

1 平面・空間のベクトル

1.1 ベクトルの内積

問題 1

座標平面上に 2 点 $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$ がある。それぞれを原点 O との結ぶベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ とするとき、

$$(1) \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2) \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (3) -\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (4) 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (5) \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b} \quad (6) \frac{\mathbf{a} + 4\mathbf{b}}{5}$$

を求め、平面上に図示せよ。

答

$$\begin{aligned} (1) \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (2, 3) + (-1, 4) = (1, 7) \quad (2) \mathbf{a} - \mathbf{b} = (2, 3) - (-1, 4) = (2, 3) + (1, -4) = (3, -1) \quad (3) \\ -\mathbf{a} + \mathbf{b} &= -(2, 3) + (-1, 4) = (-3, 1) \quad (4) 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = 2(2, 3) - (-1, 4) = (4, 6) + (1, -4) = (5, 2) \\ (5) \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b} &= \frac{1}{4}(2, 3) + \frac{3}{4}(-1, 4) = \left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{-3}{4}, \frac{12}{4}\right) = \left(\frac{-1}{4}, \frac{15}{4}\right) \quad (6) \frac{\mathbf{a} + 4\mathbf{b}}{5} = \\ \frac{1}{5}(2, 3) + \frac{4}{5}(-1, 4) &= \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{-4}{5}, \frac{16}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}, \frac{19}{5}\right) \end{aligned}$$

図示は略。

問題 2

$\mathbf{a} = (2, -3)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$ のとき、つぎの値を求めよ。

$$(1) |\mathbf{a}| \quad (2) |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \quad (3) |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

答

$$\begin{aligned} (1) |\mathbf{a}| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad (2) |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |(2, -3) - (-1, 2)| = |(3, -5)| = \\ \sqrt{3^2 + (-5)^2} &= \sqrt{34} \quad (3) |\mathbf{b} - \mathbf{a}| = |(-1, 2) - (2, -3)| = |(-3, 5)| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ プラ} \\ \text{スとマイナスと向きが反対であっても、ベクトルのノルムは同じ。} \end{aligned}$$

問題 3

原点 O とする座標平面上の 3 点 $A = (1, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (-3, 11)$ とするとき、つぎの値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) |\overrightarrow{OA}| \quad (2) |\overrightarrow{AB}| \quad (3) k|\overrightarrow{AC}| = 1 \text{ となる } k \\ (4) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ となる点 } D \text{ の座標} \quad (5) |\overrightarrow{BC}| \quad (6) |k\overrightarrow{AD}| = 1 \text{ となる } k \end{aligned}$$

答

$$\begin{aligned} (1) |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (2) |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad (3) k|\overrightarrow{AC}| = 1 \text{ となる } k, |\overrightarrow{AC}| = \\ \sqrt{(-4)^2 + 10^2} &= \sqrt{116} \text{ だから、} k = \frac{1}{\sqrt{116}} = \frac{\sqrt{116}}{116} \quad (4) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ となる点 } D \text{ の座標} \\ D = (x, y) \text{ とおく。} \overrightarrow{CD} &= (x, y) - (-3, 11) = (x + 3, y - 11). \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ より、成分同士の比} \\ \text{較から、連立方程式をつくる。} 1 &= x + 3, 3 = y - 11. \text{ よって } x = -2, y = 14 \text{ を得る。ゆえ} \\ \text{に } D = (-2, 14). \quad (5) \overrightarrow{BC} &= (-3, 11) - (2, 4) = (-5, 7) \text{ より、} |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{74} \\ (6) ||k\overrightarrow{AD}|| &= 1 \text{ となる } k. k\overrightarrow{AD} = k\{(-2, 14) - (1, 1)\} = k(-3, 13) = (-3k, 13k). \text{ よって} \\ |k\overrightarrow{AD}| &= \sqrt{(-3k)^2 + (13k)^2} = |k|\sqrt{9 + 169} = |k|\sqrt{178} \text{ となるから、} k = \pm \frac{\sqrt{178}}{178} \text{ (2 通り)}. 2 \\ \text{乗値の平方根は絶対値となり、ノルムとの整合性も保たれる。} \end{aligned}$$

問題 4

つぎの法則などが成り立つことを確認せよ。

- $$\begin{aligned} (1) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & (2) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ (3) \quad k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) & (4) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= |\mathbf{a}|^2 \\ (5) \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &\leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| & (6) \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \\ (7) \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2) \end{aligned}$$

答

$\mathbf{a} = (a, b, c), \mathbf{b} = (p, q, r), \mathbf{c} = (u, v, w)$ のときに確かめる。(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a, b, c) \cdot (p, q, r) = ap + bq + cr$. 一方 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (p, q, r) \cdot (a, b, c) = pa + qb + rc = ap + bq + cr = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a+p, b+q, c+r) \cdot (u, v, w) = (a+p)u + (b+q)v + (c+r)w = au + pu + bv + qv + cw + rw = au + bv + cw + pu + qv + rw = (a, b, c) \cdot (u, v, w) + (p, q, r) \cdot (u, v, w) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (3) $k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = k(ap + bq + cr) = kap + kbq + kcr = (ka)p + (kb)q + (kc)r = a(kp) + b(kq) + c(kr)$ と変形すると、同様に得られる。(4) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a^2 + b^2 + c^2 = |\mathbf{a}|^2$. (5) $(a^2 + b^2 + c^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (ap + bq + cr)^2 = b^2p^2 + c^2p^2 + a^2q^2 + c^2q^2 + a^2r^2 + b^2r^2 - 2apbq - 2bqcr - 2crap = \{a^2q^2 + b^2p^2 - 2apbq\} + \{b^2r^2 + c^2q^2 - 2bqcr\} + \{a^2r^2 + c^2p^2 - 2crap\} = (aq - bp)^2 + (br - cq)^2 + (cp - ar)^2$. 等号は $aq - bp = 0, br - cq = 0, cp - ar = 0$ であり、これを書き換えると $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ の場合である。(6) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$. (7) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$, したがって $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$.

問題 5

(1) 平行四辺形 ABCD で、 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ として、平面ベクトル $\mathbf{a} = (a, b), \mathbf{b} = (c, d)$ においてはベクトルのなす角 θ とするとき、平行四辺形の面積は

$$S = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = |ad - bc|$$

であり、これから、 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ が成り立つことを示せ。(シュワルツの不等式)

(2) 3次元ベクトルの場合では

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

また等号が成り立つときはどういう場合か。

答

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\mathbf{a}|^2 = a^2 + b^2, |\overrightarrow{AD}|^2 = |\mathbf{b}|^2 = c^2 + d^2$ であり、 $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (c, d) - (a, b) = (c - a, d - b)$, $|\overrightarrow{BD}|^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2 = c^2 + a^2 - 2ac + d^2 + b^2 - 2bd$. したがって $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$ となっている。内積の定義から $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$. この両辺を 2 乗すると $\cos^2 \theta = \frac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)}$ となるから、 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)} = \frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}{(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)} = \frac{(ad - bc)^2}{(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)}$. 以上により、三角形の面積は底辺 \times 高さ $\div 2$ であり、平行四辺形では 2 倍をすればよい。いま 2 乗した形では、 $S^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \frac{(ad - bc)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = (ad - bc)^2$. ゆえに $S = |ad - bc|$.

(2) $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_2b_2a_3b_3 - 2a_3b_3a_1b_1 = \{a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2\} + \{a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_2a_3b_3\} + \{a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_3a_1b_1\} = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2$. 等号は $a_1b_2 - a_2b_1 = 0, a_2b_3 - a_3b_2 = 0, a_3b_1 - a_1b_3 = 0$ であり、これを書き換えると $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

一般に n 個の場合にも同様の計算で行える。

「補足」余弦の定理とは、平面上での三角形 ABC がある。三辺の長さ a, b, c と a の対角を θ とするとき、 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$ の関係が成り立つ。この余弦の定理を変形した形 $\cos \theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ は同じ関係式を表している。 $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ は a を斜辺の長さとする直角三角形でピタゴラスの定理（鉤股弦の定理）である。

問題 6

空間内の 4 点 $O(0, 0, 0), A(2, -1, 1), B(1, -1, 0), C(3, 4, 5)$ が与えられている。つぎを求めよ。

- (1) ノルム: $|\vec{OA}|$ (2) 内積: $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$
 (3) 挟む角: \vec{OA} と \vec{OB} のなす角 (4) 面積: $\triangle ABC$ の面積 S

答

(1) $|\vec{OA}| = |(2, -1, 1)| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. (2) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (2, -1, 1) \cdot (1, -1, 0) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 3$ (3) $|\vec{OB}| = |(1, -1, 0)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$
 をもちいて \vec{OA} と \vec{OB} のなす角を θ とすると、 $\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{3}{(3\sqrt{2}\sqrt{2})} = \frac{1}{2}$. したがって $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. (4) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\sqrt{59}}{2}$ と計算できる。なぜなら、 $\vec{AB} = (1, -1, 0) - (2, -1, 1) = (-1, 0, -1)$, $\vec{AC} = (3, 4, 5) - (2, -1, 1) = (1, 5, 4)$. それぞれのノルムと内積は、 $|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{42}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 = -1 - 4 = -5$. θ を \vec{AB}, \vec{AC} の挟む角として、 $\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-5}{\sqrt{2}\sqrt{42}} = \frac{-5}{2\sqrt{21}}$.
 面積を求めるためには正弦 (\sin) を計算すると、 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{25}{4 \cdot 21}} = \frac{\sqrt{59}}{2\sqrt{21}}$.
 たがって面積 S は $S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{42} \times \frac{\sqrt{59}}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{59}}{2}$.