連立方程式の掃き出し計算：

変数 $\{x, y\}$ から x を消去

$$\left\{\begin{array}{lcll} ax & + & by = & s \\ cx & + & dy = & t \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lclcl} ax & + & by & = & s \\ & & (ad-bc)y & = & at-sc \end{array}\right.$$

ピボット法 ($a \neq 0$ をピボット)

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline x & y & \\ \hline \boxed{\mathrm{a}} & b & s \\ c & d & t \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline x & y & \\ \hline 1 & b/a & s/a \\ 0 & d-c*b/a & t-c*s/a \\ \hline \end{array}$$

例題 1： 未知変数 x, y, z の連立方程式を掃き出し計算で解く。a, b はある定数として、つぎを解け。

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ -y+2z=1 \\ 2x+3y+az=b \end{array}\right.$$

(I) $\begin{array}{|ccc|c|} \hline \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a & b \\ \hline \end{array}$ (II) $\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 & b-2 \\ \hline \end{array}$ (III) $\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{a-4} & b-3 \\ \hline \end{array}$ ここで $a-4=0$ であれば、係数行列の階数は $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$ である。もし、$b-3 \neq 0$ であれば、第 3 行の式は係数と定数を比べては $0x+0y+0z=0=b-3$ となるから、右辺の定数 $b-3$ の値がゼロでなければ、等号の矛盾であるから、解なし。$3=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($b-3 \neq 0$ より掃き出しが可能だから)。いま $a-4 \neq 0$ とすると、1 行目、2 行目の掃き出しから、$3-5 \cdot \frac{b-3}{a-4}=\frac{3a-5b+3}{a-4}$, $-1-(-2) \cdot \frac{b-3}{a-4}=\frac{-a+2b-2}{a-4}$ より、 (IV) $\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & \frac{3a-5b+3}{a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a+2b-2}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-3}{a-4} \\ \hline \end{array}$

したがって (i) $a=4$ のとき、解なし。(ii) $a \neq 4$ のとき、$x=\dfrac{3a-5b+3}{a-4}, y=\dfrac{-a+2b-2}{a-4}, z=\dfrac{b-3}{a-4}$ (終)

例題 2：未知変数 x, y, z の連立方程式で、解をもつ条件 a, b は何か。また解をもつとき、その解をもとめよ。

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ -x - 2y + (1-a)z = 0 \\ 2x + 4y + bz = 2 \end{cases}$$

掃き出し計算による連立方程式の解法で階段行列に変形する。

$$\text{(I)}\ \begin{array}{|ccc|c|} \hline \boxed{1} & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{(II)}\ \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & b-2a & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{(III)}\ \begin{array}{|ccc|l|} \hline 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b \\ \hline \end{array}$$

掃き出し計算はここで終り。解をもつ条件をチェックすると、係数行列と拡大係数行列の階数が等しくならなければばならないから、$2a - b = 0$ を得る。つまり、$b = 2a$ が求める関係式。

もし、$b = 2a$ の関係があれば、2 つの行列の階数はともに階数 2 で等しくなるから、解をもつ。その解を表すためには、任意定数を一つもちいる。つまり、方程式を変数をもちいて表すと、

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - a \\ z = 1 \end{cases}$$

となるから、z は定まっているが、x, y が不定形であるから、もし $y = c_1$ (任意定数) とすれば、$x = 1 - a - 2c_1$ となり、$x = 1 - a - 2c_1,\ y = c_1,\ z = 1$ となる。あるいは、もし $x = c_2$ (任意定数) とすれば、$y = \dfrac{1-a-c_2}{2}$ となり、$x = c_2,\ y = \dfrac{1-a-c_2}{2},\ z = 1$ となる。前者の場合には、任意定数でくくり出してから、ベクトルで表すと、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、後者の場合には $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-a}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。定数ベクトルの項は通る点を表し、任意定数をもつベクトル項は方向ベクトルを表す。この二つは任意定数 c_1, c_2 を適当に定めれば、同じベクトルである。（確かめてみよ）さらにいずれの場合にも任意定数の個数はひとつであるが、これは係数行列 $m \times n$ 型では、$m = 3, n = 3$ であり、解をもつ場合の係数行列と拡大係数行列の階数は

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & -2 & 1-a \\ 2 & 4 & b \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

となっている。（終）

連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (A : m \times n)$ の解は

(a) 一意解：　条件 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b}) = n$ （A は正方行列 $m = n$ で、変数、方程式の個数に等しい)、$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ (逆行列の存在) あるいはクラメルの公式の形。

(b) 解なし：　条件 $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b})$ （係数行列と拡大係数行列の階数が等しくない不等号)

(c) 不定解：　条件 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b}) < n$ （変数の個数より拡大係数行列の階数が小さい不等号、任意定数の個数 k は $k = n - \mathrm{rank}(A)$ である。)