

例題 35

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値とそれに対する固有空間を求めよ。

【解答】 A の特性多項式を求めると

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0.$$

$$\therefore (x-2)^2(x-1)=0.$$

したがって、2(2重根)および1が A の固有値である。

固有値2に対する固有空間 W は、連立1次方程式 $(2E-A)x=0$ の解空間である。

$$2E-A = \begin{bmatrix} 2-1 & -2 & -2 \\ 0 & 2-2 & -1 \\ -(-1) & -2 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

だから、この連立1次方程式は

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で、これを解くと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \therefore W \text{ は } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ではられる1次元部分空間である.}$$

固有値1に対する固有空間 W' は、同様にして、連立1次方程式 $(E-A)x=0$,

$$\text{すなわち } \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の解空間である。これを解くと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \therefore W' \text{ は } \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ではられる1次元部分空間である.}$$

問 題

35.1 次の行列の固有値とそれに対する固有空間を求めよ。

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 17 & -2 & 4 \\ 28 & -1 & 8 \\ -42 & 6 & -9 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} 0 & -5 & -4 \\ -3 & -7 & -7 \\ 5 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

例題 37

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は対角化可能か、可能ならば対角化せよ。

【解答】 A の特性方程式は

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3) = 0.$$

$\therefore 1, 3$ が A の固有値。

固有値1(2重根)に対する固有空間 W_1 は $(E-A)x=0$ の解空間であるが、

$$E-A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから、 $\text{rank}(E-A)=1$ 、したがって $\dim W_1=2$ 。

固有値3は単根だから、これに対する固有空間を W_2 とすると、 $\dim W_2=1$ 。

したがって、 A の各固有値に対して、その重複度と固有空間の次元が一致するから、 A は対角化可能である。

連立1次方程式 $(E-A)x=0$ を解くと、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \therefore a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ が } W_1 \text{ の基底.}$$

連立1次方程式 $(3E-A)x=0$ を解くと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \therefore a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ が } W_2 \text{ の基底.}$$

このとき $\{a_1, a_2, a_3\}$ は全空間 V の基底で、はじめの基底をこの基底に変換する行列は $P=[a_1 \ a_2 \ a_3]$ であり、 A の表わす線形変換 T はこの基底に関して

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

で表わされる。

問 題

37.1 次の行列は対角化可能か、可能ならば対角化せよ。

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

例題 46

実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ を直交行列 P によって対角化せよ. またこの行列 P を求めよ.

【解答】 行列 A の特性方程式を求めると

$$x^3 - 12x^2 - 45x - 54 = (x-3)^2(x-6) = 0.$$

したがって, 3 (2重根), 6 が A の固有値である.

固有値 3 に対する固有空間 W_1 は, 連立 1 次方程式 $(3E - A)x = 0$ の解空間であるが, 基本変形によって

$$3E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから, W_1 は $\alpha_1 = (1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$ を基底にもつ.

$$b_1 = \alpha_1, \quad b_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = \frac{1}{2}(-1, 1, 2)$$

とし, これらの正規化を e_1, e_2 とする.

固有値 6 に対する固有空間 W_2 は, 同様に方程式 $(6E - A)x = 0$ の解空間で,

$$6E - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから, $\alpha_3 = (1, -1, 1)$ を基底にもつ. α_3 の正規化を e_3 とする.

このとき, e_1, e_2, e_3 は正規直交系で, 求める直交行列は

$$P = [e_1 \ e_2 \ e_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

かつ

$$PAP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

問 題

46.1 次の実対称行列 A を直交行列 P によって対角化せよ. また行列 P を求めよ.

$$(i) \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

例題 49

エルミート行列 $A = \begin{bmatrix} a & i & 1 \\ -i & a & i \\ 1 & -i & a \end{bmatrix}$ (a は実数) をユニタリ行列 U によって対角化せよ. またこの行列 U を求めよ.

【解答】 行列 A の特性方程式を求めると

$$x^3 - 3ax^2 + 3(a+1)(a-1)x - (a-2)(a+1)^2 = 0.$$

$$\therefore \{x - (a-2)\}\{x - (a+1)\}^2 = 0.$$

したがって, $a-2, a+1$ が A の固有値である.

固有値 $a-2$ に対する固有空間 W_1 は $[(a-2)E - A]x = 0$ の解空間であるが,

$$(a-2)E - A = \begin{bmatrix} -2 & -i & -1 \\ i & -2 & -i \\ -1 & i & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから, W_1 は $\alpha_1 = (-1, -i, 1)$ を基底にもつ.

固有値 $a+1$ に対する固有空間 W_2 は $[(a+1)E - A]x = 0$ の解空間であるが,

$$(a+1)E - A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ i & 1 & -i \\ -1 & i & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから, W_2 は $\alpha_2 = (i, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)$ を基底にもつ.

$$b_2 = \alpha_2, \quad b_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = \frac{1}{2}(1, i, 2)$$

として, α_1, b_2, b_3 の正規化を e_1, e_2, e_3 とすると, これは正規直交系で

$$U = [e_1 \ e_2 \ e_3] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

が求めるユニタリ行列, かつ

$$U^*AU = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}.$$

問 題

49.1 次のエルミート行列をユニタリ行列 U によって対角化せよ. また U を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1-i & \sqrt{2} \\ 1+i & 1/2 & -(1+i)/2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -(1-i)/2\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$$