4 正規直交基底

4.1 内積空間

複素数 (complex number) とは、方程式 $x^2 + 1 = 0$ のうちの一つの解をもちい、これを記号で $i = \sqrt{-1}$ と表して、虚数単位といい、 実数 (real number)x, y と組み合わせて、$z = x + yi$ の形をいいます。x を実部、y を虚部で加法、乗法の演算などをつぎで定めます。

$$z = a + bi, w = c + di \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{複素数のゼロ: } z = a + bi = 0 \leftrightarrow a = 0, b = 0 \\ \text{和：} z + w = a + c + (c + d)i \\ \text{積：} zw = ac - bd + (ad + bc)i \\ \text{逆数：} \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ \text{絶対値：} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{共役: } \overline{z} = a - bi \end{array}$$

複素数は実部と虚部をベクトルの成分（要素）とした形に対応しています。ベクトルとよく似た性質をもっています。ただしベクトルが大小関係がなかったように順序の関係を定義しません。実係数の方程式を解くときなど、あるいは仮想的な概念での理論には重要な働きをもちます。

以下のベクトル空間では、内積を複素数 $\mathbb{C}$ の要素（スカラー）として定義をしますが、次元が高くなるので、実数 $\mathbb{R}$ での議論に戻ることもします。複素数の関数を微分、積分する理論は複素関数論として、微積分学の重要な発展の部分です。

$\boxed{\text{定義}}$ **1**
複素数 $\mathbb{C}^n$ での内積の定義：2 つのベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して、実数の値

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \cdots + a_n \overline{b_n}$$

と定義します。

記号は $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ 以外にも, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, ${}^t\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}$ などもよく用いられます。ここで積の順序に注意します。実数を成分とするときには、同じ値でしたが、複素数では

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \cdots + a_n \overline{b_n} = \overline{\overline{a_1}\, b_1 + \overline{a_2}\, b_2 + \cdots + \overline{a_n}\, b_n} = \overline{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}}$$

となります。またノルムの定義は

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = (a_1 \overline{a_1} + a_2 \overline{a_2} + \cdots + a_n \overline{a_n})^{1/2} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2} \geqq 0$$

2 重線でノルムを $\|\boldsymbol{v}\|$ と書いてありますが、絶対値の記号をノルムの記号は同じものですが、とくに誤用は起らないでしょうし、実数の場合では一致します。
性質：

(1) スカラー倍 k の演算：$\|k\boldsymbol{v}\| = |k|\, \|\boldsymbol{v}\|$ (複素数の絶対値とベクトルのノルムの積)

(2) 三角不等式：$\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ ノルムは実数値ですから、大小関係が意味をもちます。

(3) シュワルツの不等式：$\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\| \leqq \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$

(4) 非負性：$\|\boldsymbol{v}\| \geqq 0$, 等号は $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, ゼロベクトルの場合

4.2 直交空間、直交補空間

前節では、複素空間 $\mathbb{C}^n$ でのベクトルでしたが、ここでは $\mathbb{R}^n$ のベクトルとします。ベクトルのなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|}$$

もし $\theta = \dfrac{\pi}{2} = 90^o$、$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ ならば、$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{w}$ と表し、2 つのベクトルは直交 (orthogonal) するといいます。perpendicular も垂直とか 2 つの面が直角をなすという用語です。orthogonal のほうは数学の専門用語の使い方です。

$\boxed{\text{定義}}$ **2**

(1) ベクトル空間 V とその部分空間 W において、

$$\boldsymbol{v}\perp W \iff \boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{w}, \quad \forall\boldsymbol{w}\in W$$

(2) 部分空間 W の**直交補空間** (orthogonal complement, perpendicular complement) $W^{\perp}$ とは、

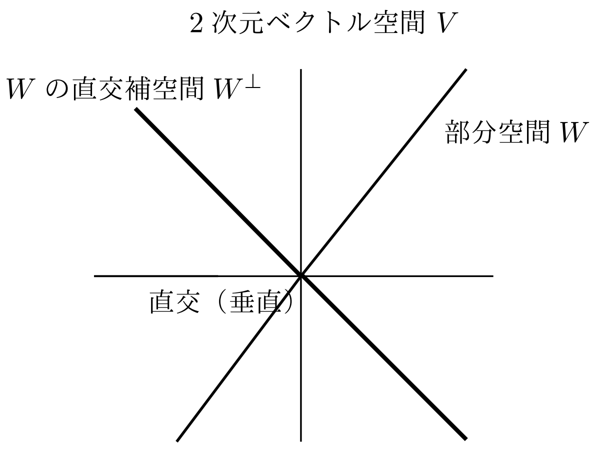
$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{v}\perp W,\,\boldsymbol{v}\in V\}$$

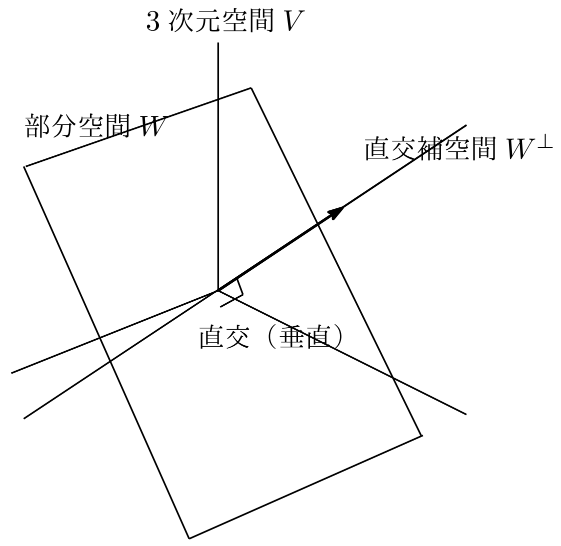
$\boxed{\text{定義}}$ **3**

ベクトルの**直和** (direct sum) とは、部分空間 W_1, W_2 により、空間 $V = W_1 + W_2$, $W_1 \cup W_2 = \{0\}$ のとき。とくに $V = W_1 \oplus W_2$ と表す。

問 1

$V = W \oplus W^{\perp}$ を示せ。





問 2

ベクトル空間を V、その部分空間を W とする。任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ を、W に正射影してできるベクトルを $\boldsymbol{w}$ とすると、$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \perp W$ が成り立つ。これを図に描いて示せ。

4.3 正規直交基底

$\boxed{\text{定義}}$ **4**

ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v_i}, i = 1, 2, \cdots, n\}$ について、正規直交基底 (orthogonal normal base vector) であるとは、

(i) 基底であること（一次独立、空間を生成する）

(ii) 正規 (normal) とは、ノルムが 1 であること：$\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$

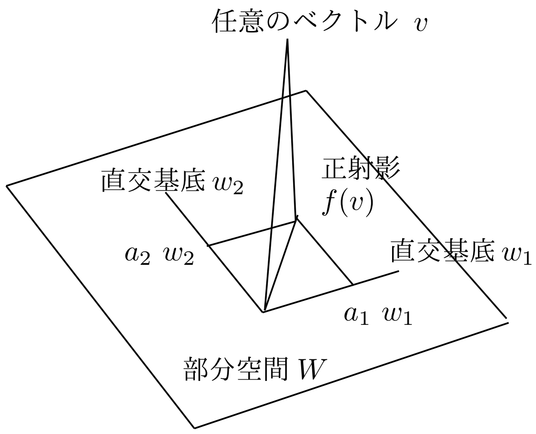
(iii) お互いに直交している：内積 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0 \ (i \neq j)$

問 3

部分空間 W には k 個のベクトル $\{\boldsymbol{w_i}, i = 1, 2, \cdots, k\}$ が正規直交基底をつくっている。空間内の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を W へ正射影してできる像の写像は線形写像であることを示せ。またこの写像を f として、ベクトル $\boldsymbol{v}$ の像 $f(\boldsymbol{v})$ の一次結合の係数は、内積により

$$f(\boldsymbol{v}) = a_1\boldsymbol{w_1} + a_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + a_k\boldsymbol{w_k}, \quad a_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_i}),\, i = 1, 2, \cdots, k$$

と表せることを示せ。



4.4 正規直交化の方法

必ずしも直交していないベクトルの組を順次に変換して（ノルムの調整とベクトルの線形結合を組み合わせる）、正規直交基底となるように定めていく方法がある。グラム・シュミットの方法 (Gram-Schmidt) とよぶ。

与えられたベクトル $\boldsymbol{v_i}$ から、正規直交基底 $\boldsymbol{w_i}$ をつくる。

(1) $\boldsymbol{v_1}$ から $\boldsymbol{w_1}$ をつくる：

$$\boldsymbol{w_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|}$$

(2) $\boldsymbol{v_2}$ と $\boldsymbol{w_1}$ から $\boldsymbol{w_2}$ をつくる：

$$\boldsymbol{w_2} = \frac{\boldsymbol{v_2} - a_{21}\boldsymbol{w_1}}{\|\boldsymbol{v_2} - a_{21}\boldsymbol{w_1}\|}, \quad \text{内積}\, a_{21} = (\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{w_1})$$

(3) $\boldsymbol{v_3}$ と $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$ から $\boldsymbol{w_3}$ をつくる：

$$\boldsymbol{w_3} = \frac{\boldsymbol{v_3} - a_{31}\boldsymbol{w_1} - a_{32}\boldsymbol{w_2}}{\|\boldsymbol{v_3} - a_{31}\boldsymbol{w_1} - a_{32}\boldsymbol{w_2}\|}, \quad \begin{cases} \text{内積}\, a_{31} = (\boldsymbol{v_3} \cdot \boldsymbol{w_1}), \\ \text{内積}\, a_{32} = (\boldsymbol{v_3} \cdot \boldsymbol{w_2}) \end{cases}$$

(4) $\boldsymbol{v_4}$ と $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}$ から $\boldsymbol{w_4}$ をつくる：

$$\boldsymbol{w_4} = \frac{\boldsymbol{v_4} - a_{41}\boldsymbol{w_1} - a_{42}\boldsymbol{w_2} - a_{43}\boldsymbol{w_3}}{\|\boldsymbol{v_4} - a_{41}\boldsymbol{w_1} - a_{42}\boldsymbol{w_2} - a_{43}\boldsymbol{w_3}\|}, \quad \begin{cases} a_{41} = (\boldsymbol{v_4} \cdot \boldsymbol{w_1}), \\ a_{42} = (\boldsymbol{v_4} \cdot \boldsymbol{w_2}), \\ a_{42} = (\boldsymbol{v_4} \cdot \boldsymbol{w_3}) \end{cases}$$

以下これを繰り返して、k まで続ける。

問 4

グラム・シュミットの手順において、

$$\boldsymbol{w_4} = \frac{\boldsymbol{v_4} - a_{41}\boldsymbol{w_1} - a_{42}\boldsymbol{w_2} - a_{43}\boldsymbol{w_3}}{\|\boldsymbol{v_4} - a_{41}\boldsymbol{w_1} - a_{42}\boldsymbol{w_2} - a_{43}\boldsymbol{w_3}\|}, \quad \begin{cases} a_{41} = (\boldsymbol{v_4} \cdot \boldsymbol{w_1}), \\ a_{42} = (\boldsymbol{v_4} \cdot \boldsymbol{w_2}), \\ a_{42} = (\boldsymbol{v_4} \cdot \boldsymbol{w_3}) \end{cases}$$

としてつくった、$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}, \boldsymbol{w_4}$ は互いに直交することを示せ。

4.5 直交変換、直交行列

$\boxed{\text{定義}}$ **5**

線形写像 $f : V \to V$ が自分自身への写像であるときに、変換とよぶ。線形変換が内積を変えない場合を、直交変換という。

$$f(\boldsymbol{u}) \cdot f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$$

内積の値を保つことは、ベクトルが直交していれば、変換した先のベクトルも直交する。ともに内積の値はゼロで等しくなる。またノルム（長さ）も変わらない。この例として、原点を中心とした平面上の点の回転、原点を通る直線に関する線対称な移動などは直交変換である。

定理 1

ベクトル空間 V には正規直交基底 $\{\boldsymbol{v_i}, i = 1, 2, \cdots, n\}$ があるとする。線形変換 $f : V \to V$ が直交変換であるための必要十分条件は、$\{f(\boldsymbol{v_i}), i = 1, 2, \cdots, n\}$ が空間 V の正規直交基底となること。

いいかえると、「基底が直交すること」と「変換の行列が直交行列であること」が同じことである。

n 次正方行列を列ベクトルで表して、$P = [\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \cdots, \boldsymbol{p_n}]$ とすると、標準基底ベクトル $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}$ は、$\boldsymbol{p_i} = P\boldsymbol{e_i}$ 正規直交基底をつくるから、内積の値は $(\boldsymbol{p_i}, \boldsymbol{p_j}) = {}^t\boldsymbol{p_i}\boldsymbol{p_j} = \delta_{i,j}$. よって

$${}^tP\,P = E = (\delta_{i,j})$$

となる。ここでクロネッカーのデルタ記号：$\delta_{i,j} = 1, \mathrm{if}\, i = j, = 0\, \mathrm{otherwise}.$

$\mathbb{C}^n$ のベクトルでは、内積の定義が、共役複素数との積で定めた。このときには、転置行列とさらに共役複素数の演算をおこなうから、

$$\overline{{}^tP}\,P = E$$

ここで $\overline{{}^tP} = P^*$ と表すこともある。したがって、複素数の場合には、**ユニタリー行列** (unitary matrix) よぶ。直交行列の複素数版がユニタリー行列である。

例題 1
$\mathbb{R}^3$ で、$W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ とするとき、直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。

【解】部分空間 W の次元は 2、つまり平面をなす。よって $W^\perp$ は 1 次元。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと、直交性から、内積の計算は $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = x_1 + 2x_2 = 0 \ \cdots ①$, $(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = 2 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ \cdots ②$ となるから、これから、$x_2 = t$ とおくと、①より、$x_1 = -2t$, また②から、$x_3 = 5t$ を得る。任意定数 t を変化させるから、この一つのベクトルが生成する部分空間で $W^\perp = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$, W は平面のつくる部分空間で、直交補空間はその法線ベクトルの生成する部分空間である。

例題 2
$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ に正射影したベクトルを求めよ。

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ に正射影したベクトルを求めよ。

【解】

(1) $\boldsymbol{v_1} \in W_1$ の正規基底ベクトルは $\boldsymbol{w_1} = \dfrac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{v}$ の W への射影ベクトル $\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{w_1}$, ここで内積 $a_1 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_1}) = 3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{14}} + 1 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{14}} =$

$\dfrac{10}{\sqrt{14}}$. よって $\boldsymbol{w} = \dfrac{10}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 10/7 \\ 15/7 \end{pmatrix}$.

(2) W_2 の正規直交基底は まずノルムを 1 と正規化し、$\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, もう一つの $\boldsymbol{w_2}$ は、内積 $a_{21} = (\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{w_1}) = 2 \cdot 1/\sqrt{2} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ を係数として、$\boldsymbol{v_2} - a_{21}\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を求め、ノルムを 1 と正規化するから、$\|\boldsymbol{v_2} - a_{21}\boldsymbol{w_1}\| = \sqrt{3}$ だから、$\boldsymbol{w_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ となり、$\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$ が正規直交基底である。$\boldsymbol{u}$ を W へ射影したベクトルは 内積 $a_1 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w_1}) = 2\sqrt{2}$, $a_2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w_2}) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ となるから、 $\boldsymbol{w} = 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{w_1} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ が求める射影ベクトルである。

$\diamond \diamond \diamond$ 練習問題 $\diamond \diamond \diamond$

問題 1

つぎの基底から $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をつくれ。

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(答え) (1) $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

問題 2

$\mathbb{R}^4$ において、$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。

（答え）$W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問題 3
$\mathbb{R}^3$ から、部分空間 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ への正射影を表す線形写像の表現行列 A をもとめよ。

（答え）W の正規直交基底は $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$ で、標準基底ベクトルの像を計算すればよい。$A = \begin{pmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 3/14 & 3/7 & 9/14 \end{pmatrix}$

問題 4
つぎの行列 $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ は直交行列であることを示せ。

問題 5
写像 $f_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ について

$$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

と定めるとき、$f_{\boldsymbol{a}}$ は線形変換であることを示せ。さらに直交変換であることを示せ。