

問題 1 : 連立方程式を掃き出し計算で解け。

$$(1) \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 7y + 5z = 24 \\ 2x + 4y + 2z = 14 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

(1) の【解】 各ステップの左側には操作を表すための行列を示し、掃き出し表の枠はピボットとしている。

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{2} & -3 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \text{(II)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -3/2 & 7/2 \\ \hline \boxed{3} & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \text{(III)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -3/2 & 7/2 \\ \hline 0 & \boxed{17/2} & -17/2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(IV)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -3/2 & 7/2 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \\ \text{(V)} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

最終掃き出しから、 $x = 2, y = -1$ が 一意解 であり、左側の行列の積をもとめると逆行列となっていることが確かめられる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

「注」この逆行列をつかって、問題 $Ax = b$ の答えが $x = A^{-1}b$ として得られる。

(2) の【解】

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \boxed{3} & 7 & 5 & 24 \\ \hline 2 & 4 & 2 & 14 \\ \hline \end{array} \\ \text{(II)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 7/3 & 5/3 & 8 \\ \hline \boxed{2} & 4 & 2 & 14 \\ \hline \end{array} \\ \text{(III)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 7/3 & 5/3 & 8 \\ \hline 0 & \boxed{-2/3} & -4/3 & -2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(IV)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -7/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 7/3 & 5/3 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \text{(V)} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

これは 不定形の解 で任意定数もちいて、一般解は、 $x = 1 + 3t, y = 3 - 2t, z = t$ を特殊解 ($t = 0$ であれば、 $x = 1, y = 3, z = 0$ であり、もし $t = 2$ として、 $x = 7, y = -1, z = 2$ としたのも特殊解で、パラメータをもちいる $x = 3t, y = -2t, z = t$ の一般解の和で表現される) と一般解で表現する。

(3) の【解】

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \boxed{-1} & 1 & -1 & 2 \\ \hline 2 & -1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \text{(II)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 & -2 \\ \hline \boxed{2} & -1 & 3 & 4 \\ \hline \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \text{(III)} \quad \begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \underline{-1} & 1 & -2 \\ \hline 0 & \boxed{1} & 1 & 8 \\ \hline 0 & \underline{1} & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(IV)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} \\ \hline \end{array} \\ \text{(V)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \underline{-6} \\ 0 & 1 & \underline{-8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & \underline{6} \\ \hline 0 & 1 & 1 & \underline{8} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \text{(VI)} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

既に step (IV) までで、解なしはわかるが、階段行列と最後までおこなう。これは 解なし (解は存在しない)。
係数行列と拡大係数行列の階数が一致していない。

問題2：連立方程式を掃き出し計算で解け。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4v = 2 \\ -x + 2y - 4z + u = 2 \\ 2x + y + 3z - 2u - 10v = -4 \\ -2x + y - 5z + u + 3v = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 4z + 2u + 9v = 0 \\ x + y + z + 2u + 3v = 3 \\ -2x + y - 5z + 2u + 6v = 4 \\ 2x + y + 3z - u - 7v = -4 \end{cases}$$

(1) の【解】

$$(I) \begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -4 \\ -2 & 1 & -5 & 1 & 3 & 3 \end{array} \quad (II) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 11 & 7 \end{array} \quad (III) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{array}$$

(IV) $\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

係数行列と拡大係数行列の階数は等しいから、解あり。未知数は5個

で、階数は3となっている。したがって $5 - 3 = 2$ 個の任意定数 (パラメータ) をもちいて、(この場合では2個のパラメータを k_1, k_2 とおいた) 方程式の一般解を表すことができる。たとえば、 $z = k_1, v = k_2$ とおけば、 $x = -1 - 2k_1 + k_2, y = k_1 + 2k_2, u = 1 - 3k_2$ となり、ベクトル表示では

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) の【解】

$$(I) \begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -7 & -4 \end{array} \quad (II) \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & 24 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -25 & -4 \end{array} \quad (III) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 & -9 \end{array}$$

(IV) $\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19/6 \end{array}$

係数行列と拡大係数行列の階数は一致していないから、解なし。

表計算ソフトでの注意

- セルの設定 (表示形式) を「標準」から「数値」に替えておき、「負の数の表示形式」は「-1234」に替える。さらに「小数点以下の桁数」は、2から3、4程度に増やす。これは分数のばあいには、自動的に四捨五入されてしまい、確認ができない。
- 行列の計算では、「配列数式」を使用して入力する。これには、CTRL + Shift を押しなが、Enter をキー入力する。ウィザードの画面でも単に「OK」をクリックしないで、CTRL + Shift を押しなが、「OK」をクリックする。