = 0$  をみたす有理数  $a, b, c, d$  は  $a = b = c = d = 0$  に限ることを示せ.

A の解答

1. (1)  $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$  より 1 次独立である.

(2)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  より 1 次従属である.

(3)  $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$  より 1 次独立である.

(4)  $\text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 < 3$  より 1 次従属である.

(5)  $\text{rank} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$  より 1 次独立である.

(6)  $\text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 < 4$  より 1 次従属である.

2. (1)  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a - 2 \neq 0$  より,  $a \neq \frac{2}{3}$ .

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 3 \neq 0 \text{ より, } a \neq 3.$$

$$3. (1) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -7 \\ 4 & -3 & a \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-7 \end{pmatrix}$$

よりベクトルの組  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  が1次従属となるのは  $a = 7$  のときである. このとき  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$  より  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$  である.

(2)  $a = 8$  のとき  $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = 26$  だから, 平行六面体の体積は 26 である.

(3)  $\mathbf{a}_3 \in W\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  となるとき, (1) より  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ .

(4)  $a = 4$  のときベクトルの組  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は1次独立だから,  $\mathbf{a}_1 \notin W\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  である.

$$4. (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(2)  $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{0}$  とする.  $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = -4\mathbf{a} + \mathbf{b}$  を代入して整理すると  $(\alpha + 2\beta - 4\gamma)\mathbf{a} + (2\alpha - 2\beta + \gamma)\mathbf{b} + (-3\alpha + 2\beta)\mathbf{c} = \mathbf{0}$  となる.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  は1次独立だから  $\alpha + 2\beta - 4\gamma = 0$ ,  $2\alpha - 2\beta + \gamma = 0$ ,  $-3\alpha + 2\beta = 0$  となる.  $\alpha, \beta, \gamma$  は (1) の非自明解, たとえば  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 2$  をとれば,  $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w} = \mathbf{0}$  となり  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  は1次従属である.

$$5. c_1 \mathbf{x} + c_2 \mathbf{y} + c_3 \mathbf{z} = \mathbf{0} \iff (c_1 \alpha)\mathbf{a} + (c_1 + c_2 \beta)\mathbf{b} + (c_1 + c_2 + c_3 \gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ は1次独立だから連立1次方程式 } \begin{cases} \alpha c_1 & = 0 \\ c_1 + \beta c_2 & = 0 \\ c_1 + c_2 + \gamma c_3 & = 0 \end{cases} \text{ が成り立つ. こ}$$

$$\text{の方程式が } c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ でない解をもつための条件は } \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

よって求める条件は  $\alpha\beta\gamma = 0$ , すなわち  $\alpha = 0$  または  $\beta = 0$  または  $\gamma = 0$ .

$$6. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \text{ より } A \text{ は正則である. よって } A \text{ の3個}$$

の列ベクトルの組は1次独立である.

$$7. (1) \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より独立最大数は2で,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は独立最大の組である.

$$(2) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より独立最大数は3で, } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \text{ は独立最大の組}$$

である.

$$8. (1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ よりベクトルの組 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ は基底で, 次元は2である.}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ よりベクトルの組}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は基底で, 次元は2である.}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & -38 & 38 & 19 & 16 \\ 3 & -29 & -21 & -13 & -47 \\ 0 & 9 & 68 & 31 & 91 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よりベクトルの組 } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -38 \\ -29 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 38 \\ -21 \\ 68 \end{pmatrix} \text{ は基底で, 次元は3である.}$$

9. (1) 連立1次方程式の解は  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ( $t$  は任意定数) である.

よって解空間の基底は  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  で, 次元は1である.

(2) 連立1次方程式の解は  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $t$  は任意定数) である.

よって解空間の基底は  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  で, 次元は1である.

10.  $W_1$  の条件式の解は  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $t_1, t_2$  は任意

定数) である. よって  $W_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  となり, 基底は

$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  で, 次元は2である.

$W_2$  について

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } W_2 \text{ の基底は}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ で、次元は } 3 \text{ である.}$$

$x \in W_1 \cap W_2$  ならば

$$x = a_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表される.

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ を解くと、解は}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}). \text{ よって}$$

$$x = a_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{となるから } W_1 \cap W_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ 従って基底は } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 次元は } 1$$

である.

### B の解答

1.  $a, b, c, v$  が 1 次従属だから非自明な 1 次関係式

$$pa + qb + rc + sv = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ. ここで  $s = 0$  であれば  $pa + qb + rc = 0$  が成立することになる

が  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が 1 次独立なので  $p = q = r = 0$  となり, ①が非自明な 1 次関係式であることに矛盾する. よって  $s \neq 0$  から

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{p}{s}\right) \mathbf{a} + \left(-\frac{q}{s}\right) \mathbf{b} + \left(-\frac{r}{s}\right) \mathbf{c}$$

となり, 結論が示された.

2. 行列  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$  から基本変形を繰り返して行列  $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n)$  になったとする. これらの行列を係数行列とする同次連立 1 次方程式の解は完全に一致するから, ベクトルの組  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  の間に成り立つ 1 次関係式と全く同じ係数の 1 次関係式がベクトルの組  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  の間にも成り立つことになる.

また, 簡約な行列においては, 各行の最初の 0 でない成分が 1 (先頭の 1) であり, 先頭の 1 を含む列ベクトルは基本単位ベクトル (先頭の 1 以外の成分が 0) である. よって, 先頭の 1 を含まない列ベクトルは, 自分よりも前にある先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で一意的に表されることになる. このとき, 1 次結合の係数は, 今考えている列ベクトルの成分であることに注意せよ.

さて,  $A$  から基本変形で 2 つの異なる簡約な行列  $B, C$  に簡約化されたとする. このとき,  $B$  と  $C = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \cdots \ \mathbf{c}_n)$  の各列が最初に異なる列番号を  $j$  とし,  $\mathbf{b}_j$  が先頭の 1 を含む列であるか否かで場合分けする.

先頭の 1 を含む列ベクトルである場合:

$\mathbf{b}_j$  と  $\mathbf{c}_j$  は異なるため,  $\mathbf{c}_j$  は先頭の 1 を含まない列ベクトルということになる. しかし, この場合  $\mathbf{c}_j$  は  $j-1$  列までの先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で表されることになり,  $\mathbf{b}_j$  は先頭の 1 を含む列ベクトルであるため  $j-1$  列までの先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で表すことはできない. よって矛盾が生じる.

先頭の 1 を含まない列ベクトルである場合:

$\mathbf{c}_j$  が先頭の 1 を含む列ベクトルである場合は  $\mathbf{b}_j$  と  $\mathbf{c}_j$  の役割を交代して考えることにより, 矛盾が生じることになる. よって,  $\mathbf{c}_j$  も先頭の 1 を含まない列ベクトルであって, その成分が  $\mathbf{b}_j$  と異なるという状況で考えればよい. この場合,  $\mathbf{b}_j$  も  $\mathbf{c}_j$  も  $j-1$  列までの先頭の 1 を含む列ベクトルの 1 次結合で表されることになる. ここで, それぞれの 1 次結合の係数は  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j$  の成分である. これらの式を 1 次関係式と見たとき,  $B, C$  の列ベクトルの間に成り立つ 1 次関係式は全く同じ係数になるのだから,  $\mathbf{b}_j$  と  $\mathbf{c}_j$  の成分が異なるのは矛盾である.

よって, いずれの場合もあり得ないのだから,  $B, C$  は各列ベクトルがすべて一致する, すなわち,  $B = C$  であることがわかった.

$$3. P = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{とおけば } (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n)P$$

と表せる. ここで  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  が  $\mathbf{R}^n$  の基底  $\iff (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n)$  が正則

$$\iff P \text{ が正則} \iff \begin{vmatrix} p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ であるから, 結果が得られる.}$$

$$4. a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbf{Q}) \text{ とすると}$$

$$a + b\sqrt{p} = \sqrt{q}(-c - d\sqrt{p}).$$

ここで  $c + d\sqrt{p} = 0$  とすると  $a + b\sqrt{p} = 0$  となるが  $\sqrt{p}$  は無理数だから

$$a + b\sqrt{p} = 0 \iff a = b = 0$$

$$c + d\sqrt{p} = 0 \iff c = d = 0$$

であるから  $a = b = c = d = 0$  となる.

$c + d\sqrt{p} \neq 0$  であれば

$$\sqrt{q} = \frac{a + b\sqrt{p}}{-c - d\sqrt{p}} = r + s\sqrt{p} \quad (r, s \in \mathbf{Q})$$

であるが,  $\sqrt{q}, \sqrt{\frac{q}{p}}$  は無理数だから  $r \neq 0, s \neq 0$ . よって

$$q = (r^2 + s^2p) + 2rs\sqrt{p}$$

で  $\sqrt{p}$  が有理数となり矛盾.

### 4.3 線形写像と表現行列

#### 線形写像・線形変換 (1 次変換)

集合  $A$  の各要素に対し、集合  $B$  の要素が 1 つ対応しているとき、この対応のことを  $A$  から  $B$  への写像と呼び

$$f: A \rightarrow B$$

などと書く。  $A$  の要素  $a$  に対応する  $B$  の要素は  $f(a)$  と表す。

2 つのベクトル空間  $V, W$  の間の写像

$$f: V \rightarrow W$$

が、線形性と呼ばれる次の条件

$$v, w \in V \text{ に対して, } f(v + w) = f(v) + f(w)$$

$$v \in V, k \in \mathbf{R} \text{ に対して, } f(kv) = kf(v)$$

をみたすとき、これを線形写像と呼ぶ。ベクトルの和や実数倍をそのまま対応させるような写像のことである。

たとえば  $xy$  平面上の点を原点中心に  $\frac{\pi}{4}$  回転させるような写像は線形写像となるし、 $xyz$  空間の各点から最短距離にある  $xy$  平面上の点を対応させるような写像は線形写像となる。しかし、 $xy$  平面上の点を  $x$  軸方向へ 1 動かすような写像は線形写像ではない。

自分自身への線形写像のことを線形変換 (1 次変換) とも呼ぶ。

#### 表現行列

$m \times n$  型の行列  $A$  に対して、 $f_A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  を

$$f_A(v) = Av$$

と定義すると、 $f_A$  は線形写像となる。逆に、 $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への線形写像  $f$  は

$$f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$$

を並べてできる行列を  $A$  とし、 $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  と置けば

$$f(v) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 f(\mathbf{e}_1) + a_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + a_n f(\mathbf{e}_n) \\
 &= (f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2) \ \cdots \ f(\mathbf{e}_n)) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A\mathbf{v}
 \end{aligned}$$

によって  $f = f_A$  となることがわかる。  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  へのどんな線形写像も、行列を掛ける形に表せるわけだ。このとき  $A$  をこの線形写像  $f$  の表現行列と呼ぶ。

一般に、2つの線形写像

$$g: U \rightarrow V, \quad f: V \rightarrow W$$

の合成写像

$$f \circ g: U \rightarrow W$$

も線形写像となるが、 $f, g$  の表現行列が  $A, B$  であるとき、合成写像  $f \circ g$  の表現行列はこれらの積  $AB$  となる。

平面上の点を原点中心として反時計回りに角  $\theta$  だけ回転させる線形変換は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

で表現される。また、 $x$  軸を、原点中心にして反時計回りに角  $\theta$  だけ回転させた直線を  $\ell$  とするとき、 $\ell$  に関する対称移動の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

である。

**核と像**

線形写像  $f: V \rightarrow W$  に関しては必ず  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  となる。  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{v} \in V$  の全体である

$$\text{Ker } f = \{\mathbf{v} \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

を  $f$  の核 (kernel) と呼ぶ。  $\text{Ker } f$  は  $V$  の部分空間である。

また、 $V$  のベクトルが  $f$  によって対応する  $W$  のベクトルの全体である

$$\text{Im } f = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$$

を  $f$  の像 (image) と呼ぶ。  $\text{Im } f$  は  $W$  の部分空間である。

$m \times n$  型の行列  $A$  を係数行列とする同次連立1次方程式の解空間  $W_A$  は  $A$  を表現行列とする線形写像  $f_A$  の核となる。すなわち  $W_A = \text{Ker } f_A$  である。

いくつかのベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  によって生成される部分空間  $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  は、これらのベクトルを並べてできる行列を

$$A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_k)$$

としたときの  $f_A$  の像である。すなわち  $W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{Im } f_A$  である。

$m \times n$  型の行列  $A$  を表現行列とする線形写像を  $f_A$  とし、その列ベクトルを  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  とすると、 $\text{Ker } f_A = W_A$  および  $\text{Im } f_A = W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  であったから

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker } f_A) + \dim(\text{Im } f_A) &= \dim W_A + \dim W\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \\ &= (n - \text{rank } A) + \text{rank } A = n \end{aligned}$$

となるが、これを一般化すると次の定理にまとめられる。

**定理 1.** 線形写像  $f: V \rightarrow W$  について

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$$

が成立する。

$\dim(\text{Im } f)$  のことを線形写像  $f$  の階数といい、 $\text{rank } f$  と書く。

#### 座標ベクトル

ベクトル空間  $V$  に基底を 1 組考え、 $V$  の任意のベクトルをその基底の 1 次結合によって書き表すとき、その係数である座標成分の組はただ 1 つに定ま

る。このとき、座標成分を並べた数ベクトル  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  のことを座標ベクトルと

呼ぶ。

$V$  のベクトルと座標ベクトルの対応関係はお互いに 1 対 1 の線形写像になっており、これによって  $V$  を座標ベクトルの列ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  と同一視できる。

一般の線形写像  $f: V \rightarrow W$  でも、 $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への線形写像の場合と同様の表現行列を考えることができる。そのため、 $V, W$  にそれぞれ基底  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  と  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$  を取って考えよう。それぞれのベクトル空間のベクトルを基底の 1 次結合で表すことができるので、それによる座標ベクトルの列ベクトル空間  $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  と  $V, W$  をそれぞれ同一視して考えると、 $f: V \rightarrow W$  はこの同一視によって  $\tilde{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  という線形写像と考えることができるようになる。この線形写像  $\tilde{f}$  の表現行列のことを  $f$  の (これらの基底に関する) 表現行列と呼ぶ。

## 基底の変換行列

別の基底を考えると表現行列も変わるが、そこには一定の法則がある。

$v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  を  $V$  のもう 1 組の基底とすると、これらは  $v_1, v_2, \dots, v_n$  の 1 次結合で表されるので

$$(v'_1 \ v'_2 \ \cdots \ v'_n) = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)P$$

となる  $n$  次正方行列  $P$  が定まる。この  $P$  を基底の変換行列と呼ぶ。基底の変換行列は正則である。

基底の変換行列  $P$  によって、座標ベクトルの対応関係がわかる。 $V$  の 1 つのベクトルに対し、基底  $v_1, v_2, \dots, v_n$  による座標ベクトルを  $\tilde{v}$ 、基底  $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  による座標ベクトルを  $\tilde{v}'$  するとき、これらの間には

$$\tilde{v} = P\tilde{v}'$$

という関係がある。

同様に  $W$  にもう 1 組の基底  $w'_1, w'_2, \dots, w'_m$  を考えて基底の変換行列を  $Q$  とすると、今考えている線形写像  $f: V \rightarrow W$  を  $V, W$  の基底  $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  と  $w'_1, w'_2, \dots, w'_m$  によって表現した行列  $B$  は

$$B = Q^{-1}AP$$

となる。

## 例題 1.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $A, B$  が表す変換はどんな働きをする変換であるか図形的に説明せよ。

解答  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$ . ここで  $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$

とおけば  $x \cos \theta - y \sin \theta = r \cos(\alpha + \theta), x \sin \theta + y \cos \theta = r \sin(\alpha + \theta)$ .

よって  $A$  の表す変換は原点のまわりに  $\theta$  だけ回転することである。

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{とおけば}$$

$$x + X = x(1 + \cos \theta) + y \sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$y + Y = x \sin \theta + y(1 - \cos \theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{y+Y}{2} = \tan \frac{\theta}{2} \frac{x+X}{2}$$

よって点  $(x, y)$  と点  $(X, Y)$  の中点は原点を通り傾きが  $\tan \frac{\theta}{2}$  の直線  $\ell$  上に存在する. また

$$X - x = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left( x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$Y - y = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\therefore X - x + \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) (Y - y) = 0$$

すなわち  $\begin{pmatrix} X - x \\ Y - y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$  である.

よって点  $(x, y)$  と点  $(X, Y)$  は直線  $\ell$  に関し線対称の位置にあること, 言い換えると  $B$  の表す変換は直線  $\ell$  に関する線対称移動であることがわかる.

また

$$B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

より  $B$  の表す変換は  $x$  軸に関して線対称移動をし, さらに原点のまわりに  $\theta$  だけ回転したものであると考えることもできるし

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

より原点のまわりに  $-\theta$  だけ回転し, さらに  $x$  軸に関して線対称移動したものと考えてもよい.

### 例題 2.

- (1) 直線  $y = 2x$  に関する線対称移動を行列で表現せよ.  
 (2) 直線  $2x + 3y = 1$  を (1) の線対称移動したときの図形の方程式を求めよ.

解答 (1) 点  $(x, y)$  が点  $(X, Y)$  にうつたとすると, 中点  $\left( \frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2} \right)$

は直線  $y = 2x$  上の点だから

$$\frac{y+Y}{2} = x+X \quad \text{すなわち} \quad -X + \frac{Y}{2} = x - \frac{y}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

点  $(X, Y)$  は点  $(x, y)$  を通る傾き  $-\frac{1}{2}$  の直線上の点だから

$$Y - y = -\frac{1}{2}(X - x) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}X + Y = \frac{1}{2}x + y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①と②より

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= -\frac{4}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって(1)の行列は

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

である.

(2) (1) より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

だから  $2x + 3y = 1$  に代入すると

$$2\left(-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y\right) + 3\left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y\right) = 1$$

すなわち  $6X + 17Y = 5$ . よって求める図形の方程式は  $6x + 17y = 5$  である.**例題 3.**

線形写像  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  を  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + z \\ x - 2y + 3z \end{pmatrix}$  で定める. こ

のとき  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$  の基底と次元を求めよ.

解答  $\begin{pmatrix} 2x + z \\ x - 2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  である.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の解は } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意})$$

定数)であるから  $\text{Ker } f$  の基底は  $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$  で、次元は1である。また上の変形

$$\text{より } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ は1次独立なので、} \text{Im } f \text{ の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

で、次元は2である。

#### 例題 4.

$\mathbb{R}^3$  の2組の基底  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  と  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

- (1) 基底  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  から基底  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  への基底の変換行列を求めよ。
- (2) 基底  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  に関する座標成分が  $\alpha, \beta, \gamma$  であるベクトルを求めよ。
- (3) (2) のベクトルの基底  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  に関する座標成分を求めよ。

解答 (1)  $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} P$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 求めるベクトルを  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 6\beta + 12\gamma \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma \\ \alpha + 3\beta + 7\gamma \end{pmatrix}$$

(3) 求める座標成分を  $x, y, z$  とすれば

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ \beta + 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**例題 5.**次の線形写像の与えられた基底に関する表現行列  $A$  を求めよ。

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^3 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^2 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

解答

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{25}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} \frac{25}{2} & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

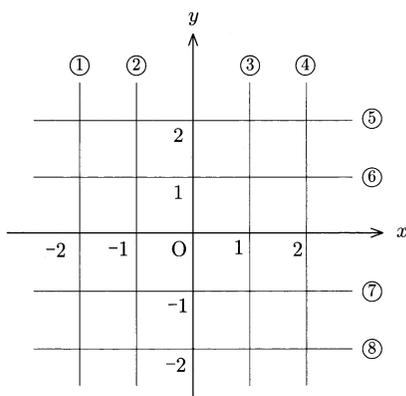
(別解)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{25}{2} & 1 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## A

1.  $2 \times 2$ 型の行列  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  による写像で, 12個のベクトル  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  (ただし  $i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2$ ) はどのようなベクトルにうつるか. 位置ベクトルの終点を図示せよ.

2.



上図のタテヨコの直線を次の行列でうつしたときの図形を描け.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. 次の図形を直線  $y = 2x$  に関して線対称移動した図形の方程式を求めよ.

(1) 直線  $x + 2y = 3$       (2) 円  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

(3) 楕円  $\frac{(x - 2)^2}{4} + y^2 = 1$

4. 次の写像  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  は線形か否か, 理由をつけて答えよ. 線形ならばその表現行列を求めよ.

$$(1) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(2) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(3) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad (5) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

5. 線形写像  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

で定義するとき、 $f$  の表現行列  $A$  を求めよ。

6. 線形写像  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  は  $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ ,  $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$ ,  $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$  をみたすとする。このとき  $T$  の表現行列  $A$  を求めよ。

7.  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  として、写像  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$  (外積) と

定める。次の間に答えよ。

(1)  $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ ,  $T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$  ( $k$  は実数) を示せ。

(2)  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  となる行列  $A$  を求めよ。

8. 直線  $y = kx$  に関する線対称移動を行列で表現せよ ( $k \neq 0$ )。

9.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  とするとき  $f_A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  の像を図示せよ。

10. 次の行列を表現行列とする線形写像  $f$  の核の次元と像の次元を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 13 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

11. ベクトル空間  $\mathbf{R}^2$  において  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$  が基底をなす

とき、次の間に答えよ。

(1) 実数  $k$  についての条件を求めよ。

(2) 基底  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  に関する  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  の座標成分 (座標ベクトル) を求めよ。

12.  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  とする。

(1) 次の間に答えよ。

(i) 基底  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  に関する座標成分が  $1, -1$  であるベクトルの基底  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  に関する座標成分 (座標ベクトル) を求めよ。

(ii) 基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  に関する座標成分が  $1, -1$  であるベクトルの基底  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  に関する座標成分 (座標ベクトル) を求めよ。

(iii) 基底  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  から基底  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  への基底の変換行列を求めよ。

(iv) 基底  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  から基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  への基底の変換行列を求めよ。

(2) 線形写像  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  を  $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1$ ,  $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2$  で定めるとき、次の間に答えよ。

(i)  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$  を求めよ。

(ii)  $f$  の基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  に関する表現行列を求めよ。

(iii)  $f$  の基底  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  と  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  に関する表現行列を求めよ。

(iv)  $f$  の基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  と  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  に関する表現行列を求めよ。

13. 次の線形写像について指定された基底に関する表現行列を求めよ。

$$(1) f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - 4y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^2 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}^3 \text{ の基底 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^3 \text{の基底} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathbf{R}^2 \text{の基底} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$(3) f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^3 \text{の基底} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

---

**B**

---

1. 次の条件をみたす  $\mathbf{R}^3$  から  $\mathbf{R}^3$  への線形写像の表現行列を求めよ.

(1)  $yz$  平面に関する面対称移動      (2)  $z$  軸のまわりの  $\theta$  回転

(3)  $x$  軸を  $x$  軸に,  $y$  軸を  $y$  軸に,  $z$  軸を  $z$  軸にうつす線形写像 (一般形)

(4)  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  とし, 各々のベクトルを方向

ベクトルとする原点を通る直線を  $l, m, n$  とする.  $x$  軸を  $l$  に,  $y$  軸を  $m$  に,  $z$  軸を  $n$  にうつす線形写像 (一般形)

(5)  $x$  軸を  $x$  軸に,  $yz$  平面を  $yz$  平面にうつす線形写像 (一般形)

2.  $V$  をベクトル空間,  $A: V \rightarrow V$  を線形写像,  $f$  を多項式 (ただし  $f(0) \neq 0$ ) とする.

(1)  $f(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  かつ  $A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ならば  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

(2)  $A^n f(A) = O$  かつ  $A^{n-1} f(A) \neq O$  ならば  $\dim\{\mathbf{x} \in V \mid A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \geq n$ .

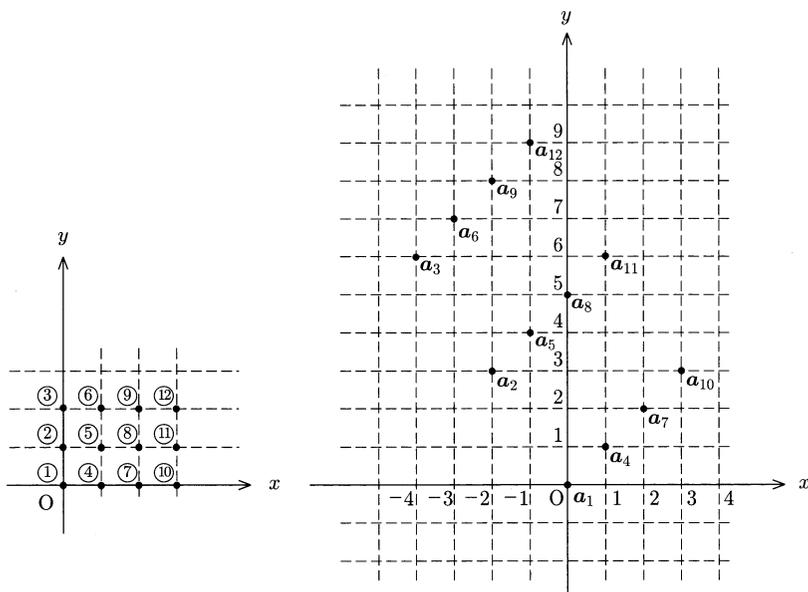
## A の解答

1.  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-2j \\ i+3j \end{pmatrix}$  より 12 個のベクトル  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  は  $i=0$  に対し  $j=0, 1, 2$ ,  $i=1$  に対し  $j=0, 1, 2, \dots$  と順に求めると, 次の 12 個のベクトル  $\mathbf{a}_k$  ( $k=1, 2, \dots, 12$ ) にうつる.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_9 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{10} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$



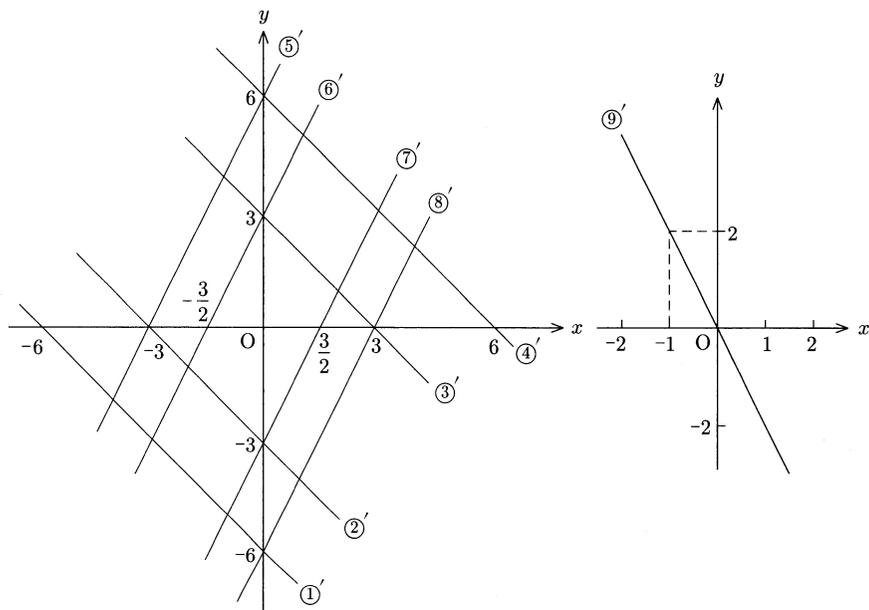
ベクトル⑫はベクトル  $\mathbf{a}_k$  にうつっている.

$$2. (1) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ のとき } \begin{cases} X = x - y & \text{より} \\ Y = 2x + y \end{cases}$$

$X + Y = 3x$ ,  $2X - Y = -3y$  である. よって①~⑧の直線は下図の①'~⑧' にうつる.

$$(2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ のとき } \begin{cases} X = -x + y & \text{より} \\ Y = 2x - 2y \end{cases}$$

$2X + Y = 0$  である. よって①~⑧の直線は下図の⑨' にうつる.



3. 例題 2 より  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  にうつるとき  $\begin{cases} x = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y \\ y = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y \end{cases}$  で

あった.

(1)  $x + 2y = 3$  より

$$-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y + 2\left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y\right) = 3.$$

よって  $X + 2Y = 3$  より求める図形の方程式は  $x + 2y = 3$ .

(2)  $\left(-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y + 1\right)^2 + \left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y - 1\right)^2 = 1$  より

$$X^2 + Y^2 - \frac{14}{5}X + \frac{2}{5}Y = -1, \text{ すなわち}$$

$$\left(X - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{5}\right)^2 = -1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1.$$

よって求める図形の方程式は  $\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{5}\right)^2 = 1$ .

(3)  $\frac{\left(-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y - 2\right)^2}{4} + \left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y\right)^2 = 1$  を整理して

$$73X^2 + 52Y^2 + 72XY + 60X - 80Y = 0.$$

よって求める図形の方程式は  $73x^2 + 72xy + 52y^2 + 60x - 80y = 0$  である.

4. (1) 行列  $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  によって定まる写像だから線形で, 表現行列は

$A$  である.

$$(2) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ x + 3y \end{pmatrix} \text{である. } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{で, } f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f((-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \neq (-1)f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{となる}$$

から線形ではない.

$$(3) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{となり,}$$

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  によって定まる写像だから線形で, 表現行列は  $A$  である.

$$(4) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{となり, 行列 } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{によつて}$$

定まる写像だから線形で, 表現行列は  $A$  である.

$$(5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{が} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{にうつるから線形ではない.}$$

$$5. f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{より } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \left( T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. (1) T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$$

$$T(k\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{x}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$$

$$(2) T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - z \\ 2x - 2z \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{より } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. 点  $(x, y)$  が点  $(X, Y)$  にうつったとすると, 中点  $\left(\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}\right)$  は  $y = kx$  上の点となるから

$$\frac{y+Y}{2} = k \frac{x+X}{2} \quad \therefore y+Y = k(x+X)$$

$$-kX + Y = kx - y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

点  $(X, Y)$  は点  $(x, y)$  を通る傾き  $-\frac{1}{k}$  の直線上の点だから

$$Y - y = -\frac{1}{k}(X - x)$$

$$\therefore \frac{1}{k}X + Y = \frac{1}{k}x + y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①と②より

$$\begin{pmatrix} -k & 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -k & 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-k - \frac{1}{k}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{k} & -k \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{-k - \frac{1}{k}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{k} & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -1 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{-k^2 - 1} \begin{pmatrix} k - \frac{1}{k} & -1 - 1 \\ -1 - 1 & \frac{1}{k} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

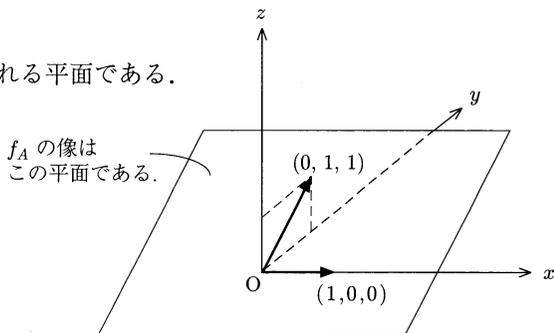
$$= \begin{pmatrix} -\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} & \frac{2k}{k^2 + 1} \\ \frac{2k}{k^2 + 1} & \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

よって表現行列は  $\begin{pmatrix} -\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} & \frac{2k}{k^2 + 1} \\ \frac{2k}{k^2 + 1} & \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \end{pmatrix}$  である.

$$9. f_A \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_A \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_A \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ である. よって } f_A \text{ の像はベク}$$

トル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  で張られる平面である.



$$10. (1) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 & 20 \\ 1 & 3 & 8 & 13 \end{pmatrix} = 2 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 4 - 2 = 2, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

$$(2) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - 2 = 1, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

$$(3) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 3 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 4 - 3 = 1, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 3.$$

$$(4) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 4 \text{ より } \dim(\operatorname{Ker} f) = 0, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 4.$$

$$11. (1) k \neq 2 \quad (2) \begin{pmatrix} \frac{k-5}{k-2} \\ \frac{3}{k-2} \end{pmatrix}$$

$$12. (1) (i) \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} -40 & -11 \\ 29 & 8 \end{pmatrix} \quad (iv) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) (i) f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -9x + 16y \\ 13x - 23y \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} -9 & 16 \\ 13 & -23 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (iv) \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$13. (1) f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって表現行列は } \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$(2) f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より表現行列は  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$  である.

$$(3) f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって表現行列は  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  である.

### Bの解答

$$1. (1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} (abc \neq 0) \quad (4) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & 0 & 0 \\ a & b & -c \end{pmatrix} (abc \neq 0)$$

$$(5) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} (a(be - cd) \neq 0)$$

2. (1)  $f(A) = g(A)A + f(0)E$  ( $g$  は多項式) とかけるので  $A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}$  より

$$f(A)A^{n-1}\mathbf{x} = g(A)A^n\mathbf{x} + f(0)A^{n-1}\mathbf{x} = f(0)A^{n-1}\mathbf{x}$$

また  $f(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  より

$$f(A)A^{n-1}\mathbf{x} = A^{n-1}f(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

よって  $f(0)A^{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  となるが  $f(0) \neq 0$  であるから  $A^{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  が得られる。これをくり返すことにより  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を得る。

(注意) より一般に、互いに素な多項式  $f, g$  に対し

$$f(A)\mathbf{x} = g(A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

である。

(2)  $A^{n-1}f(A)\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{y} \in V$  をとり  $\mathbf{x} = f(A)\mathbf{y}$  とおけば

$$A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad A^{n-1} \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

このとき  $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, \dots, A^{n-1}\mathbf{x}$  は 1 次独立である。

$$\left( \because \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の両辺に } A^{n-1} \text{ を作用させて } c_0 A^{n-1} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \therefore c_0 = 0. \right.$$

次に  $A^{n-2}$  を作用させて  $c_1 A^{n-1} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  より  $c_1 = 0$  以下同様。) 従って

$$\dim\{\mathbf{x} \in V \mid A^n \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \geq n$$

(注意) ある  $B$  に対し  $A^n B = O, A^{n-1} B \neq O$  であればよい。

## 4.4 正規直交基底

## ユークリッド内積

平面・空間のベクトルに対して定義した内積を  $n$  次元数ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  に自然に拡張したものをユークリッド内積と呼ぶ。

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

と定義したものである。  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  の他に、  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  もしくは  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  と書くこともある。

ユークリッド内積に関して次のような法則が成り立つ。

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$(k\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (k\mathbf{w}) = k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad (\text{等号成立は } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ のときに限る。})$$

ユークリッド内積以外にも、また、一般のベクトル空間に対しても、上記の性質をみたす（一般の）内積を定義できる（内積の導入されたベクトル空間を内積空間と呼ぶ。）が、ここではあまり詳しく触れない。

## ベクトルの長さ

$$\text{一般の次元の数ベクトル } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ に対しても}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

としてベクトルの長さ（ノルム）を定義する。

ベクトルの長さに関して次のような法則が成り立つ。

$$|k\mathbf{v}| = |k| |\mathbf{v}|$$

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$$

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}||\mathbf{w}|$$

$$|\mathbf{v}| \geq 0 \quad (\text{等号成立は } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ のときに限る.})$$

### 角度・直交性

平面・空間のベクトルの場合と同様に，2つのベクトル  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  のなす角  $\theta$  は

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$$

をみたす  $0 \leq \theta \leq \pi$  の範囲の角度として定義する．また，これらが直交していることを  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$  で定義する．直交していることは

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$$

と書く．

### 直交補空間

$W$  をベクトル空間  $V$  の部分空間であるとする． $\mathbf{v} \in V$  が  $W$  のすべてのベクトルに直交していることを

$$\mathbf{v} \perp W$$

と書き，このようなベクトルの全体

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \perp W, \mathbf{v} \in V\}$$

のことを  $W$  の直交補空間と呼ぶ．直交補空間は  $V$  の部分空間である．

直交補空間の直交補空間はもとの部分空間に一致する．すなわち

$$(W^\perp)^\perp = W$$

となる．

### 正規直交基底

お互いに直交するベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  を直交系と呼ぶ．直交系は1次独立であることを証明できる．特に，ベクトル空間の基底が直交系である場合，直交基底と呼ぶ．

直交系のそれぞれのベクトルの長さが1であるとき，すなわち

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となるとき，正規直交系と呼ぶ．特に，ベクトル空間の基底が正規直交系である場合，正規直交基底と呼ぶ．

標準基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  は  $\mathbf{R}^n$  の正規直交基底である．

正規直交基底に関して次の定理が成立する。

**定理 1.**  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  がベクトル空間  $V$  の正規直交基底であるとき、 $V$  の任意のベクトル  $\mathbf{v}$  をこの基底の1次結合として

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$$

のように表すと、その係数（座標成分）は  $a_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$  として求められる。

さらに、 $V$  の別のベクトル  $\mathbf{w}$  が

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n, \quad b_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i$$

と表されるとき、 $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{w}$  の内積は

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

として求められる。

### 正射影

平面に真上から光を当てると空中にある物体の影が真下にできるように、ベクトル空間の各ベクトルを、その部分空間上に垂直にうつす写像を正射影という。

ベクトル空間を  $V$ 、その部分空間を  $W$ 、 $\mathbf{v} \in V$  が  $W$  上のベクトル  $\mathbf{w} \in W$  に正射影されたとすると  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  が  $\mathbf{v}$  から  $W$  に下ろした垂線の方向ベクトルとなるので

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp W$$

となる。

$W$  の正規直交基底を  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$  とすると

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \dots + a_k\mathbf{w}_k, \quad a_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i$$

となることを証明できる。

$\mathbf{v} \in V$  を  $\mathbf{w} \in W$  に対応させる写像は線形写像である。

### グラム・シュミット (Gram-Schmidt) の正規直交化法

1次独立なベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  をもとにして正規直交系  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$  を構成することができる。

最初のベクトル  $\mathbf{v}_1$  については、同じ向きで長さが1であるベクトルを考えればよいから

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}$$

とすればよい。

2つ目のベクトル  $\mathbf{v}_2$  については、まず  $\mathbf{w}_1$  に直交するベクトル  $\mathbf{u}_2$  を求めて、

次にその長さを1にする. 具体的には,  $v_2$  を  $w_1$  方向に正射影したベクトル

$$(v_2 \cdot w_1)w_1$$

を考え

$$u_2 = v_2 - (v_2 \cdot w_1)w_1$$

と定義すると  $u_2 \perp w_1$  となるので

$$w_2 = \frac{u_2}{|u_2|}$$

とすればよい.

3つ目のベクトル  $v_3$  については, まず  $w_1, w_2$  の両方に直交するベクトル  $u_3$  を求めて, 次にその長さを1にする. 具体的には,  $v_3$  を  $W\{w_1, w_2\}$  に正射影したベクトル

$$(v_3 \cdot w_1)w_1 + (v_3 \cdot w_2)w_2$$

を考え

$$u_3 = v_3 - (v_3 \cdot w_1)w_1 - (v_3 \cdot w_2)w_2$$

と定義すると  $u_3 \perp W\{w_1, w_2\}$  となるので

$$w_3 = \frac{u_3}{|u_3|}$$

とすればよい.

これを次々に繰り返すと,  $w_1, w_2, \dots, w_n$  が構成できる.  $w_k$  は

$$u_k = v_k - (v_k \cdot w_1)w_1 - (v_k \cdot w_2)w_2 - \dots - (v_k \cdot w_{k-1})w_{k-1}$$

から

$$w_k = \frac{u_k}{|u_k|}$$

として求める.

このようにして正規直交系を求めることを, グラム・シュミット (Gram-Schmidt) の正規直交化法とよぶ. ベクトル空間の基底から, この手法で正規直交基底を得ることができる.

#### 直交変換・直交行列

線形変換  $f: V \rightarrow V$  が内積を変えない, すなわち, 任意の  $u, v \in V$  に対して

$$f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$$

が成立する場合, この線形変換を直交変換と呼ぶ.  $u$  と  $v$  が直交しているとき,  $f(u)$  と  $f(v)$  も直交しているので, このように呼ばれる. 内積が変わらないのでベクトルの長さも変わらない. 原点を中心とした平面上の点の回転や, 原点を通る直線に関する対称移動は直交変換である.

直交変換に関して次の定理が成立する.

**定理 2.**  $v_1, v_2, \dots, v_n$  が  $V$  の正規直交基底であるとする. 線形変換  $f: V \rightarrow V$  が直交変換である必要十分条件は  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  が  $V$  の正規直交基底になることである.

$R^n$  の直交変換の表現行列を直交行列と呼ぶ.

$n$  次正方行列  $P$  の列ベクトルを  $p_1, p_2, \dots, p_n$  とすると

$$p_i = Pe_i = f_P(e_i)$$

であり,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は  $R^n$  の正規直交基底だから, 上の定理によって,  $P$  の列ベクトルの組  $p_1, p_2, \dots, p_n$  が  $R^n$  の正規直交基底であるような  $P$  が直交行列であることになる.

これを条件式で表すと

$${}^tPP = E$$

となる. このことから直交行列  $P$  は正則な行列で  $P^{-1} = {}^tP$  であることがわかる. また

$$|P|^2 = |{}^tP||P| = |E| = 1$$

より,  $|P| = \pm 1$  であることもわかる.  $|P| = 1$  である直交行列のことを, 特に, 回転行列と呼ぶことがある.

**例題 1.**

$$R^4 \text{ におけるベクトル } a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ について, 長さ } |a|, |b|$$

と内積  $a \cdot b$  および  $a$  と  $b$  のなす角  $\theta$  を求めよ.

**解答**

$$|a| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$|b| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$a \cdot b = 3 + 3 - 1 + 4 = 9$$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{9}{2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

よって  $\theta = \frac{\pi}{3}$  である.

## 例題 2.

$\mathbf{R}^3$  において  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  で生成される部分空間を  $W$

とすると、 $W^\perp$  を求めよ。

解答  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ ,  $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$  をみたす  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解である。これを解くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

よって

$$W^\perp = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}.$$

幾何学的には  $W$  は  $\mathbf{a}_1$  と  $\mathbf{a}_2$  を含む平面で、 $W^\perp$  は原点を通る  $W$  の法線である。

## 例題 3.

$\mathbf{R}^3$  のベクトル  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  を、 $\mathbf{R}^3$  の部分空間  $W_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $W_2 =$

$W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  に正射影したベクトルを、それぞれ求めよ。

解答  $W_1$  の正規直交基底は  $\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  であるから  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  を  $W_1$  に正射

影したベクトルは

$$\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である.

$$W_2 \text{ の正規直交基底は } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ であるから } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を } W_2$$

に正射影したベクトルは

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

例題 4.

$$\mathbf{R}^3 \text{ におけるベクトル } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ から}$$

正規直交系  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  を作れ.

$$\begin{aligned} \text{解答 } \mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ より } \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{20}{34} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ -60 \end{pmatrix} = \frac{30}{34} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より  $w_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  である. よって正規直交系は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である.

---

A

---

1.  $\mathbf{R}^4$  のベクトル  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 3k \\ 1 \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -2k \\ 2 \end{pmatrix}$  が直交するような  $k$

の値を求めよ.

2. ベクトル  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  がベクトル  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  と直交す

るような単位ベクトルであるとき,  $a, b, c$  を求めよ.

3.  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  のなす角を求めよ.

4.  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  が互いに直交するとき, これらのベクトルは 1 次独立であることを示せ. ただし,  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{a}_r \neq \mathbf{0}$  とする.

5.  $\mathbf{R}^4$  において  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  で生成される部分空間  $W$  の

直交補空間  $W^\perp$  を求めよ.

6.  $\mathbf{R}^3$  の部分空間  $W_1 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $W_2 = W \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  に

ついて

(1)  $\mathbf{R}^3$  から  $W_1, W_2$  への正射影を表す線形写像の表現行列  $A_1, A_2$  をそれぞれ求めよ.

(2)  $W_1, W_2$  への正射影を表す線形写像  $f_{A_1}, f_{A_2}$  の核をそれぞれ求めよ.

7. 次の基底から正規直交基底を作れ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.  $A = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$  が直交行列であることを示せ.

9.  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & a \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$  が直交行列であるとき,  $a, b, c$  の値を求めよ.

10.  $A$  を  $n$  次の直交行列であるとするとき, 次の問に答えよ.

(1)  $\mathbf{R}^n$  の任意のベクトル  $\mathbf{v}$  に対し,  $|f_A(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$  が成立すること, すなわち直交変換でベクトルの長さは変わらないことを示せ.

(2)  $\mathbf{R}^n$  のベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  のなす角が  $\theta$  であるとするとき,  $f_A(\mathbf{v}_1), f_A(\mathbf{v}_2)$  のなす角も  $\theta$  となること, すなわち直交変換でベクトルのなす角は変わらないことを示せ.

11.  $A, B$  が直交行列ならば,  $A^{-1}, AB$  もそうであることを示せ.

---

## B

---

1.  $\mathbf{R}^3$  において  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$  とし,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  が  $\mathbf{R}^3$  の正規直交基底に

なるような組  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  をすべて求めよ.

2.  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  とする.

(1)  $\mathbf{a}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\}$  とおくとき,  $\mathbf{a}^\perp$  は  $\mathbf{R}^n$  の  $(n-1)$  次元部分空間になることを示せ.

(2) 写像  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  を

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$$

と定めるとき,  $f$  は線形変換であることを示せ. さらに直交変換であることを示せ. この  $f$  を部分空間  $\mathbf{a}^\perp$  に関する対称移動という.

3.  $n$ 次元数ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  において,  $m$  個のベクトル  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  が 1 次従属であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_m \end{vmatrix} = 0$$

であることを示せ.

#### A の解答

1.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = k - 1 - 2k - 6k^2 + 2 = -6k^2 - k + 1 = 0$  を解いて  $k = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ .

2.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0, |\mathbf{a}| = 1$  より

$$b = -\frac{3}{2}a, c = 2a, 2a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

これを解いて  $a = \pm \frac{2}{\sqrt{33}}, b = \mp \frac{3}{\sqrt{33}}, c = \pm \frac{4}{\sqrt{33}}$  (複号同順).

3.  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のなす角を  $\theta$  とすれば

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-9}{\sqrt{36}\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のなす角は  $\frac{5}{6}\pi$  である.

4.  $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$  とおき,  $\mathbf{a}_1$  との内積を考えると

$$(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r) \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_1 = 0$$

$$k_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + k_r\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_1 = 0$$

$$k_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \quad (\because \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_1 = 0)$$

$$\therefore k_1 = 0 \quad (\because \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0})$$

同様に  $k_2 = 0, \dots, k_r = 0$ .

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$W^\perp = W \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. (1)  $W_1$  の正規直交基底は  $\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  である.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

を  $W_1$  に正射影したベクトルを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  とすると

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって

$$A_1 = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

である.

$W_2$  の正規直交基底は  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  である.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を  $W_2$  に正射影したベクトルを  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  とすると

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 0 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$A_2 = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

である.

$$(2) f_{A_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解は}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \text{ は任意定数})$$

である. よって

$$\text{Ker } f_{A_1} = W \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$f_{A_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の解は}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

である。よって

$$\text{Ker } f_{A_2} = W \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$7. (1) \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{より } \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ よって正規直交基底は}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(2) \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ より } w_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} u_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{105} \begin{pmatrix} -90 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より } w_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ よって正規直交} \end{aligned}$$

基底は

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

8.  ${}^tAA$  を計算すると

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

9.  ${}^tAA = E$  から

$$a + 2b + 2c = 0, \quad b = c, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

となる. これを解いて

$$a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad b = c = \mp \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad (\text{複号同順})$$

10.  $A$  は直交行列だから  ${}^tAA = E$  をみたとす.

(1)  $|f_A(\mathbf{v})|^2 = f_A(\mathbf{v}) \cdot f_A(\mathbf{v}) = {}^t(A\mathbf{v})A\mathbf{v} = {}^t\mathbf{v}{}^tAA\mathbf{v} = {}^t\mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ .  
よって  $|f_A(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$  である.

(2)  $f_A(\mathbf{v}_1) \cdot f_A(\mathbf{v}_2) = {}^t(A\mathbf{v}_1)A\mathbf{v}_2 = {}^t\mathbf{v}_1{}^tAA\mathbf{v}_2 = {}^t\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ .  
(1) より  $|f_A(\mathbf{v}_1)| = |\mathbf{v}_1|$ ,  $|f_A(\mathbf{v}_2)| = |\mathbf{v}_2|$  だから

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{f_A(\mathbf{v}_1) \cdot f_A(\mathbf{v}_2)}{|f_A(\mathbf{v}_1)||f_A(\mathbf{v}_2)|}$$

となり  $f_A(\mathbf{v}_1)$ ,  $f_A(\mathbf{v}_2)$  のなす角も  $\theta$  となる.

11.  ${}^tAA = E$  だから  $A^{-1} = {}^tA$ .  ${}^t(A^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$ . したがって  $A^{-1}$  は直交行列. 次に  ${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = E$  だから  $AB$  も直交行列である.

### Bの解答

1.  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  とおくと  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  だから

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad (a \neq 0 \text{ または } b \neq 0).$$

よって

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-a-b)^2 + a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

次に  $\mathbf{a}_3$  を求める.  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y} = 0$  をみたす  $\mathbf{y} \neq 0$  は

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -c-d \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (c \neq 0 \text{ または } d \neq 0) \quad \dots\dots (*)$$

とかけるから

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c-d \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff c(2a+b) + d(a+2b) = 0 \quad \dots\dots (**)$$

$a \neq 0$  または  $b \neq 0$  だから  $2a+b \neq 0$  または  $a+2b \neq 0$ . よって  $(**)$  を  $c$  ま

たは  $d$  について解いて (\*) に代入すれば

$$\mathbf{y} = k \begin{pmatrix} a - b \\ a + 2b \\ -2a - b \end{pmatrix} \quad (k \text{ は定数})$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + (a+2b)^2 + (-2a-b)^2}} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \\ -2a-b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \\ -2a-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上により

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \\ -2a-b \end{pmatrix} \quad (a \neq 0 \text{ または } b \neq 0). \end{aligned}$$

2. (1)  $1 \times n$  型の行列  $A$  を  $A = {}^t \mathbf{a}$  とおくと、 $\mathbf{a}^\perp$  は連立 1 次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解空間である。 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  より  $\text{rank } A = 1$  だから解空間の次元は  $n-1$  である。

(2)

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) - \frac{2\mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \\ &= \alpha \left( \mathbf{x} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) + \beta \left( \mathbf{y} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) \\ &= \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

だから  $f$  は線形変換である。次に

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= \left( \mathbf{x} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) \cdot \left( \mathbf{y} - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) - \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) + \frac{4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{a}|^4} |\mathbf{a}|^2 \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

だから  $f$  は直交変換である。

3. まず,  $u_1, \dots, u_m$  についての方程式

$$u_1 \mathbf{a}_1 + \dots + u_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

は  $m$  個の方程式 (連立 1 次方程式)

$$(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_1)u_1 + \dots + (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_m)u_m = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と同値であることがいえる. 実際, ②は①の両辺と  $\mathbf{a}_i$  との内積から得られ, 逆に①は②に  $u_i$  をかけて  $i = 1, \dots, m$  について加えて得られる.

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  が 1 次従属であるための条件は,  $u_1, \dots, u_m$  についての連立方程式②が非自明解をもつこととなり, それは  $\det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) = 0$  と同値である.