

2 行列と連立 1 次方程式

2.1 行列とその演算

行列 (matrix) は大文字、 A, B, C などを持ち、その成分は小文字で、行 (row) と列 (column) が $m \times n$ 型で、第 i 行、第 j 列の成分 (要素) (component, element, また entry と同じ) を a_{ij} とすると、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad (\text{右辺の表記は略記できる場合})$$

ただしインデックス (i, j) はカンマで区切らないことが多いし、成分の区切り $(,)$ も入れず、丸

カッコのみならず、角カッコも用いるときもある。 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$ など。区切りを入

れても間違いではないが省略することが多い。計算の数式処理では区切りが必要。しかし、縦棒で

の形： $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$ は、行列式 (determinant) としてもちいる場合があるので注意。

定義 1

(行列の演算)

加法：大きさが同じ行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ として、対応する成分どおしの和で定義する。サイズが異なる場合には定義できない。

スカラー倍：スカラー k と行列 $A = (a_{ij})$ に対して $kA = (ka_{ij})$ で定義する。すべての成分を k 倍すること。

定義 2

行列の積： $A = (a_{ij})$ を $m \times k$ 型、 $B = (b_{ij})$ を $k \times n$ 型であれば、積が定義できて、 (i, j) 成分

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = ((a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \cdots \ a_{ik}), \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix})$$

この (i, j) 成分の値は、2 ベクトルの k 次元との内積に他ならない。すべての i 行と j 列にわたって計算する。 A と B の積 $C = (c_{ij}) = AB$ を定める。図的には $A_{(m \times k)} \times B_{(k \times n)} \rightarrow C_{(m \times n)}$

(行列の転置 (transpose))

行列 $A = (a_{ij})$ に対して、その転置行列は ${}^tA = (a_{ji})$

$${}^t \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{pmatrix}$$

と定める。右側肩ではない理由は、ベキ乗と区別するためで、 A^T (大文字の T) や A' (ダッシュ) をつかうときもある。

定義 3

特別な場合での行列の呼称：(1) $n \times n$ 型を正方行列 (square matrix) という。(2) 単位行列 (unit) : $E = (\delta_{ij})$ (クロネッカーのデルタ $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$, $= 0$ if $i \neq j$) (3) 対角行列 (diagonal) : $D = (d_i \delta_{ij})$ の形、対角成分以外はすべてゼロ。(4) 対称行列 (symmetric) : ${}^t A = A$ つまり $a_{ji} = a_{ij}, \forall (i, j)$ (5) 交代 (歪対称) 行列 (alternative, skew symmetric) : ${}^t A = -A$ つまり $a_{ji} = -a_{ij}, \forall (i, j)$

問題 1

加法 (+) の (1) 結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$, (2) 交換法則 $A + B = B + A$, (3) 分配法則 $k(A + B) = kA + kB$, また行列積の (4) 結合法則 $(AB)C = A(BC)$, (5) 分配法則 $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$ を確かめよ。

問題 2

つぎの行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

について、計算せよ。

$$\begin{array}{lll} (1) AC & (2) CA & (3) CB \\ (4) CD & (5) DA & (6) DB \end{array}$$

問題 3

つぎの行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

について

$$\begin{array}{ll} (1) (A + B)^2 & (2) A^2 + 2AB + B^2 \\ (3) A^2 - B^2 & (4) (A + B)(A - B) \end{array}$$

を計算し、実数で成り立つものが、行列では不成立の場合があることを確かめよ。

問題 4

任意の正方行列は A は、 $B = A + {}^t A$ とおくと、対称行列であり、また $C = A - {}^t A$ とおくと、交代行列となることを示せ。

||||| 行列計算を表計算ソフトで行う |||||

行列の計算は、和とスカラー倍、また行列と行列の積や逆行列、転置行列などは表計算ソフト（*1）のコマンドで計算できます。

数式配列：範囲を選択（アクティブ：黒い枠線で囲まれる）にする。演算を行うときには、「Ctrl + Shift + Enter」で入力、つまり Ctrl と Shift キーを同時に押しながら、Enter を入れる。

機能と目的	命令	備考
和	$= A + B$	A,B は行列で出力セルには大きさをアクティブ
スカラー倍	$= a * A$	A は行列、a はスカラー
積	$= \text{mmult}(A,B)$	A : $m \times k$, $k \times n$ の形 内積の計算をおこなう
逆行列 A^{-1}	$= \text{minverse}(A)$	A: 正方行列
転置行列 ${}^t A$	行列を選択し、編集 (E), コピー (C) 形式を選択して貼り付け (S) 行列を入れ 替える (E) (選択枠をチェックして Enter)	
行列式 $\det A $	$= \text{mdeterm}(A)$	A: 正方行列

行列の文字式入力：表計算ソフトでは文字の数式の計算（数式処理）はできない。もし文字式がある場合は、Maxima（*2）などをもちいる。

（*1）表計算ソフトには、マイクロソフトの excel や Apache の OpenOffice（フリーの日本語プロジェクト）のうち、calc でほぼ同様な表計算が可能。

（*2）Maxima は、Gnu Public License の元で配布されている数式処理システム。文字式を含む連立方程式や因数分解、式の展開、微分積分、関数グラフのプロットができるので有効に用いることで、数学の学習にはとても役に立つ。