

1 平面・空間のベクトル

1.2 直線・平面の方程式

定義 1

(直線の方程式) 平面上 (2次元) xy 空間の直線の方程式は $y = ax + b$ で与えられ、 a を傾き、 b を y 切片という。より一般的に y 軸に平行な場合を含むように書くと

$$ax + by = c \quad \text{の形} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} \quad \text{の形}$$

となる。点 (p, q) を通り、傾きは $-\frac{b}{a}$ であるが、この傾きは、ベクトル (a, b) とは直角に交わる。すなわち直交している。もし空間内で考えると (xyz 空間での直線の方程式) 点 (p, q, r) を通り、方向ベクトル (傾き) を $\mathbf{d} = (a, b, c)$ とする直線は

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c}$$

で与えられる。

定義 2

xyz 空間内の点 $A(p, q, r)$ を通り、ベクトル $\mathbf{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面を表す方程式は

$$a(x-p) + b(y-q) + c(z-r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by + cz = d \quad \text{の形}$$

与えられた平面に垂直 (perpendicular) なベクトルを法線 (normal) ベクトルという。

定義 3

(パラメータ表示) 直線/平面の方程式はベクトルのスカラー倍の演算で直線/平面を表すことができる。

平面の場合：点 $A = \mathbf{a}$ を通り、方向ベクトル \mathbf{d} とする延長上にある点 P は $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{d}$ となるから、 $\mathbf{x} = (x, y)$ は

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{d} \quad (t \text{ は任意のスカラー定数})$$

となる。

空間の場合：平面の方向は2つの平行でないベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} で表され、点 $A = \mathbf{a}$ を通るとすれば、この平面上の点 P , すなわち $\mathbf{x} = (x, y, z)$ は

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (t \text{ は任意のスカラー定数})$$

なるパラメータの個数を2個もちいて表される。2つのベクトルが直角に交わるとき、直交 (orthogonal) という。

問題 1

つぎで定まる直線の方程式を求めよ。

- (1) 点 $A(1, -2, 3)$ を通り、方向ベクトルが $\mathbf{d} = (3, -2, 1)$ の直線。

- (2) 2 点 $A(1, -2, 3)$ 、 $B(1, 2, 0)$ を通る直線
 (3) 点 $A(3, 2, 2)$ を通り、直線 $x = \frac{y}{4} = z$ に平行な直線

問題 2

つぎの条件を満たす平面の方程式を求めよ。

- (1) 点 $A(-1, 5, 3)$ を通り、 $\mathbf{n} = (2, -5, 7)$ に垂直な平面。
 (2) 3 点 $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 0, -1)$ を通る平面。
 (3) 点 $A(2, -1, 1)$ を通り、 x 軸に垂直な平面。
 (4) 平面 $x + 2y + 3z = 1$ に平行で、点 $A(2, 1, 1)$ を通る平面。

問題 3

xyz 空間内に 2 点 $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 3, 5)$ がある。

- (1) 直線 AB の方程式を表せ。
 (2) この直線と垂直に交わるような平面の方程式の形を表せ。
 (3) 平面の方程式が点 $C(2, 3, 7)$ 含むよう移動した方程式を定めよ。
 (4) このときの平面と直線の交点を求めよ。

問題 4

2 つの平面の方程式 $x - y + 2z - 1 = 0$, $2x + y + z + 4 = 0$ についてつぎの問いに答えよ。

- (1) 平面が交わってできる直線、すなわち交線の方程式を求めよ。
 (2) 2 平面のなす角 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を求めよ。
 (3) 2 平面の交線を含み、点 $P(1, 1, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

問題 5

xy 平面では、点 $P(p, q)$ と直線 $ax + by + c = 0$ との距離は

$$\frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられ、xyz 空間の場合には点 $P(p, q, r)$ と直線 $ax + by + cz + d = 0$ との距離は

$$\frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを用い、つぎを求めよ。

- (1) xy 平面で直線 $ax + by + c = 0$ と原点との間の距離。
 (2) 点 $P(-3, 2, -2)$ と直線 $x - 2y + 2z = -4$ との距離。
 (3) 平行な 2 平面 $3x + 3y - 4z = 2$, $3x + 3y - 4z = 5$ の距離 (各平面の 2 点を結ぶときの最短距離)。