

### 3次元での内積と外積:

naiseki.tex

3次元ベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$ ,  $t$  は転置、

ノルム:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$  とする。

内積の定義: 記号はドット ( $\cdot$ ) をもちい、成分同士の積を加える。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

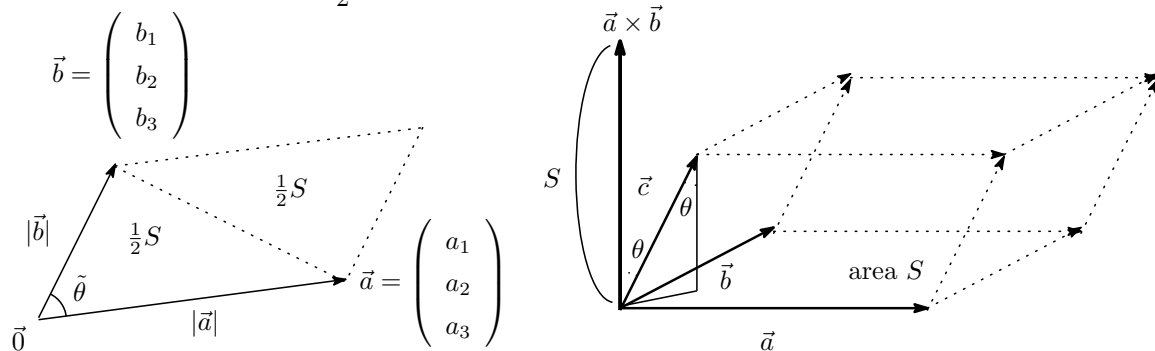
外積の定義: 記号は掛け算 ( $\times$ ) をもちいて2次の行列式の3個からなるベクトルで定める。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^t \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3, (-1)(a_1 b_3 - b_1 a_3), a_1 b_2 - b_1 a_2)^t \end{aligned}$$

外積と内積、ノルムの関係式:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

3次元の内積 (三角形の面積  $\frac{1}{2}S$ 、平行四辺形の面積  $S$ ) と3個のベクトル (外積  $\vec{a} \times \vec{b}$ ,  $\vec{c}$  の平行六面体):



ノルム、内積と外積からの体積計算:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad (\text{外積のノルム、平行四辺形の面積})$$

外積について (平行六面体の体積、4面体の体積):

$$\text{平行六面体} \quad V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$$

$$= \left| \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right| \quad (\text{行列式の絶対値、体積は非負})$$

$$= |a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1| \quad (\text{展開した式})$$

3つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  のつくる4面体 (テトラ) の体積:

$$\tilde{V} = \frac{1}{6} V \quad (\text{平行六面体の半分 } \frac{1}{2} = \text{三角柱で、その } \frac{1}{3} \text{ が体積})$$