

未知変数 $x, y, z, u, v, \dots$ の連立方程式を掃き出し計算で解く。

問題 1 : (1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x + 7y + 5z = 24 \\ 2x + 4y + 2z = 14 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

(1) の【解】

(I) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2	-3	7
3	4	2

 (IV) $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1	-3/2	7/2
0	1	-1

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

1	-3/2	7/2
3	4	2

 (V)

1	0	2
0	1	-1

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix}$

1	-3/2	7/2
0	17/2	-17/2

最終掃き出しから、 $x = 2, y = -1$ が一意解であり、左側の行列の積をもとめると逆行列となっていることが確かめられる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

「注」この逆行列をつかって、問題 $Ax = b$ の答えが $x = A^{-1}b$ として得られる。

(2) の【解】

(I) $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3	7	5	24
2	4	2	14

 (IV) $\begin{pmatrix} 1 & -7/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1	7/3	5/3	8
0	1	2	3

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1	7/3	5/3	8
2	4	2	14

 (V)

1	0	-3	1
0	1	2	3

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$

1	7/3	5/3	8
0	-2/3	-4/3	-2

これは 不定形 で任意定数もちいて、一般解を表現する。

(3) $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

(I) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

-1	1	-1	2
2	-1	3	4
1	0	2	1

 (IV) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$

1	0	2	6
0	1	1	8
0	0	0	-5

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1	-1	1	-2
2	-1	3	4
1	0	2	1

 (V) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1	0	2	6
0	1	1	8
0	0	0	1

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1	-1	1	-2
0	1	1	8
0	1	1	3

 (VI)

1	0	2	0
0	1	1	0
0	0	0	1

既に step (IV) までで、解なしはわかるが、階段行列と最後までおこなう。これは 解なし。係数行列と拡大係

数行列の階数が一致していない。

問題 2 :

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3u + 4v = 2 \\ -x + 2y - 4z + u = 2 \\ 2x + y + 3z - 2u - 10v = -4 \\ -2x + y - 5z + u + 3v = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 4z + 2u + 9v = 0 \\ x + y + z + 2u + 3v = 3 \\ -2x + y - 5z + 2u + 6v = 4 \\ 2x + y + 3z - u - 7v = -4 \end{cases}$$

(解)

(1)

$$(I) \begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -4 \\ -2 & 1 & -5 & 1 & 3 & 3 \end{array} \quad (II) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & 11 & 7 \end{array} \quad (III) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{array}$$

$$(IV) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

係数行列と拡大係数行列の階数は等しいから、解あり。未知数は 5 個

で、階数は 3 となっている。したがって $5 - 3 = 2$ 個の任意定数をもちいて方程式の解を表すことができる。たとえば、 $z = k_1, v = k_2$ とおけば、 $x = -1 - 2k_1 + k_2, y = k_1 + 2k_2, u = 1 - 3k_2$ となり、ベクトル表示では

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$(I) \begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -7 & -4 \end{array} \quad (II) \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & 24 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -25 & -4 \end{array} \quad (III) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 & -9 \end{array}$$

$$(IV) \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19/6 \end{array}$$

係数行列と拡大係数行列の階数は一致していないから、解なし。

表計算ソフトでの注意

1. セルの設定 (表示形式) を「標準」から「数値」に替えておき、「負の数の表示形式」は「-1234」に替える。さらに「小数点以下の桁数」は、2 から 3、4 程度に増やす。これは分数のばあいには、自動的に四捨五入されてしまい、確認ができない。

2. 行列の計算では、「配列数式」を使用して入力する。これには、CTRL + Shift を押しなが、Enter をキー入力する。ウィザードの画面でも単に「OK」をクリックしない。