◇◇◇ 練習問題 ◇◇◇

問題 1

つぎの基底から $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をつくれ。

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

問題 2

$\mathbb{R}^4$ において、$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。

問題 3

$\mathbb{R}^3$ から、部分空間 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ への正射影を表す線形写像の表現行列 A をもとめよ。

問題 4

つぎの行列 $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ は直交行列であることを示せ。

問題 5

写像 $f_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ について

$$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

と定めるとき、$f_{\boldsymbol{a}}$ は線形変換であることを示せ。さらに直交変換であることを示せ。