

連立方程式の練習問題:(解)

未知変数 x, y, z, u, v, \dots の連立方程式を掃き出し計算で解く。

問題 1 : (1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x + 7y + 5z = 24 \\ 2x + 4y + 2z = 14 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

問題 1 の「解」

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

(I) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix}$

2	-3	7
3	4	2

1	-3/2	7/2
3	4	2

1	-3/2	7/2
0	17/2	-17/2

(IV) $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1	-3/2	7/2
0	1	-1

(V)

1	0	2
0	1	-1

これが一意解であり、左側の行列の積が逆行列となっている。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

(2) $\begin{cases} 3x + 7y + 5z = 24 \\ 2x + 4y + 2z = 14 \end{cases}$

(I) $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$

3	7	5	24
2	4	2	14

1	7/3	5/3	8
2	4	2	14

1	7/3	5/3	8
0	-2/3	-4/3	-2

(IV) $\begin{pmatrix} 1 & -7/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1	7/3	5/3	8
0	1	2	3

(V)

1	0	-3	1
0	1	2	3

これは不定形で任意定数を持ちて、一般解を表現する。

(3) $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

(I) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

-1	1	-1	2
2	-1	3	4
1	0	2	1

1	-1	1	-2
2	-1	3	4
1	0	2	1

1	-1	1	-2
0	1	1	8
0	1	1	3

(IV) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$

1	0	2	6
0	1	1	8
0	0	0	-5

(V) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1	0	2	6
0	1	1	8
0	0	0	1

(VI)

1	0	2	0
0	1	1	0
0	0	0	1

既に step (IV) までで、解なしはわかるが、階段行列と最後までおこなう。これは解なし。係数行列と拡大係数行列の階数が一致していない。

問題 2 :

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3u + 4v = 2 \\ -x + 2y - 4z + u = 2 \\ 2x + y + 3z - 2u - 10v = -4 \\ -2x + y - 5z + u + 3v = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + 4z + 2u + 9v = 0 \\ x + y + z + 2u + 3v = 3 \\ -2x + y - 5z + 2u + 6v = 4 \\ 2x + y + 3z - u - 7v = -4 \end{cases}$$

(解)

(1)

(I)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-10</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td></tr> </table>	1	2	0	3	4	2	-1	2	-4	1	0	2	2	1	3	-2	-10	-4	-2	1	-5	1	3	3	(II)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-8</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-18</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-8</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">11</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td></tr> </table>	1	2	0	3	4	2	0	4	-4	4	4	4	0	-3	3	-8	-18	-8	0	5	-5	7	11	7	(III)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-15</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td></tr> </table>	1	0	2	1	2	0	0	1	-1	1	1	1	0	0	0	-5	-15	-5	0	0	0	2	6	2
1	2	0	3	4	2																																																																								
-1	2	-4	1	0	2																																																																								
2	1	3	-2	-10	-4																																																																								
-2	1	-5	1	3	3																																																																								
1	2	0	3	4	2																																																																								
0	4	-4	4	4	4																																																																								
0	-3	3	-8	-18	-8																																																																								
0	5	-5	7	11	7																																																																								
1	0	2	1	2	0																																																																								
0	1	-1	1	1	1																																																																								
0	0	0	-5	-15	-5																																																																								
0	0	0	2	6	2																																																																								

(IV)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table>	1	0	2	0	-1	-1	0	1	-1	0	-2	0	0	0	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0	係数行列と拡大係数行列の階数は等しいから、解あり。未知数は 6 個
1	0	2	0	-1	-1																					
0	1	-1	0	-2	0																					
0	0	0	1	3	1																					
0	0	0	0	0	0																					

で、階数は 4 となっている。したがって $6 - 4 = 2$ 個の任意定数を持ちて方程式の解を表すことができる。たとえば、 $z = k_1, v = k_2$ とおけば、 $x = -1 - 2k_1 + k_2, y = k_1 + 2k_2, u = 1 - 3k_2$ となり、ベクトル表示では

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

(I)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-4</td></tr> </table>	1	-2	4	2	9	0	1	1	1	2	3	3	-2	1	-5	2	6	4	2	1	3	-1	-7	-4	(II)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">24</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-25</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-4</td></tr> </table>	1	-2	4	2	9	0	0	3	-3	0	-6	3	0	-3	3	6	24	4	0	5	-5	-5	-25	-4	(III)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">18</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-15</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-9</td></tr> </table>	1	0	2	2	5	2	0	1	-1	0	-2	1	0	0	0	6	18	7	0	0	0	-5	-15	-9
1	-2	4	2	9	0																																																																								
1	1	1	2	3	3																																																																								
-2	1	-5	2	6	4																																																																								
2	1	3	-1	-7	-4																																																																								
1	-2	4	2	9	0																																																																								
0	3	-3	0	-6	3																																																																								
0	-3	3	6	24	4																																																																								
0	5	-5	-5	-25	-4																																																																								
1	0	2	2	5	2																																																																								
0	1	-1	0	-2	1																																																																								
0	0	0	6	18	7																																																																								
0	0	0	-5	-15	-9																																																																								

(IV)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1/3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7/6</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">19/6</td></tr> </table>	1	0	2	0	-1	-1/3	0	1	-1	0	-2	1	0	0	0	1	3	7/6	0	0	0	0	0	19/6	係数行列と拡大係数行列の階数は一致していないから、解なし。
1	0	2	0	-1	-1/3																					
0	1	-1	0	-2	1																					
0	0	0	1	3	7/6																					
0	0	0	0	0	19/6																					

表計算ソフトでの注意

1. セルの設定 (表示形式) を「標準」から「数値」に替えておき、「負の数の表示形式」は”-1234”に替える。さらに「小数点以下の桁数」は、2 から 3、4 程度に増やす。これは分数のばあいには、自動的に四捨五入されてしまい、確認ができない。

2. 行列の計算では、「配列数式」を使用して入力する。これには、CTRL + Shift を押しなが、Enter をキー入力する。ウィザードの画面でも単に「OK」をクリックしない。