

1 ベクトル空間

1.2 次元と基底

点をゼロ次元、直線を 1 次元、平面を 2 次元の広がりというが、より高い空間、たとえば、 n 次元 ($n \geq 3$) を考え、この空間に属するベクトルを抽象的に捉える。

定義 1

(基底ベクトル) ベクトル空間 V に属するベクトルの組 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ がつぎの条件を満たすとき、 V の基底, あるいは基底ベクトル (base vector) という。単に「基」としているテキストもある。

- (i) (独立性) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ は一次独立である。
- (ii) (空間の生成) 空間 V を生成する: $V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ と書ける。

ここでベクトルが一次独立であるとは、これらの一次結合をつくってゼロ・ベクトルとすれば、係数スカラーがすべてゼロになる場合に限るとき。ベクトル空間の基底は、一つの組だけでなく、たくさん存在する。しかし、その基底となるベクトルの個数は一定である。最も簡潔な基底の例は、

\mathbb{R}^n では、基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, \dots , $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ で、2 つの条件を満たしている。

これを標準基底 (standard base) とよぶ。直交座標の各軸の単位ベクトルに他ならない。ベクトルのノルム (大きさ) が 1 であり、お互いに直交をしている。

定理 1

ベクトル空間 V の基底となるベクトルの個数は、基底の取り方によらず、一定値である。

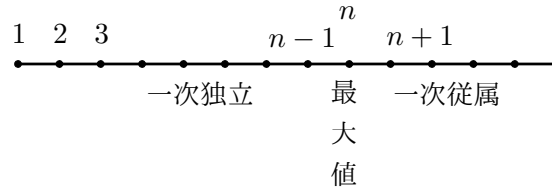
なぜならば、個数が異なる 2 つの組があったとし、ともに V を構成する基底と仮定する。一方のベクトルは、他方のベクトルの一次結合で書き表せる。よって等号を含んだ大小関係が成り立つ。等号のない不等号の場合はない。基底に矛盾するから。この役割を取り換えると、反対向きの等号を含んだ大小関係が得られ、これが同時に成り立つから、等号しかない。つまりベクトルの個数は一定である。

定義 2

(空間の次元) ゼロ・ベクトル空間とは、ゼロ・ベクトルのみの 1 個からなる集合をいう。「有限次元」ベクトル空間とは、有限個のベクトルから構成される基底をもつ場合をいう。個数をベクトルの次元 (dimensional) といい、空間 V を構成するベクトルの個数の一組が n 個であれば、 $\dim(V) = n$ と表す。

定理 2

$$\dim(V) = \text{“}V \text{ に属するベクトルの 1 次独立な最大個数”}$$

**例題 1.**

つぎのベクトルの組が一次独立か一次従属か調べよ。

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(解) (1) 一次結合からつくる同次方程式の解を調べればよい。一次結合の関係式でゼロベクトルに等しくなるときを考えるから、 $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ 。よって c_1, c_2 を未知変数とする連立

同次方程式: $\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 = 0 \\ c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot (-1) = 0 \end{cases}$ を調べる。方程式を解くためには、係数行列の正則性、逆行列の存在、行列の階数などの同値な条件のうちのやり易いものを選んで行えばよい。いま階数を計算すると、係数行列 A として $\text{rank}(A) = 2$ となるから、 A は正則行列で、逆行列が存在する。したがって、 $Ac = 0$ より、 $c = 0$ 。すべての成分がゼロだから、一次独立である。

(解) (2) 同じように同次連立方程式 $Ac = 0$ を調べる。 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ だから、 $\text{rank}(A) = 1$ 。一次独立ではない。独立かどうかは二律背反の概念であるから、一次従属である。念のために非ゼロ (自明でない解) の解があることを示す。つまり任意定数をもちいて、解を表し、ゼロでない一つの定数 (少なくとも一つの非ゼロ解) を選べばよい。 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$ いまの場合には、任意

定数を c として、一般解が $x = \frac{1}{2}c, y = c$ 。すなわちともにゼロでない数 $\frac{1}{2}, 1$ をもちいた一次結合: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ とできるから、一次従属である。

例題 2.

つぎの解空間の次元と 1 組の基底をもとめよ。

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

(解) まず方程式を解くためには、定数項は無視して、掃き出し法 (ピボット法) により

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-2	1	2	3	... ①
2	-4	3	3	8	... ②
1	-2	1	2	3	... ③ = ①
0	0	1	-1	2	... ④ = ② + ③ × (-2)
1	-2	0	3	1	... ⑤ = ③ + ③ × (-1)
0	0	1	-1	2	... ⑥ = ④

この 2 行 5 列の行列の階数は 2 である。変数が 5 個あるから、3 個の任意定数をもちいる。第 2 項、第 4 項、第 5 項にもちいると、 $x_2 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$ とおいて、

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + (-2)c_1 + 0 \cdot x_3 + 3 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot c_1 + 1 \cdot x_3 + (-1) \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 = 0 \end{cases} \quad \text{。移項をすれば、} \quad \begin{cases} x_1 = 2c_1 - 3c_2 - c_3 \\ x_3 = c_2 - 2c_3 \end{cases}$$

以上から、解をベクトル表現すれば $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。この 3 つ

のベクトルのつくる 5 行 3 列の行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ の階数をもとめると、 $\text{rank}(A) = 3$, つまり $\dim(W) = 3$ で、 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が W の 1 組の基底ベクトルとなる。

定理 3

連立同次方程式 $A\mathbf{x} = 0$ (ここで行列 A は m 行 n 列) における解空間 W の次元は

$$\dim(W) = n - \text{rank}(A)$$

あるいは $\dim(W) + \text{rank}(A) = n$ より、 m は方程式の個数、 n は変数の個数であったから、

$$\text{「(解空間の次元) + (係数行列の階数) = (未知変数の個数)」}$$

となる。

◇ ◇ ◇ 練習問題 ◇ ◇ ◇

1. 一次独立か一次従属か判定せよ。

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

答え (1) 一次独立 (2) 一次従属

2. つぎが一次独立となるための a の条件を求めよ。

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

答え (1) $a \neq \frac{2}{3}$ (2) $a \neq 3$

3. 連立一次方程式の解空間の基底と次元をもとめよ。

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 8z - 3u = 0 \\ -2x + 3y - 13z + 2u = 0 \\ 3x + 3y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

基底の選び方は一通りではないことに注意

答え。(1) 解空間の基底の一つは $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, 次元は $\dim(W) = 1$.

(2) 一つの基底として $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 次元は $\dim(W) = 1$.