5 固有値と固有ベクトル

5.0 固有値の歴史と応用分野 (Ｗｉｋｉｐｅｄｉａ)

18 世紀初頭、ヨハン・ベルヌーイとダニエル・ベルヌーイ、ダランベール および オイラーらは、いくつかの質点がつけられた重さのない弦の運動を研究しているうちに固有値問題につきあたった。18 世紀後半に、ラプラスとラグランジュはこの問題をさらに研究し、弦の運動の安定性には固有値が関係していることをつきとめた。彼らはまた固有値問題を太陽系の研究にも適用している。オイラーはまた剛体の回転についても研究し、主軸の重要性に気づいた。ラグランジュがこの後発見したように、主軸は慣性行列の固有ベクトルである。19 世紀初頭には、コーシーがこの研究を二次曲面の分類に適用する方法を示し、その後一般化して任意次元の二次超曲面の分類を行った。コーシーはまた 仏: ”racine caracteristique”（特性根）という言葉も考案し、これが今日「固有値」と呼ばれているものである。彼の単語は「特性方程式 (英: characteristic equation)」という用語の中に生きている。フーリエは、1822 年の有名な著書 (仏: ”Theorie analytique de la chaleur”) の中で、変数分離による熱方程式の解法においてラプラスとラグランジュの結果を利用している。スツルムはフーリエのアイデアをさらに発展させ、これにコーシーが気づくことになった。コーシーは彼自身のアイデアを加え、対称行列の全ての固有値は実数であるという事実を発見した。この事実は、1855 年にエルミートによって、今日エルミート行列と呼ばれる概念に対して拡張された。ほぼ同時期にブリオスキは直交行列の固有値全てが単位円上に分布することを証明し、クレープシュが歪対称行列に関して対応する結果を得ている。最終的に、ワイエルシュトラスが、ラプラスの創始した安定論 (英: stability theory) の重要な側面を、不安定性の引き起こす不完全行列を構成することによって明らかにした。19 世紀中ごろ、リュービルは、スツルムの固有値問題の類似研究を行った。彼らの研究は、今日スツルム-リュービル理論と呼ばれる一分野に発展している。 シュヴァルツは一般の定義域上でのラプラス方程式の固有値についての研究を 19 世紀の終わりにかけて初めて行った。一方、ポワンカレはその数年後ポワソン方程式について研究している。20 世紀初頭、ヒルベルトは、積分作用素を無限次元の行列と見なしてその固有値について研究した。ヒルベルトは、ヘルムホルツの関連する語法に従ったのだと思われるが、固有値や固有ベクトルを表すために ドイツ語の 独: eigen を冠した最初の人であり、それは 1904 年のことである。ドイツ語 ”eigen” は「独特の」「特有の」「特徴的な」「個性的な」といったような意味があり、固有値は特定の変換に特有の性質というものを決定付けるということが強調されている。英語の標準的な用語法で ”proper value” ということもあるが、印象的な ”eigenvalue” のほうが今日では標準的に用いられる。

固有値・固有ベクトルって何に使うの？ by Tech Tips ふと、固有値・固有ベクトルって何がそんなに嬉しいのか？何の役に立つのか？と思っていろいろ調べていた。（対角化してべき乗計算が速くできますだけだと、ちょっと勉強する動機づけとしては弱い。。）そういえば、一年前くらいに読んだ page rank の論文に固有値・固有ベクトルが使われていたのを思い出したので、これをちょこっと紹介。

まず、page rank アルゴリズムについて。これは、いわずと知れた google の検索処理において中心的な役割を果たす処理です。page rank の基本的な考え方は、”たくさんリンクを張られてい

るサイトほど重要なサイトである”ということです。つまり、たくさんリンクを張られているサイトが検索で上位に現れます。加えて、同じリンクを張られているでも、重要なページ/人気のあるページからリンクを張られているのか、重要でない/人気でないページからリンクを張られているのかを区別しています。(例えば、あなたのページがクラスメイトの太郎くんからリンクをはられているのと、yahoo のカテゴリページからリンクされているのでは意味が違いますよね？)

ここまで、まとめると、リンクをたくさん張られているサイトほど重要とみなす重要なサイトからのリンクほど、大きな重みを付けるとなります。

あるサイトの重要度を上記の定義にしたがって、定式化してみます。(※本当は、リンク元のページから受け取る重要度をそのページのリンク総数で割るという処理がありますが、簡単のため省略しています。) $\boldsymbol{x} = c\sum_i A_i \boldsymbol{x}_i$、ここで $\boldsymbol{x}$ は、あなたのページの重要度、x_i, $i = 1, .., n$ はそれぞれウェブページ i の重要度です。(ウェブページは全部で n 個あるとしています。) A_i, $i = 1, .., n$ は、0 or 1 の値です。もし、ウェブページ i からあなたのページにリンクがあれば 1、なければ 0 です。c は定数で、常に全体のウェブページの重要度の総和が一定となるように正規化しています。

上の式から分かるように、あなたのページの重要度は、他のページの重要度がわかっていないと計算できません。逆に、他のページの重要度も、あなたのページの重要度の影響を受けています。ということで、連立方程式をたてて、すべてのページに適切な重要度を割り当てます。連立方程式は、ベクトル $\boldsymbol{x}$、グラフの隣接行列 A を用いて以下のように書くことができます。隣接行列は先に説明したのと同様のリンクの接続情報です。以下の方程式を解いて $\boldsymbol{x}$（すべてのウェブページの重要度）を求めることが目標です。$\boldsymbol{x} = cA\boldsymbol{x}$。両辺を定数 c で割って、左辺と右辺を入れ替えると見慣れた形が現れます。$A\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{c}\boldsymbol{x}$。そうです、$\boldsymbol{x}$ は隣接行列 A の固有ベクトルになっています。実は、私たちが毎日お世話になっている Google 検索に固有値/固有ベクトルが使われていたのですね。実際の pagerank を簡素化して説明しました。実際の処理をもっときちんと知りたいという方は、ラリーページとセルゲイブリンがスタンフォード時代に書いた論文をご参照。

歴史からは、数学の解析を出発して、自然科学（数学、物理)、工学へ応用され、社会科学（経済学、統計学）などに幅広く応用されていますから、調べてみてください。ここでは情報の検索に使われるという例です。

5.1 固有値の定義

定義 **1**

正方行列 A に対し、ゼロベクトルでない $\boldsymbol{x}$ とスカラー λ があって、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を満たすとき、λ を**固有値** (eigen value), $\boldsymbol{x}$ を**固有ベクトル** (eigen vector) という。

定義 **2**

より具体的に計算する手順は、まず方程式

$$\det|A - \lambda E| = 0$$

を**固有方程式**とよびこれを解きます。この解が**固有値**になります。複素解になる場合もあります。

さらにそれぞれの λ をもちいて、係数とする連立方程式

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=0$$

の解 $\boldsymbol{x}$ を固有値 λ の**固有ベクトル**です。これは任意定数を含みますから、部分空間です。これを固有値 λ の**固有空間**といいます。係数を $\lambda E-A$ としても同じものとなります。

例題 1
２次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ では、固有多項式 $\phi_A(x)=\det|xE-A|$ は

$$\phi_A(x)=\det\begin{vmatrix}x-4 & -3\\ -1 & x-2\end{vmatrix}=(x-4)(x-2)-(-3)(-1)=x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$$

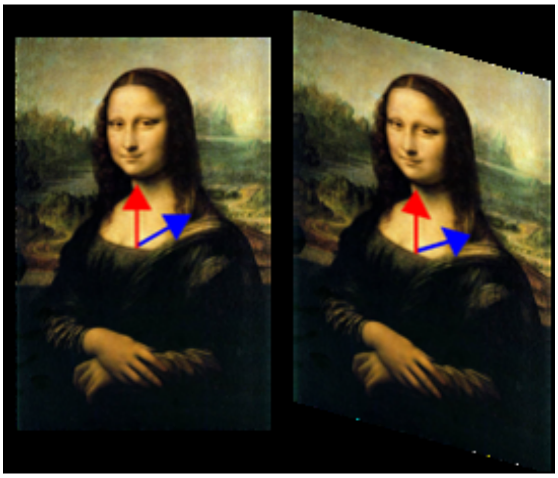
ですから、これを解いて、固有値は $\lambda_1=1$ と $\lambda_2=5$ となります。これに対する固有ベクトルは、連立方程式を解きます。$A-\lambda_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}-3x-3y=0\\ -x-y=0\end{cases}$ より、$\begin{cases}x=c\\ y=-c\end{cases}$, $\boldsymbol{x}_1=c\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, ここで c は任意定数。したがってこの $\lambda_1=1$ に対する固有空間 $W_{\lambda_1}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle$ となります。同様に計算すると、固有値 $\lambda_2=5$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は $(A-5E)\boldsymbol{x}_2=0$ ですから連立方程式 $\begin{cases}x-3y=0\\ -x+3y=0\end{cases}$ を解いて $\begin{cases}x=3c\\ y=c\end{cases}$ で、$\boldsymbol{x}_2=c\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$, ここで c は任意定数。したがってこの $\lambda_2=5$ に対する固有空間 $W_{\lambda_2}=\left\langle\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$ と求められます。

問 1
３次行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$ では、固有多項式は $\phi_A(x)=(x+8)(x+1)^2$ であり、固有値 $\lambda_1=-8,\ \lambda_2=-1$(重複度 2) となることを示せ。また固有空間は $W_{\lambda_1}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right\rangle$, $W_{\lambda_2}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$ となることを示せ。

問 2
$A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ とするとき、$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ に対する、$f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ をもとめ、$f_A(\boldsymbol{x})$ がベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ のスカラー倍となることを確かめよ。またこのスカラー値は固有値の一つである。

(ヒント) 固有値のひとつは $\lambda=4$ で、対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix}8\\ 4\end{pmatrix}$ は固有空間のひとつ。

この方程式の意味は、行列 A から定まる線形変換 $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ において、ベクトルの‘向き’をもとのベクトル $\boldsymbol{x}$ と、$f_A(\boldsymbol{x})$ を比較すると、一般には同じ向きにはなりませんが、ある特定のベクトル $\boldsymbol{x}$ については、同じとなる場合となります。このベクトルが固有ベクトルです。



平面にいくつかの点 $\boldsymbol{x}$ をとり、その対応 $A\boldsymbol{x}$ を調べる。空間や平面ベクトルの線形変換は像の回転、鏡映、スケールの拡大・縮小などを合成するものですから、これらを視覚化することができます。`http://ja.wikipedia.org/wiki/固有値` には、モナリザの「平面画像」(２次元）を変換した像があります。右図の変換はせん断変換の例として、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ を考えたものと説明されています。

つぎでは行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ を取り上げて、そのもとの点 $\boldsymbol{x}$ と線形変換 $A\boldsymbol{x}$ を計算して、どこにどのように、固有値と固有ベクトルが表れてくるか計算してみましょう。

与えられたベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対しては $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+3x_2}{4} \end{pmatrix}$ この計算には、表計算ソフトで簡単に求められますね。実数を取り上げるのはたいへんですから、軸上の３点づつの整数で計算しました。

正のｘ軸上の点

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
1	0	1	1/4
2	0	2	1/2
3	0	3	3/4

正のｙ軸上の点

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
0	1	1/2	3/4
0	2	1	3/2
0	3	3/2	9/4

負のｘ軸上の点

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
-1	0	-1	$-1/4$
-2	0	-2	$-1/2$
-3	0	-3	$-3/4$

負のｙ軸上の点

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
0	-1	$-1/2$	$-1/2$
0	-2	-1	$-3/2$
0	-3	$-3/2$	$-9/4$

$y=-x$ 上の点 $(x>0,y<0)$

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
1	-1	1/2	$-1/2$
2	-2	1	-1
3	-3	3/2	$-3/2$

$y=-x$ 上の点 $(x<0, y>0)$

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
-1	1	$-1/2$	$1/2$
-2	2	-1	1
-3	3	$-3/2$	$3/2$

$y=x/2$ 上の点 $(x>0, y>0)$

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
2	1	$5/2$	$5/4$
4	2	5	$5/2$
6	3	$15/2$	$15/4$

$y=-x$ 上の $(x<0, y<0)$

x_1	x_2	$(2*x_1+x_2)/2$	$(x_1+3*x_2)/4$
-2	-1	$-5/2$	$-5/4$
-4	-2	-5	$-5/2$
-6	-3	$-9/2$	-3

このうち、２本の直線 $y=-x$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ については、“方向”が変わっていません。

$$A\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x},\quad A\boldsymbol{x}=\frac{5}{4}\boldsymbol{x}$$

を満たします。ですから、この集合の点は「部分空間」となります。それぞれ、$\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ となっています。

問 3

(1)　上の行列 $A=\begin{pmatrix}1&1/2\\1/4&3/4\end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ。またこれを図示してみなさい。

(2)　行列 $A=\begin{pmatrix}1&1/4\\1/4&1\end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求め、さらに図示せよ。

問 4

行列 $A=\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}$ において、(1)　A の固有多項式 $\phi_A(x)=\det|A-xE|$ を求めよ。 (2)　$\mathbb{R}^2$ の変換 $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ の固有値 λ をもとめよ。 (3)　各々の固有値に対する固有空間 W_λ を求めよ。

(答) (1)　$\phi_A(x)=\det\begin{vmatrix}x-8&10\\-5&x-(-7)\end{vmatrix}=x^2-x-6$. (2)　$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ だから、固有値は $\lambda_1=-2$ と $\lambda_2=3$. (3)　$\lambda_1=-2$ に対しては、$(\lambda_1E-A)\boldsymbol{x}=0$ より、$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, c は任意定数。よって $W_{\lambda_1}=\left\langle\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\rangle$ を得る。また $\lambda_2=3$ に対しては、同様に $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, c は任意定数。したがって $W_{\lambda_2}=\left\langle\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\rangle$。

定理 1 (ケーリー・ハミルトンの定理)

行列 A の固有多項式 $\phi_A(x)=\det|xE-A|$ において

$$\phi_A(x)=x^n+k_1x^{n-1}+k_2x^{n-2}+\cdots+k_{n-1}x+k_n$$

ならば、スカラー x の代わりに行列 A を代入し、定数項では $k_n\,E$ (E は単位行列) とすると、行列のべき乗計算、スカラー倍によって定められたつぎの行列はゼロ行列 $\boldsymbol{O}$ に等しい。

$$\phi_A(A) = A^n + k_1A^{n-1} + k_2A^{n-2} + \cdots + k_{n-1}A + k_n = \boldsymbol{O}$$

(注意: 形式上は $\phi_A(A) = \det|AE - A| = 0$ と考えられるが、これは行列式の定義からは導かれてはいない。)

例題 2
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ならば、$\varphi_A(x) = \det|xE - A| = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ であるから、

$$\begin{aligned} & A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E \\ = \quad & \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 5
２次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ での２つの固有値は

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right)$$

この２つにおいて、

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d,\ \ \lambda_1 \times \lambda_2 = a\,d - b\,c$$

が成り立つ。これを示せ。すなわち２個の和は対角成分の和であり、積は行列式の値に等しい。

問 6
３次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ とするとき、固有多項式の展開式における係数は

$$\phi_A(x) = \det|\,x\,E - A| = x^3 - k_1x^2 + k_2x - k_3$$

における係数 (第２項 k_1, 第４項 k_3 の符号に注意) は

$$k_1 = a_1 + b_2 + c_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$k_2 = a_1b_2 - a_2b_1 + b_2c_3 - b_3c_2 + a_1c_3 - a_3c_1$$

$$k_3 = a_1b_2c_3 + a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = \det|A|$$

となることを計算せよ。

問 7
２次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列に対する固有値は、もとの固有値の逆数であることを示せ。一般に逆行列が存在するときには、逆行列と固有値の関係は逆数である。

(答) 逆行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であり、その固有値は $\dfrac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2(ad-bc)}$, $\dfrac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2(ad-bc)}$ となる。

定義 3

二つの正方行列, A, B が**相似** (similar)（あるいは合同とも）であるとは、正則行列 P があって、

$$B = P^{-1}AP$$

とできるとき。

定義 4

与えられた行列 A が対角行列 D と相似であるとき。すなわち適当な正則行列 P で

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

とできることを A の**対角化**（dianalization）という。

しかし、このように対角できる行列には、条件が必要である。

定理 2

n 次の正方行列 A が異なる $r(\leq n)$ 個の実数の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ をもつとする。A が対角化可能である必要十分条件はそれぞれの固有値 λ_i に対する固有空間 W_{λ_i} の次元 $\dim(W_{\lambda_i})$ の総和が n に等しいとき、すなわち

$$\sum_i \dim(W_{\lambda_i}) = n$$

例題 3 (対角化できる場合)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

このような P, B は一通りではなく、固有ベクトルの順序をかえても空間の次元は同じであり、

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で対角化されている。対角成分の順序が異なるだけである。

例題 4 (対角化ができない場合)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

は固有多項式 $\phi_a(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-1)$ で, 固有値 -1(重解),2 となる。固有空間は $W_{(-1)} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. 次元の和は 2 で $\dim(W_{(-1)}) + \dim(W_{(2)}) = 2 < 3$ となり、対角化できない場合である。

問 8
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ について (1) 固有値 (2) 固有ベクトル (3) A を対角化する正則行列 P (4) A^n $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。

(答) (1) 固有多項式 $\phi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1) - (-1)(-4) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ から、固有方程式 $\phi_A(x) = 0$ を解くと、$x = -2, 3$ である。よって、A の固有値は $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$。(2) 固有ベクトルを求めるには、連立方程式を解く。$\lambda_i, i = 1, 2$ を代入した $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = 0$ から、それぞれの不定形の解 $\boldsymbol{x}$ が $s\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s は任意定数)。(3) この 2 つが定めるベクトル空間のうちから、ベクトルを選び、さらに選んだベクトルで行列を定める。これを $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ とする。(**注意**：選んだベクトルからつくった行列は正則行列となるはず。なぜなら固有値が異なれば、固有ベクトルは 1 次独立。それの定める行列は正則であるから。）その逆行列は $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -5$ だから、$P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となり、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ を得る。(4) 対角化できると、べき乗計算は簡単である。すなわち、$\left(P^{-1}AP\right)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$。これから、$A^n$ を求めるには、P が直交行列で、$\left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}A^nP$ より、

$$A^n = P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & 3^n - (-2)^n \\ 4 \cdot 3^n - (-2)^{n+1} & 3^n + (-2)^{n+2} \end{pmatrix}$$

問 9
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。（ヒント：固有値に重根（重複解）をもつ場合）

(答) (1) 固有方程式 $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & 3 \\ -1 & -1 & x+2 \end{vmatrix} = (x-1) \times \det \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+1) = 0$ から、$x = -1, 1$ である。よって、A の固有値は $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$(重複度 2) となる。(2) 固有ベクトルを求めるには、連立方程式を解く。$\lambda_1 = -1$ のときは、固有ベクトルのつくる固有空間は $W_{\{\lambda_1 = -1\}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ また重複度 2 をもつ固有ベクトルは、任意定数を 2 つもちいる。

$\lambda_2 = 1$ のときは、固有空間は $W_{\{\lambda_2=1\}} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$。これから、$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と対角化できる。もし固有ベクトルの順序を変えて、正則行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と対角化される。

$\boxed{\text{定義}}$ **5**

正規行列 (normal matrix) とは

$$A^* = A \qquad \text{ここで転置と共役をする } A^* = {}^t(\overline{a_{ij}}) = (\overline{a_{ji}}) \text{ とする}$$

定理 3

(対角化に関する性質)

(1) n 次正方行列 A は適当な正則行列で $P^{-1}AP$ を上三角行列に変形できる。

(2) 固有値がすべて実数ならば、P として直交行列を選べる。

(3) 実対称行列の固有値はすべて実数である。

(4) 実対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する。

(5) ユニタリー行列の固有値の絶対値は 1 となる。

(6) 正規行列は適当なユニタリー行列で対角化できる。逆に、正方行列がユニタリー行列で対角化可能であれば、この正方行列は正規である。