# ３次元での内積と外積:



3 次元ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)^t$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)^t$, $t$ は転置、

**ノルム:** $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ とする。

**内積の定義**：記号はドット $(\cdot)$ をもちい、成分同士の積を加える。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

**外積の定義**：記号は掛け算 $(\times)$ をもちいて 2 次の行列式の 3 個からなるベクトルで定める。

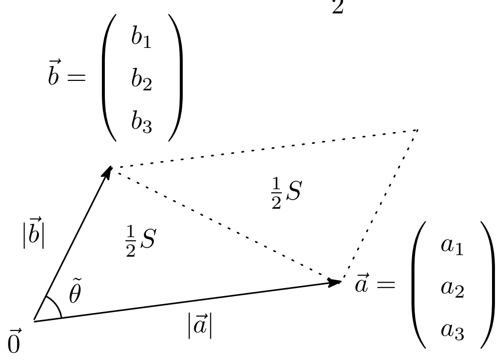
$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix},\,(-1)\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix},\,\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\right)^t\\ &= (a_2b_3-b_2a_3,\,(-1)(a_1b_3-b_1a_3),\,a_1b_2-b_1a_2)^t\end{aligned}$$

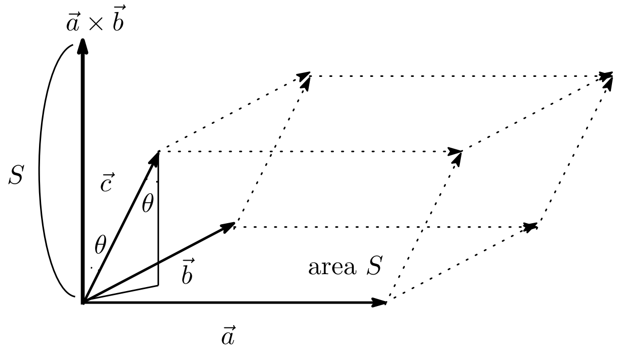
,

**外積と内積、ノルムの関係式**：

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

3 次元の内積（三角形の面積 $\frac{1}{2}S$、平行四辺形の面積 $S$）と 3 個のベクトル (外積 $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}$ の平行六面体)：




**ノルム、内積と外積からの体積計算**：

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=|\vec{a}\times\vec{b}|\quad(\text{外積のノルム、平行四辺形の面積})$$

外積について（平行六面体の体積、４面体の体積）：

$$\begin{aligned}\text{平行六面体}\qquad V &= \left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\right|=\left|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\right|\\ &= \left|\det\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\right|\qquad(\text{行列式の絶対値、体積は非負})\\ &= |a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1|\quad(\text{展開した式})\end{aligned}$$

３つのベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ のつくる**４面体** (テトラ) の体積：

$$\tilde{V}=\frac{1}{6}V\quad(\text{平行六面体の半分 }\frac{1}{2}\text{=三角柱で、その }\frac{1}{3}\text{ が体積})$$