工学を志す人の **微分積分**

阿部吉弘・伊藤　博・酒井政美
長　宗雄・永野與彦・堀口正之
矢島幸信・山崎丈明

東京教学社

序

微分積分学というものを標語的に説明しようとすれば,「極限概念に基づく数学」というようないい方ができるだろう．例えば，— 多くの読者にとってはすでに，高等学校で学んだように — 放物線 $y = 1 - x^2$ と x 軸 とで囲まれた部分の面積は，その図形を小長方形で限りなく近似していくことにより，それらの極限値として求めることができる．このような，事柄はすでに，ヘレニズム時代のギリシャにおいて，もっと複雑な図形（平面図形の面積ばかりではなく，立体の体積も含めて）に対しても，指導的数学 (哲学) 者には知られていた．その中で最も高名なのは，シラクサのアルキメデス (BC 287? – 212) であろう．しかし，その彼にしても，極限概念を定式化すること —単純にいえば $\lim_{x \to a} f(x)$ を明示的に議論すること— はなかったという（ボイヤー，数学の歴史 2, 1 章, 8)．したがって，この時代には，現在の微分法に相当する考えは全くなかったと見てよい．

微分のような発想にいたるには，数学の対象として静止したものだけでなく，動くもの (運動) を対象として捕らえることが必要であった．このような発想はガリレイ (1564 – 1642) の力学の研究などを通して，徐々に数学を扱う人々の間に浸透していった．

そして，デカルト (1596 – 1650) やフェルマ (1601 – 1665) などの具体的な関数についての研究の蓄積を踏まえて，ニュートン (1642 – 1727) とライプニッツ (1646 – 1716) の微分積分学の基本定理を含む微分積分の「発見」へとつながるのである．この本で取り扱う内容のほとんどは，この頃，すなわち遅くとも 18 世紀の中頃，までには知られていた事柄である．

しかし，本書での取り扱い方は，上に述べたような歴史的発展の順ではない．微分積分学が理工系の高等教育にとり入れられたのは，いつ頃のことかはそう定かではないのだが，それ以来の教育上の歴史に由来している．さらに，近年の高等学校での数学の学習状況をも配慮して編集した．

現代の科学技術を支える多くの数学の基礎である微分積分学を学ぶ一助として，この本が読者の役に立てば幸いである．

２０００年9月

著　者

目 次

第0章

初等関数

まず, 微分積分学を通して頻繁に現れる関数とそのグラフについて, まとめて記しておく.

1　三角関数

原点を端点とする2つの半直線 OP と OQ のなす角の大きさは, 原点を中心とする半径1の円からこれらの半直線が切り取る円弧の長さ θ に比例する. そこで, このとき

$$\angle POQ = \theta \text{ rad}$$

とすることにより角の大きさを測ることができる. rad は角度の単位であり「**ラジアン**」と読む. 円周の長さは 2π であるので,

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

となり, よって

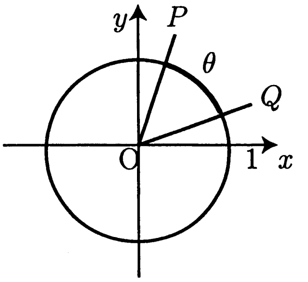


図 1.1

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.0174\cdots \text{ rad},$$
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = (57.29\cdots)^\circ$$

である. また一般に,

$$x^\circ = \frac{\pi}{180} x \text{ rad}, \qquad \theta \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\theta\right)^\circ$$

となる. ラジアンを用いて角の大きさを測る方法を弧度法といい, 微分積分学ではこれを用いるのが便利である. 本書では弧度法を採用し, 以下単位 rad を一々記さない. 例えば $\sin\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ と書くべき所を $\sin\frac{\pi}{3}$ と書く.

例 1.1. 半径 r, 中心角 θ の扇形の弧長を l, 面積を S とする. このとき,

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{S}{\pi r^2}$$

であるから,

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

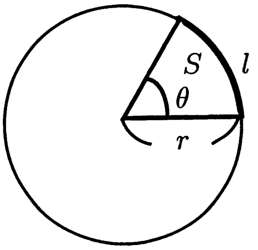


図 1.2

平面上に原点を中心とする半径 1 の円と点 $A(1,0)$ を考える. 点 A を出発して, この円の周上を時計回りと逆の向きに角度 θ だけ進んだ点を $P(x,y)$ とする. このとき,

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定義する. 三平方の定理から $x^2 + y^2 = 1$ であり,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

が成り立つ. ここで $\sin^2\theta$ は $(\sin\theta)^2$ を表している.

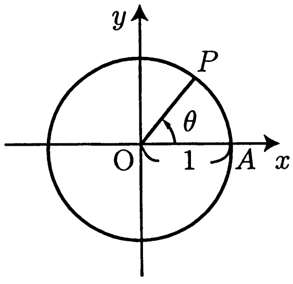


図 1.3

θ が 2π の整数倍増えても点 P の座標は変わらないから,

$$\begin{aligned}\sin(\theta + 2\pi n) &= \sin\theta,\\ \cos(\theta + 2\pi n) &= \cos\theta\end{aligned} \qquad (n \text{ は整数})$$

となる. また $\tan\theta$ については,

$$\tan(\theta + \pi n) = \tan\theta$$

が成り立つ.

例 1.2. 右図において, 点 $P(x,y)$ の $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた点 P' の座標は $(-y, x)$ だから,

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= x = \cos\theta,\\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -y = -\sin\theta,\\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{x}{-y} = \frac{-1}{\tan\theta}.\end{aligned}$$

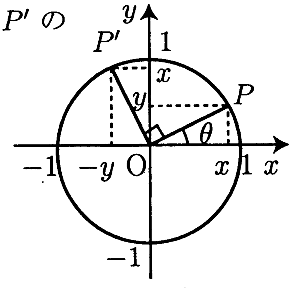


図 1.4

定理 1.1 (加法定理)．

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

証明　第２式を認めれば,

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= -\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta
\end{aligned}
$$

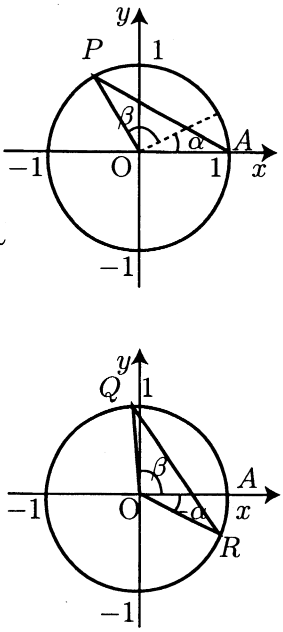


図 1.5

となって第１式が得られる. そこで, 第２式を証明しよう. 右図で点 $A(1,0)$ を角 $(\alpha+\beta)$, β, $-\alpha$ だけ回転させた点がそれぞれ P, Q, R である. まず $P(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$ ゆえ,

$$
\begin{aligned}
AP^2 &= \{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)\\
&= 2-2\cos(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

一方で,

$$
Q(\cos\beta,\sin\beta),\qquad R(\cos\alpha,-\sin\alpha)
$$

ゆえ,

$$
\begin{aligned}
QR^2 &= (\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2\\
&= 2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}
$$

$AP=QR$ であるから第２式が成り立つ.

例 **1.3.**

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\\
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$\tan(\alpha+\beta)$ については,

$$
\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}
$$

が成り立つ. また, 加法定理において特に $\alpha=\beta$ とおけば,

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha,\\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,\\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

を得る.

問 1.1. $\sin\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{8}, \tan\frac{\pi}{8}$ を求めよ.

例 1.4. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

証明 一般に加法定理により,

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

であることに注意する. いま $\alpha = \frac{\pi}{5}$ とすると,

$$\cos 2\alpha = \cos(\pi - 3\alpha) = -\cos 3\alpha$$

であるから, $X = \cos\alpha$ とおくとき,

$$\begin{aligned}&2X^2 - 1 = -(4X^3 - 3X),\\ &4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = 0,\\ &(X+1)(4X^2 - 2X - 1) = 0.\end{aligned}$$

$0 < X < 1$ であるので, これから $X = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ を得る.

問 1.2. $\sin\alpha, \cos\alpha$ について次の表の値を確認せよ (ヒント: $\frac{\pi}{24} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}$).

α	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

α	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{4}$	1
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4}$	0

三角関数のグラフについては第 4 節で考える.

2　べき・対数

実数 a, r $(a > 0)$ について，以下のようにしてべき a^r を定義する．実数 a を n 個かけたものを a^n と記す．次の指数法則が成り立つ $(m, n$ は自然数$)$.

I. $a^{m+n} = a^m a^n$

II. $a^{mn} = (a^m)^n$

III. $(ab)^n = a^n b^n$

まず，

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \text{ は自然数})$$

と定めることによって，a^n の定義を n が整数であるときにまで拡張する．$\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$ であることにより，指数法則がそのまま成り立つことが確かめられる．例えば，

$$a^{-2+5} = a^3, \quad a^{-2}a^5 = \frac{1}{a^2} \cdot a^5 = a^3,$$
$$a^{(-3)4} = a^{-12}, \quad (a^{-3})^4 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^4 = \frac{1}{(a^3)^4} = \frac{1}{a^{12}} = a^{-12},$$
$$(ab)^{-3} = \frac{1}{(ab)^3} = \frac{1}{a^3b^3}, \quad a^{-3}b^{-3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{a^3b^3}.$$

$a > 0$ とする．a の有理数べき a^r について考える．自然数 p に対して $x^p = a$ となる正の数 x を $\sqrt[p]{a}$ で表し，

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

とする．そして，有理数 r を $r = \dfrac{q}{p}$ $(p, q$ は整数，$p > 0)$ と書いて

$$a^r = a^{\frac{q}{p}} = (a^{\frac{1}{p}})^q = (\sqrt[p]{a})^q$$

と定義する．

$$a^r = \sqrt[p]{a^q} = (a^q)^{\frac{1}{p}}$$

ともなることが確かめられる．例えば，

$$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8,$$
$$27^{-\frac{2}{3}} = 27^{\frac{-2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

$\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}$ であることを用いて，指数法則がやはりそのまま成り立つことが示される．例えば，

$$3^{\frac{1}{3}+1} = 3^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{3})^4, \quad 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^1 = \sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt[3]{3})^3 = (\sqrt[3]{3})^4,$$
$$2^{\frac{4}{5} \cdot 3} = 2^{\frac{12}{5}} = (\sqrt[5]{2})^{12}, \quad (2^{\frac{4}{5}})^3 = \{(\sqrt[5]{2})^4\}^3 = (\sqrt[5]{2})^{12},$$
$$(2 \cdot 3)^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{2 \cdot 3})^5 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^5 = (\sqrt{2})^5(\sqrt{3})^5 = 2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{2}}.$$

r が無理数のときを考える．r を１０進小数に展開して小数点以下 n 桁目までとった有限小数を r_n とする．r_n は有理数だから a^{r_n} はすでに定義されている．n を大きくすると a^{r_n} は一定の値に近づくことが示される．そこで，この一定の値を a^r と定める．例えば，$\pi = 3.14159\cdots$ に対して

$$3^3 = 27, \quad 3^{3.1} = 30.13\cdots, \quad 3^{3.14} = 31.48\cdots,$$
$$3^{3.141} = 31.52, \quad 3^{3.1415} = 31.541\cdots, \quad 3^{3.14159} = 31.5441\cdots$$

が次第に近づく値 $31.54428\cdots$ を 3^π の値と定めるのである．

定理 2.1 (指数法則)． 正数 a, b と実数 r, s について次が成り立つ．

I. $a^{r+s} = a^r a^s$

II. $a^{rs} = (a^r)^s$

III. $(ab)^r = a^r b^r$.

次節におけるグラフの考察からも見て取れるように，べき a^r には次の性質がある．
$a > 1$ なら

$$r < s \iff a^r < a^s,$$

また $0 < a < 1$ なら

$$r < s \iff a^r > a^s.$$

問 2.1. r, s が有理数であるときに，上の性質を証明せよ．

問 2.2. 次の数はいくつか．
(1) $27^{-\frac{1}{3}}$　(2) $32^{\frac{1}{5}}$　(3) $8^{-\frac{4}{3}}$　(4) $64^{-\frac{2}{3}}$

問 2.3. 次の数を小さい順に並べよ．
(1) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{4}$　(2) 5^{-1}, 5^0, $5^{\frac{1}{3}}$ $5^{\frac{-2}{3}}$, $5^{\frac{1}{2}}$　(3) $\sqrt{0.5}$, $\sqrt[4]{0.125}$, $\sqrt[3]{0.25}$

次に対数について考える．$a > 0, a \neq 1$ とする．上述の a^r の性質により，正数 M に対して $a^m = M$ となる実数 m が唯ひとつ存在する．これを $m = \log_a M$ とかく．つまり，

$$m = \log_a M \iff a^m = M$$

である．$a^0 = 1, a^1 = a$ であるから特に，

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1.$$

定理 2.2. 正数 M, N と実数 r について次が成り立つ.

I. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

I'. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

II. $\log_a(M^r) = r \log_a M$

証明 I. $m = \log_a M$, $n = \log_a N$ とおくと,

$$a^m = M, \qquad a^n = N.$$

指数法則により,

$$MN = a^m a^n = a^{m+n}.$$

よって,

$$\log_a(MN) = m + n = \log_a M + \log_a N.$$

I' も同様にして示せる.

II. $m = \log_a M$ とすると, $a^m = M$. 指数法則から

$$M^r = (a^m)^r = a^{mr}.$$

ゆえに,

$$\log_a(M^r) = mr = r \log_a M.$$

例 2.1 (底の変換公式) . $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ で $M > 0$ のとき,

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

証明 $m = \log_a M$ とおくと $a^m = M$. この等式の両辺の b を底とする対数をとると, 定理 2.2 の II により,

$$m \log_b a = \log_b M.$$

よって,

$$\log_a M = m = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

問 2.4. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$ を計算しなさい.

例 2.2. $a > 1$ のとき,

$$M < N \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a M < \log_a N.$$

$0 < a < 1$ のとき,

$$M < N \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a M > \log_a N.$$

証明 $a > 1$ のときのみを考える. $m = \log_a M$, $n = \log_a N$ とすると

$$a^m = M, \qquad a^n = N.$$

よって,

$$M < N \iff m < n \iff \log_a M < \log_a N.$$

ここで, ニュートン法と呼ばれる方法を用いたべき根 $\sqrt[p]{a}$ の近似計算について, 具体例で説明しておこう.

例 2.3. $\sqrt{2}$ の近似値を求めてみる. $x_0 > \sqrt{2}$ なる x_0 をひとつとる (例えば $x_0 = 2$ でよい). そして, 漸化式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

によって, $x_1, x_2, \cdots$ を定める[1]. 相加相乗平均の定理より,

$$\begin{aligned} x_1 &> \sqrt{x_0 \cdot \frac{2}{x_0}} = \sqrt{2}, \\ &\cdots \\ x_n &> \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

であり, さらに

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right) > 0$$

である. よって,

$$\sqrt{2} < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0$$

となっている.

近似値 x_n の誤差 $x_n - \sqrt{2}$ については,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_n) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{2})^2 \\ &< \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2 \\ &< (x_n - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

[1]放物線 $y = x^2 - 2$ の点 $(x_n, x_n^2 - 2)$ での接線の x 切片が x_{n+1} である.

が成り立つ. ゆえに,

$$x_n - \sqrt{2} < (x_{n-1} - \sqrt{2})^2 < (x_{n-2} - \sqrt{2})^4 < \cdots < (x_0 - \sqrt{2})^{2^n}$$

となり, $x_0 - \sqrt{2} < 1$ なら

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$$

となることが見られる.

例えば $x_0 = 2$ とすると,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} = 1.5, \\ x_2 &= \frac{17}{12} = 1.416\cdots, \\ x_3 &= \frac{577}{408} = 1.4142156\cdots, \\ x_4 &= \frac{665857}{470832} = 1.4142135623746\cdots \end{aligned}$$

であり, 近似値 x_3 の誤差は,

$$x_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_2 - \sqrt{2})^2 < \frac{5}{2 \times 7}\left(\frac{17}{12} - \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{1}{10080} < 10^{-4}$$

と評価される. ここで $\sqrt{2} > \dfrac{7}{5}$ を用いた.

問 2.5. 上にならって $\sqrt{3}$ の近似値の求め方を考え, 誤差 10^{-5} 以内で $\sqrt{3}$ を求めてみよ.

3 指数・対数関数のグラフ

一般に, 関数 $y = f(x)$ のグラフとは, 平面上の点 $(x, f(x))$ の集まりのことである. ここでは, $f(x)$ が指数関数および対数関数であるときに, 関数のグラフがどのような形になるのかを見ておくことにする. まず指数関数について考える, 指数関数とは, $y = a^x$ の形の関数のことである. ただし, $a > 0$ とする.

例 3.1. $y = 2^x$ のとき, いろいろな x に対応する y の値を調べると次のような表ができる.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	$\cdots$

したがって, $\left(-3, \dfrac{1}{8}\right)$, $\left(-2, \dfrac{1}{4}\right)$, $\cdots$ などが $y = 2^x$ のグラフ上の点となり, グラフは図 3.1 のようになる.

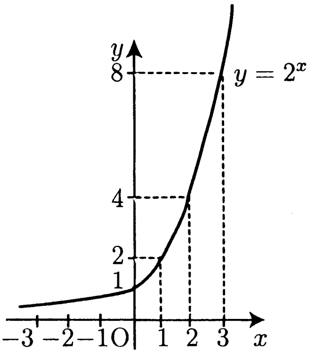


図 3.1

我々の今の段階では，関数のグラフを書くには，上の例のようにできるだけ多くのグラフ上の点を考えてそれらをなめらかな曲線で結ぶという実験的な方法しかない．後にグラフを描くのに有効ないくらかの知識を得ることになろう．

$a > 1$ のときには，$y = a^x$ のグラフは上の例のグラフと同様に，y 切片が 1 で x 軸を漸近線とする右上がりの曲線となる．

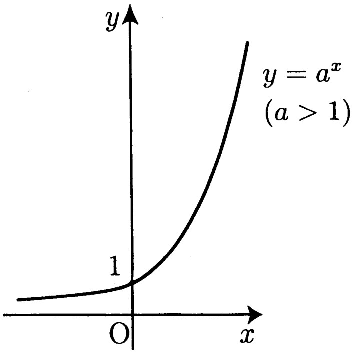


図 3.2

例 3.2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のとき，$y = 2^{-x}$ ゆえ先と同様に x と y の対応表を作れば次のようになる．

x	$\cdots$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$

この表は，例 3.1 の表で y の値の欄の数の並びを逆にしたものとなっている．したがって，これをもとに $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを描くと，図 3.3 のように $y = 2^x$ のグラフと y 軸に関して対称なものが得られる．

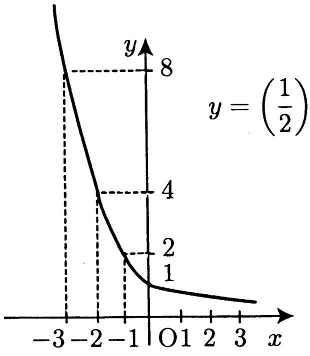


図 3.3

$0 < a < 1$ のときには，$y = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ のグラフは $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフと y 軸に関して対称であり，上の例のグラフと同様に，y 切片が 1 で x 軸を漸近線とする右下がりの曲線となる．

一般に $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称なものとなる．

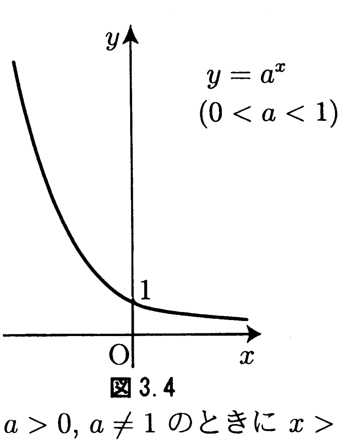


図 3.4

次に，対数関数のグラフについて考える．対数関数とは，$a > 0$, $a \neq 1$ のときに $x > 0$ で定義される $y = \log_a x$ の形の関数のことである．

例 3.3. $y = \log_2 x$ のグラフについて考える．$x = 2^y$ であるから，例 3.1 の表を上下逆転させれば x と y の対応表ができる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\cdots$

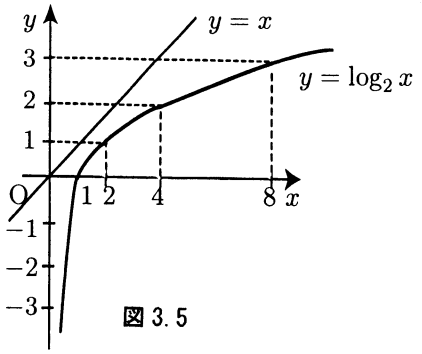


図 3.5

これをもとに $y = \log_2 x$ のグラフをかけば，右のように $y = 2^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称なものを得る．

上の例と同様にして，$y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称となり，したがって x 切片が 1 で y 軸を漸近線とし，$a > 1$ ならば右上がり，$0 < a < 1$ ならば右下がりとなる．

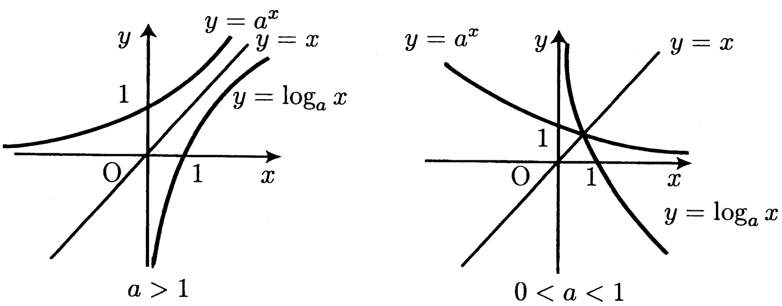


図 3.6

ここでグラフの平行移動について考えておくことにする．

例 3.4. $y = 2^{x-1}$ のグラフを描くために表をつくると次のようになる．

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	$\cdots$

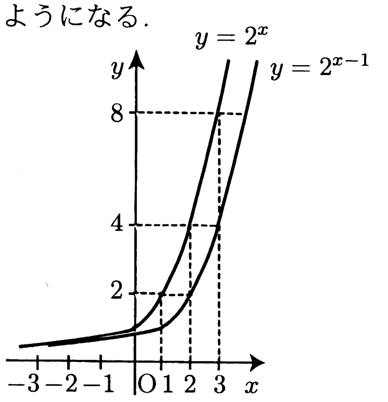


図 3.7

これは例 3.1 の表の y の欄を右へ 1 つだけ移動したものとなるので、$y = 2^{x-1}$ のグラフは $y = 2^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものになる．

さらに，例えば $y = 2^{x-1} + 3$ のグラフは，これをさらに y 軸の正方向に 3 だけ移動させたものとなる．一般に次のことが言える．

定理 3.1. $y = f(x-p)+q$ のグラフは, $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したものである.

例 3.5.

$y = x^2+4x+8$ のグラフについて考える. $y = (x+2)^2+4$ と変形できるから, このグラフは放物線 $y = x^2$ を x 軸方向に -2, y 軸方向に 4 だけ平行移動したものとなる.

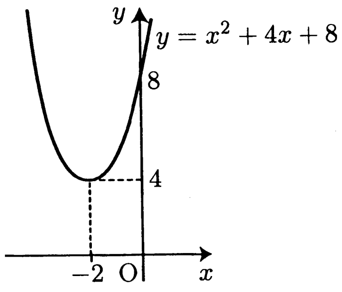


図 3.8

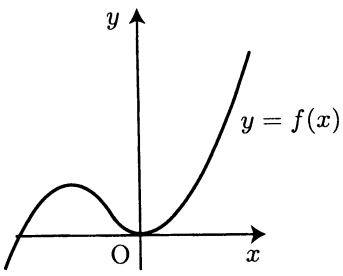
問 3.1. 次の関数のグラフを描け.

(1) $y = 2^{x-3} - 2$ (2) $y = -2^x + 1$ (3) $y = \log_2(x-1) + 1$ (4) $y = \log_2 \dfrac{1}{x} + 3$

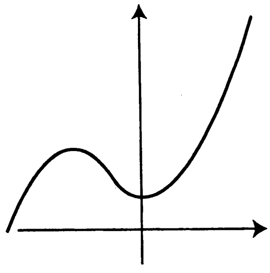
問 3.2. 関数 $y = f(x)$ のグラフが図のようであるとき, 次の関数 (1) ～ (4) のグラフはどのようになるか, (a) ～ (d) から選べ.

(1) $y = -f(x)$ (2) $y = f(-x)$

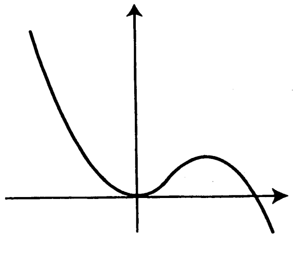
(3) $y = f(x) + 1$ (4) $y = f(x-1)$



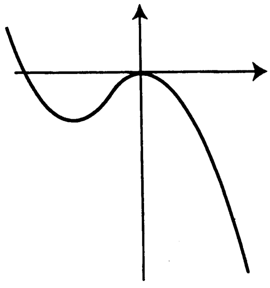
(a)



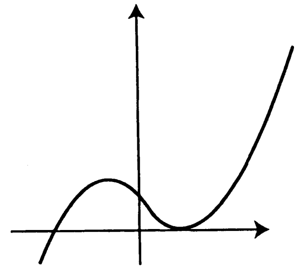
(b)



(c)

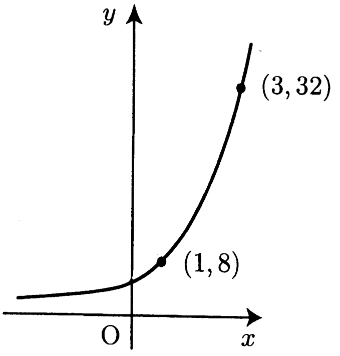


(d)

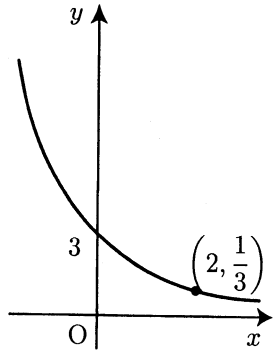


問 3.3. 関数 $y = a^{x+c}$ のグラフが次のようであるとき, a と c の値を定めよ.

(1)



(2)



4 三角関数のグラフ

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ のグラフについて考えておく, まず $y = \sin x$ とする. グラフのかき方は, 基本的には前節でと同様であるので, まず x と y の値の表を作る. 問 1.2 から y の値の近似値を求めれば次の表ができる.

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0.13	0.26	0.38	0.5	0.59	0.71	0.81	0.87	0.92	0.97	0.99	1

この表から $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における $y = \sin x$ のグラフをかけば次のようになる.

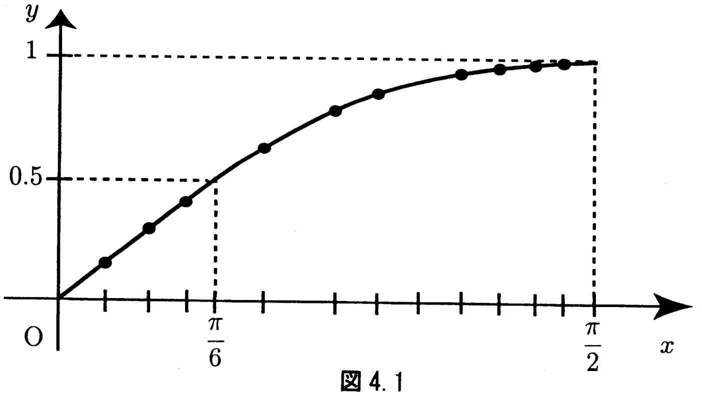


図 4.1

例 1.2 から $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ であるので, $y = \sin x$ のグラフは直線 $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称となり, 上のグラフをもとに $0 \leqq x \leqq \pi$ におけるグラフがかける. さらに $\sin(x + \pi) = -\sin x$ であるので, $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ におけるグラフは $0 \leqq x \leqq \pi$ におけるグラフを x 軸方向に π だけ平行移動して x 軸に関して対称移動したものになる. さらに $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ (n は整数) であることから, $y = \sin x$ のグラフでは, x の値が 2π だけ増減するごとに同じ形が繰り返されることになり, 結局次のようなグラフを得る.

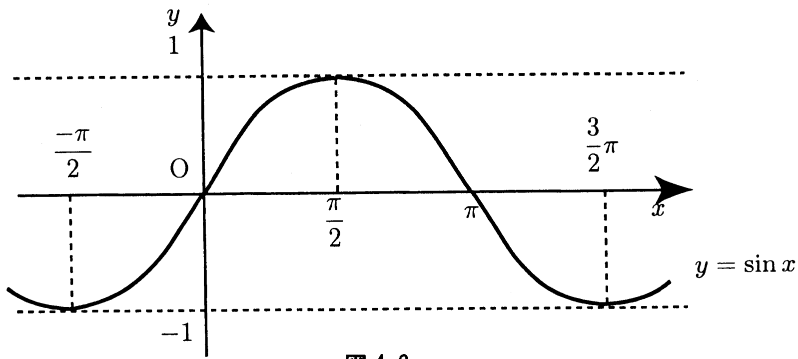


図 4.2

なお, 図 1.3 と $\sin x$ の定義を思い起こせば, 図 1.3 において点 P を点 A から出発させて円周上を正負の向きに回転させたと考えて, 下図のように $y = \sin x$ のグラフをイメージすることもできる.

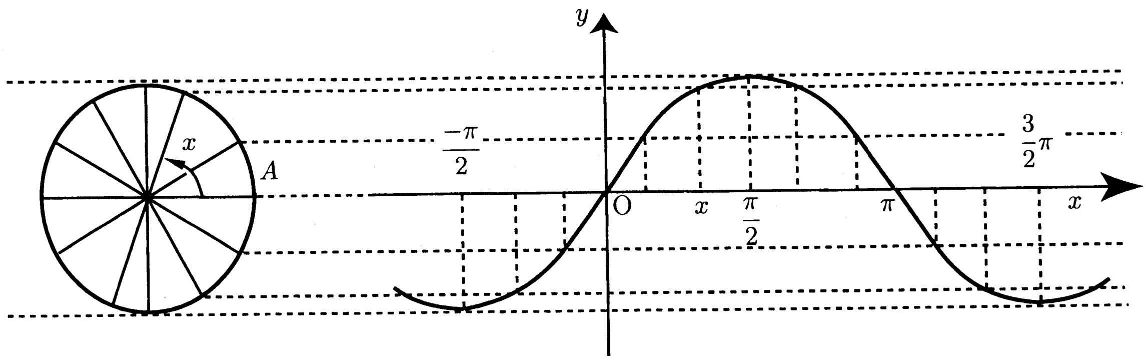


図 4.3

次に, 例 1.2 で見たように $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ であるから, $y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものとなる.

最後に $y = \tan x$ のグラフについて考える $\tan(-x) = -\tan x$ ゆえ $y = \tan x$ は原点について対称で, また $\tan(x + \pi) = \tan x$ であるので, x の値が π だけ増減するごとに同じ形が繰り返されることになる. ゆえに, 次の表をもとに $0 < x < \frac{\pi}{2}$ におけるグラフをまず描くことにより図 4.4 を得る, x が $\frac{\pi}{2}$ に近づくとき $|\tan x|$ の値はどんどん大きくなるので, $y = \tan x$ のグラフは直線 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) を漸近線として持つことに注意する.

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
y	0	0.13	0.27	0.41	0.58	0.77	1	1.38	1.73	2.41	3.73	7.60

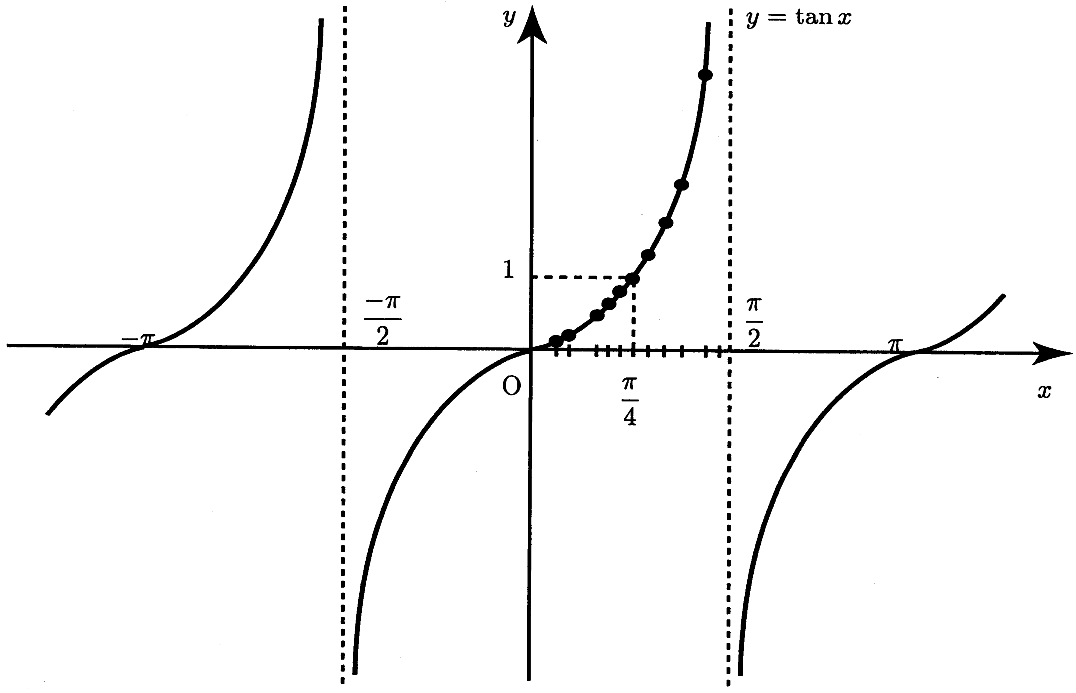


図 4.4

なお, 図 1.3 で A を通り x 軸に垂直な直線と直線 OP の交点を T とすると, T の y 座標が $\tan\theta$ となるので, $y = \sin x$ についてと同様に下図のようにして $y = \tan x$ のグラフをイメージすることもできる.

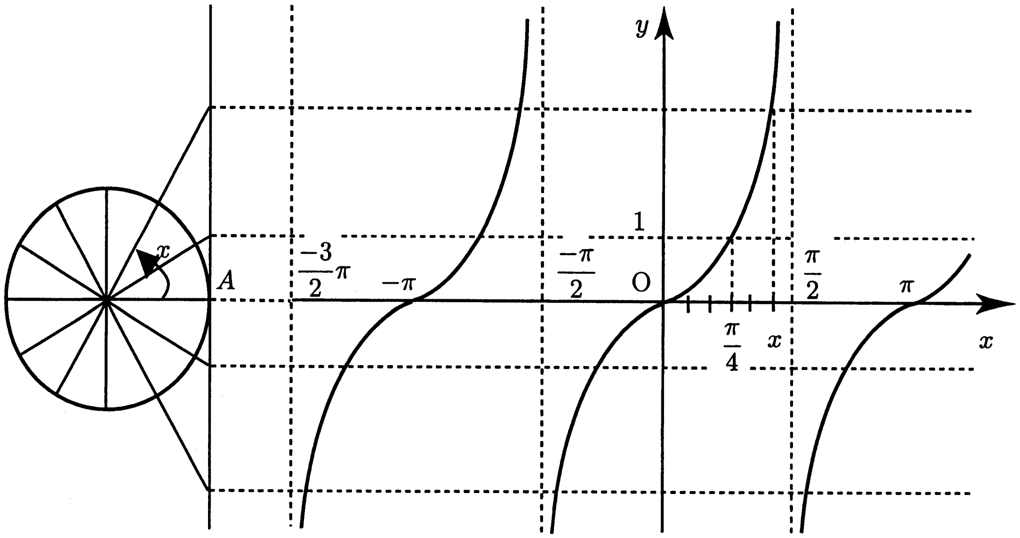


図 4.5

例 **4.1.** $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ のグラフを描いてみる．

$$\begin{aligned} y &= 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \\ &= 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

と変形できるから，グラフは $y = 2\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので次のようになる．

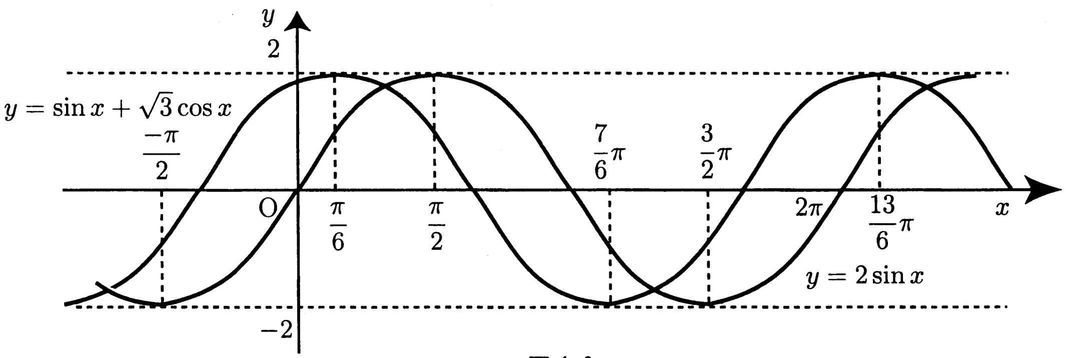


図 4.6

問 **4.1.** 次の関数のグラフを描け．

(1) $y = \sin 2x$　(2) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$　(3) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(4) $y = \sin^2 x$　(5) $y = -2 + \cos(x-1)$

問 **4.2.** $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\mathrm{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ とおく．

(1) $y = \sec x$ について，問 1.2 をもとにして下のような x と y の値の表がつくれる．これを参考にして $y = \sec x$ および $y = \mathrm{cosec} x$ のグラフを描き，それぞれ $y = \cos x$ および $y = \sin x$ のグラフと重ね合わせてみよ．

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
y	1	1.01	1.04	1.08	1.15	1.24	1.41	1.70	2	2.61	3.86	7.66

(2) $\cot x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ を確かめ，$y = \cot x$ のグラフを描け．

5　分数関数と双曲線

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形の関数のグラフを考えてみる．例えば

$$\frac{4x+3}{2x+1}=\frac{2(2x+1)+1}{2x+1}=2+\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{2(x+\frac{1}{2})}+2$$

のように，$c\neq 0$ であれば

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{k}{x-p}+q$$

と変形できて，$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフは $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したものとなる．さらに $k>0$ のとき，(α,β) が $y=\dfrac{k}{x}$ 上の点であれば

$$\beta=\frac{k}{\alpha},\qquad \frac{\beta}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\frac{\alpha}{\sqrt{k}}}$$

であるから $\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{k}},\dfrac{\beta}{\sqrt{k}}\right)$ は $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点となる．よって，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを原点を中心に $\sqrt{k}$ 倍に拡大したものである．同様に $k<0$ のときは，$y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを $\sqrt{|k|}$ 倍に拡大したものが $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフである．したがって $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは次のようになる．

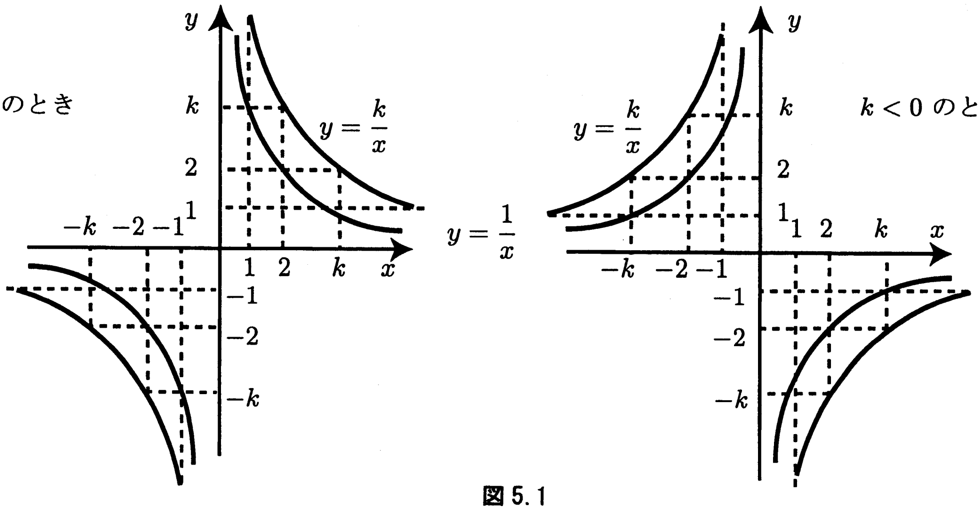


図 5.1

$k\neq 0$ のとき，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは双曲線とよばれ，2 直線 $x=p$ と $y=q$ を漸近線として持つ．

例 5.1. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ のグラフをかく.

$$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$$

であるから, このグラフは $y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ移動したもので, 次のようになる.

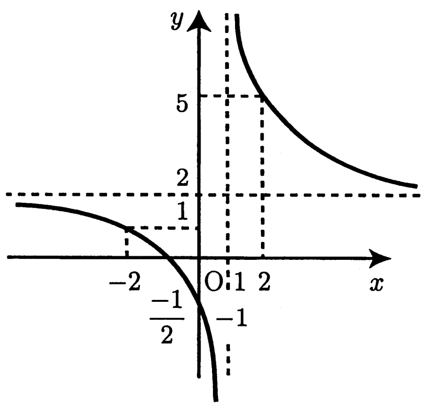


図 5.2

問 5.1. 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y=\dfrac{3x}{x-2}$ (2) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$

問 5.2. $y=\dfrac{ax+b}{x+d}$ のグラフは点 $(1,-1)$ を通り, 2 直線 $x=-3$ と $y=2$ を漸近線に持つという. a, b, d の値を求めよ.

ここで, 双曲線のひとつの性質を見ておこう.

例 5.2. 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と 2 点 $F_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ を考える. 双曲線上の点 P について

$$|F_1P-F_2P|=2\sqrt{2}$$

がつねに成り立つ (F_1, F_2 をこの双曲線の焦点という).

証明 $P\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$ とする．$x > 0$ ならば，

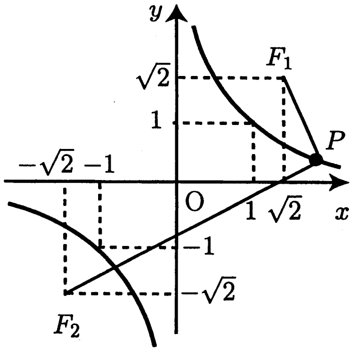


図 5. 3

$$\begin{aligned}
F_1P &= \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2}\frac{1}{x} + 2} \\
&= \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2} \\
&= \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} \\
&= x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

同様にして，

$$F_2P = x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}.$$

よって，

$$F_1P - F_2P = -2\sqrt{2}.$$

また $x < 0$ なら，$F_1P - F_2P = 2\sqrt{2}$ が示せる．

一般に双曲線とは方程式

$$C:\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

で定まる曲線に平行移動と回転を施して得られる曲線のことである．双曲線 C は 2 直線 $y = \dfrac{b}{a}x$ と $y = -\dfrac{b}{a}x$ を漸近線とする．また $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, $F_1(e, 0)$, $F_2(-e, 0)$ とすれば，C 上の点 P について

$$|F_1P - F_2P| = 2a$$

がつねに成り立つ．

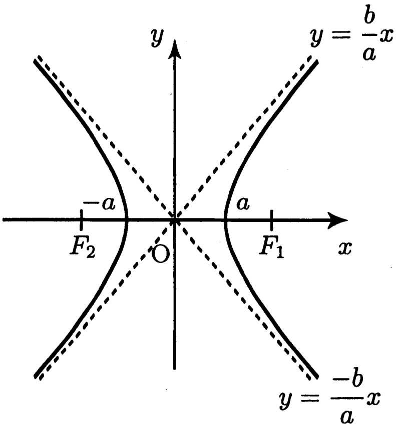


図 5. 4

問 5.3. 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ原点のまわりに回転させると，双曲線 $xy = 1$ になることを示せ．

6　無理関数

変数 x と定数との間で，加減乗除の 4 つの演算を何度かおこなって出来る関数を有理関数といい，これは x の多項式の商で表される．4 つの演算のほかにさらに n 乗根を求める演算を何度かおこなって得られる関数を無理関数という．例えば，

$$\sqrt{x},\quad \sqrt[3]{x},\quad \sqrt{4-2x},\quad \sqrt{x^2+1},\quad \sqrt{\frac{x^3-1}{x^4+1}},\quad \sqrt[4]{x^2+x+1}-\sqrt[5]{x^2-x+1}$$

などである．ここでは簡単な無理関数について，そのグラフを考える．

例 6.1. $y = \sqrt{ax+b}$ のとき，まず定義域は $ax + b \geqq 0$ となる x の全体で，よって $a > 0$ なら $x \geqq -\dfrac{b}{a}$，$a < 0$ なら $x \leqq -\dfrac{b}{a}$ となることに注意する．$y = \sqrt{ax+b}$ のとき $y \geqq 0$ で $y^2 = ax + b$，$x = \dfrac{1}{a}y^2 - \dfrac{b}{a}$ だから，$y = \sqrt{ax+b}$ のグラフは放物線 $x = \dfrac{1}{a}y^2 - \dfrac{b}{a}$ の上半分である．

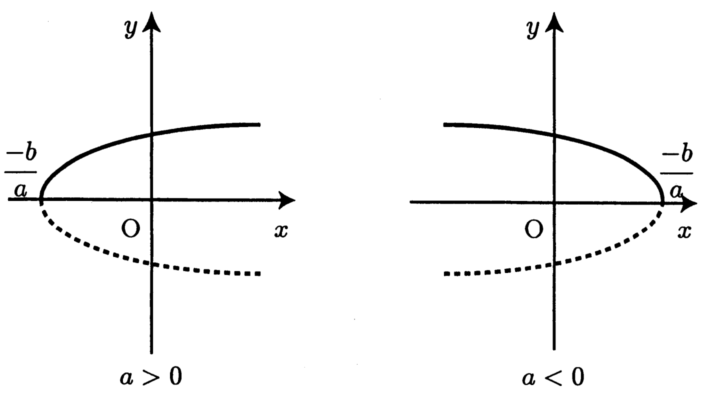


図 6.1

$y = \sqrt{a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)}$ と変形して $y = \sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動したものと考えても，もちろんよい．

問 6.1. 直線 $y = mx$ が関数 $y = \sqrt{4x-2}$ のグラフと 1 点を共有するような定数 m の値を求めよ．

例 6.2. $y=\sqrt{x^2-2}$ のグラフ. 定義域は, $|x| \geqq \sqrt{2}$ つまり $x \leqq -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqq x$ である. 両辺を2乗すると

$$y^2 = x^2 - 2, \qquad x^2 - y^2 = 2$$

となり, これは双曲線 $xy=1$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものである (問 5.3). $y=\sqrt{x^2-2}$ のグラフは, この双曲線の x 軸より上の部分である.

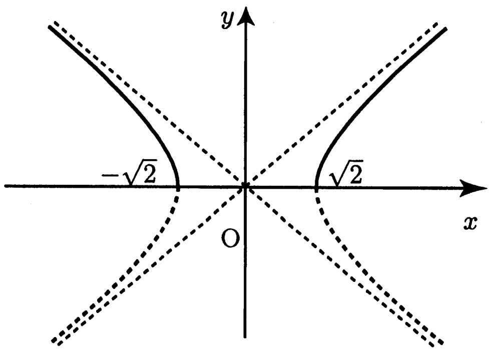


図 6.2

問 6.2. (1) $y=\sqrt{x^2+2}$ のグラフをかけ. (2) $y=\sqrt{x^2+2x-1}$ のグラフをかけ.

例 6.3. $y=\sqrt{a^2-x^2}$ のグラフ $(a>0)$. 定義域は $-a \leqq x \leqq a$ である. 両辺を2乗すると

$$y^2 = a^2 - x^2, \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

となるから, グラフは原点を中心とする半径 a の円の上半分である.

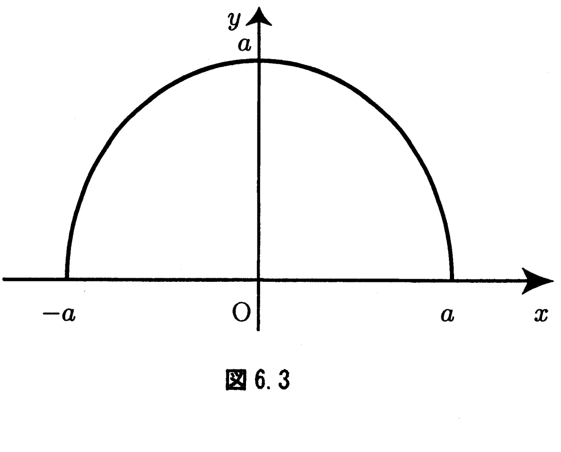


図 6.3

例 6.4. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ のグラフ．これは上で扱った $y = \sqrt{9-x^2}$ のグラフを y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍に引き伸ばしたものとなる．

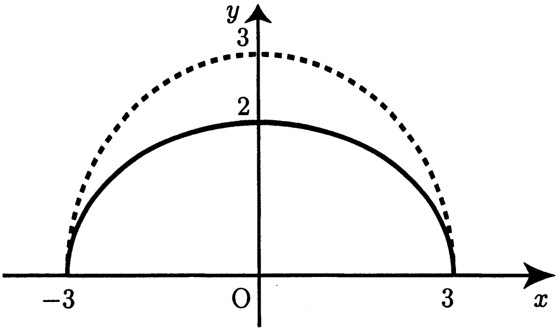


図 6.4

上の例では, $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ の両辺を2乗して整理すると楕円の方程式 $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$ になる．グラフはこの楕円の上半分となっている．一般に原点を中心とする楕円は, 方程式

$$C:\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad (a>0,\ b>0)$$

で与えられる．C 上の点 (α,β) について, 点 $\left(\dfrac{\alpha}{a}, \dfrac{\beta}{b}\right)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから, C はこの円を x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍に引き伸ばしたものになる．

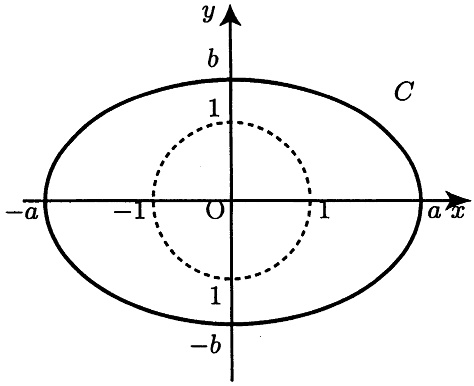


図 6.5

参考までに次の例を付け加えておく．

例 6.5. $a>b>0$, $e=\sqrt{a^2-b^2}$ とし, 楕円 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ と2点 $F_1(e,0)$, $F_2(-e,0)$ を考える．このとき, 楕円上の点 P についてつねに

$$F_1P + F_2P = 2a$$

が成り立つ. (F_1, F_2 を楕円の焦点という.)

証明 図形の対称性より, $P\left(x, b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$ として

$$F_1P + F_2P = 2a$$

を示せば十分である. まず,

$$\begin{aligned} F_1P^2 &= (x-e)^2 + b^2\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\} \\ &= x^2 - 2ex + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\ &= \frac{e^2}{a^2}x^2 - 2ex + a^2 \\ &= \left(\frac{e}{a}x - a\right)^2. \end{aligned}$$

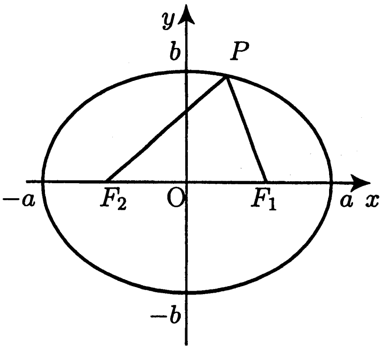


図 6.6

ここで $|x| < a$ ゆえ $\left|\frac{e}{a}x\right| < e < a$ となり,

$$F_1P = a - \frac{e}{a}x.$$

同様に,

$$F_2P = a + \frac{e}{a}x$$

となるので

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

問 6.3. 放物線 $y = x^2 + \frac{1}{4}$ と点 $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を考える. 放物線上の点 P について, P と x 軸との距離は FP に等しいことを示せ.

7　極座標

座標平面上の点 P について, 原点 O と P との距離を r, 半直線 OP が x 軸の正の方向となす角を θ とすると, 点 P は r と θ の組 (r, θ) で決まる. そこでこの組 (r, θ) を点 P の極座標という. 今まで用いてきた x 座標と y 座標の組 (x, y) は, 極座標と区別する必要があるときには直交座標と呼ばれる. 両座標の間には次の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

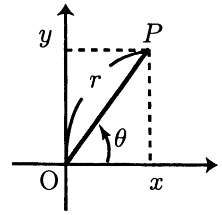


図 7.1

例えば，点 P の直交座標が $(1, \sqrt{3})$ であるとき，P の極座標は

$$\cdots \left(2, -\frac{11\pi}{3}\right), \quad \left(2, -\frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(2, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(2, \frac{7\pi}{3}\right), \quad \left(2, \frac{13\pi}{3}\right), \cdots$$

などいろいろ考えられる．このように点 P に対してその極座標はただ一つに定まるわけではないことに注意する．

r が θ の関数として $r = f(\theta)$ のように定められていると，θ が動くとき極座標が (r, θ) である点はある曲線を動く．$r = f(\theta)$ をこの曲線の極方程式という．

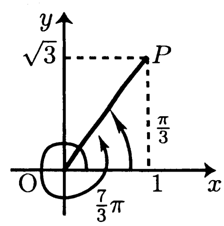


図 7.2

例 **7.1.** 極方程式 $r = 2\cos\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で定まる曲線について考える．いろいろな θ に対する r の値を表にすると次のようになる．

θ	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

よって曲線は極座標が $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\dfrac{\pi}{3}, 1\right), \cdots$ などで与えられる点を通る．これらの点をつないで曲線を描くと円が浮かび上がってくる（必要なら問題 1.2 を利用するなどしてもっと多くの点を用意すればよい.）

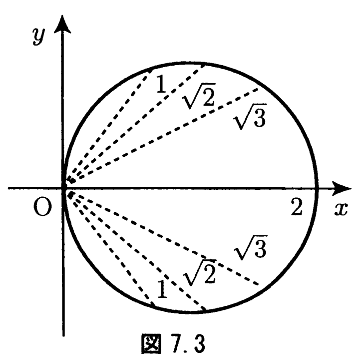


図 7.3

曲線が円であることを示すには, 直交座標で方程式をかいてみればよい. いま,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r = 2\cos\theta$$

であるから,

$$2x = 2r\cos\theta = r^2 = x^2 + y^2$$

となる. これから, 円の方程式

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

を得る.

例 7.2. 曲線 $r = 1 + \cos\theta$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ をスケッチしてみる. 今度はまず θr-平面に $r = 1 + \cos\theta$ のグラフをかいて考えてみる.

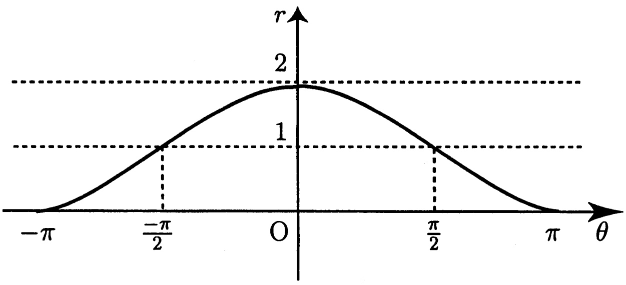


図 7.4

θ が $-\pi$ から $-\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき r は 0 から 1 まで増加するので, これに対応する曲線の部分が下の (a) のようにかける. 次に θ が $-\dfrac{\pi}{2}$ から 0 まで増加すると r は 1 から 2 まで増加するので, (b) のような曲線がかける. 同様に続けて考えれば, 問題の曲線が (c) のようにかける. この曲線は心臓形 (cardioid) と呼ばれる.

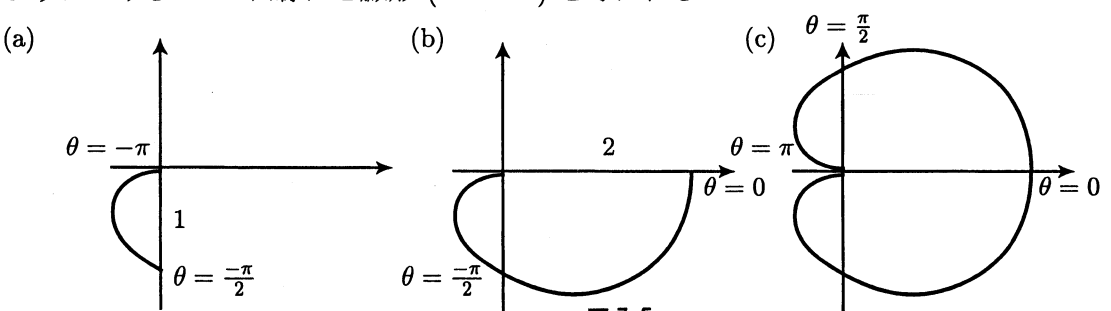


図 7.5

問 7.1. 次の極方程式で与えられる曲線をスケッチせよ. ただし a は正の定数とする.

(1) $r = |\sin 2\theta|$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$　(2) $r = |\sin 3\theta|$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$
(3) $r = a\theta$ $(\theta > 0)$　(4) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

問 7.2. 円 $r = 3\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と心臓形 $r = 1 + \cos\theta$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ の交点の座標を直交座標で求めよ.

第0章　練習問題

1. 次の2次式を $a(x-p)^2+q$ という形に変形せよ.

(1) x^2+2x+1　(2) $2x^2+8x+1$　(3) $2x^2+6x+1$　(4) $-3x^2+2x-1$
(5) $-x^2-3x+3$　(6) x^2-3x+1　(7) $(x-1)(x-2)$　(8) $-(x+1)(2x-1)$

2. 次の関数を与えられた (p,q) だけ平行移動した関数の式を求めよ.
(ここで (p,q) とは x 軸方向に p, y 軸方向に q を表す.)

(1) $y=x$　$(3,1)$　(2) $y=x^2+2x$　$(1,2)$　(3) $y=\cos x$　$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$
(4) $y=2\sqrt{x}$　$(2,1)$　(5) $y=2^x$　$(-1,2)$　(6) $y=\dfrac{x}{2x+1}$　$\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

3. 次の角度を弧度法で表せ.

(1) 30°　(2) 70°　(3) 320°　(4) 700°　(5) 1440°　(6) −45°　(7) −15°　(8) 0°

4. 次の値を求めよ.

(1) $\sin\frac{\pi}{3}$　(2) $\sin\frac{4}{3}\pi$　(3) $\cos\frac{\pi}{6}$　(4) $\tan\frac{\pi}{4}$　(5) $\sin\frac{-4}{3}\pi$　(6) $\cos\frac{7}{4}\pi$
(7) $\cos\frac{8}{3}\pi$　(8) $\tan\frac{11}{6}\pi$　(9) $\sin\frac{3}{4}\pi$　(10) $\cos\frac{-5}{4}\pi$　(11) $\tan\frac{-\pi}{3}$　(12) $\sin\frac{33}{2}\pi$

5. 加法定理などの公式を用いて次の値を求めよ.

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$　(2) $\cos\frac{-5}{12}\pi$　(3) $\tan\frac{7}{12}\pi$　(4) $\sin\frac{11}{12}\pi$
(5) $\tan\frac{13}{12}\pi$　(6) $\sin\frac{-19}{12}\pi$　(7) $\cos\frac{5}{24}\pi\sin\frac{\pi}{24}$　(8) $\cos\frac{7}{24}\pi\cos\frac{5}{24}\pi$

6. 次の式を簡単にしなさい.

(1) $25^{\frac{3}{2}}$　(2) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$　(3) $\sqrt[3]{-0.125}$　(4) $\sqrt[5]{0.00001}$
(5) 0.5^0　(6) $25^{1.5}\times 32^{-0.2}$　(7) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[6]{81^{-4}}$　(8) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2b}\sqrt{a^7b}}$

7. 次の数を小さい順に並べよ.

(1) $3, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{27}$　(2) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{15}, \sqrt[4]{35}$　(3) $\sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{5}, \sqrt[3]{2}$　(4) $\frac{1}{3}, \sqrt[3]{9}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{27}$
(5) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[10]{10}$　(6) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{7}$　(7) $\sqrt[6]{5}, \sqrt[4]{3}$

8. 次の値を求めよ.

(1) $\log_2 8$　(2) $\log_3\sqrt[4]{27}$　(3) $\log_{0.1}10$　(4) $\log_9 3$
(5) $\log_2\frac{4}{3}+\log_2 24$　(6) $\log_2 3\times\log_{81}8$　(7) $10^{\log_{100}3}$　(8) $8^{\log_2 5}$

9. $a=\log_{10}2$, $b=\log_{10}3$ としたとき, 次の値を a, b を用いて表せ.

(1) $\log_{10}5$　(2) $\log_3 4$　(3) $\log_3 2$　(4) $\log_{\sqrt{3}}12$
(5) $\log_5 4$　(6) $\log_{\sqrt{5}}8$　(7) $\log_{10}\sqrt{0.3}$　(8) $\log_{12}25$

10. x を求めよ.

(1) $\log_{\frac{1}{2}}x=3$　(2) $10^x=100$　(3) $2^x=10$
(4) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=2$　(5) $(\log_2 x)^2+\log_2 4x=4$　(6) $\log_{0.3}(4-3x)=0$

第1章

関数の極限

第1章では必ずしも厳密な定義を出発点としてはいないので, ここで扱う大部分の定理に証明は与えられていない. しかし, 本書を理解するためには, それらの証明を理解することが不可欠というわけではない. 本章も微積分学にいたるための準備と考えてもらえばよい.

1　数列と極限

実数を順に並べた列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を**数列**といい, $\{a_n\}$ で表す. 本書では, 数列といえば通常, 無限数列を意味する. 序章で述べたように, 無理数 $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ に対して, $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1.41$, $a_3 = 1.414, \cdots$ とおくと, この数列 $\{a_n\}$ は n を大きくすると $\sqrt{2}$ に限りなく近づいていく. これを一般的に述べると, 次の数列の収束という概念に至る. 数列 $\{a_n\}$ において, n が限りなく大きくなるとき a_n がある1つの値 a に限りなく近づくとする. このとき数列 $\{a_n\}$ は a に**収束する**といい, a を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という. これを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{または} \quad a_n \to a \ (n \to \infty)$$

で表す. 上のことは, 「すべての無理数は, ある有理数の数列の極限値として表される」ことを述べている.

注 1.1.　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を厳密に定義すると, 次のようになる:
「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある (十分大きい) 自然数 n_0 をとると,

$$n \geqq n_0 \quad \text{ならば} \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ. 」
数列の収束に関する種々の定理は, この定義に基づいて証明される.

数列がある値に収束するとき, その数列は**収束する**という. また, 収束しない数列を**発散する**という. 特に, n が限りなく大きくなるに従って a_n が限りなく大きく (小さく) なるとき, 数列 $\{a_n\}$ は**正の** (**負の**) **無限大に発散する**といい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad a_n \to \infty \ (n \to \infty)$$
$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad a_n \to -\infty \ (n \to \infty)\right)$$

で表す. ここで, ∞ や $-\infty$ は数値ではなく, 数の変化の状態を表す記号である.

定理 1.1 (収束数列の基本的性質)． 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束しているとき, 次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n)$,　特に, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(c\,b_n) = c\lim_{n\to\infty} b_n$　(c は定数).

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$　($\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ とする).

(4) $a_n \leqq b_n \ (n = 1, 2, \cdots)$ ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$.

注 1.2. 定理 1.1 は (3) を除いて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ (複号同順) の場合についても成り立つ.

問 1.1. 次の数列の極限値を求めよ.

(1) $\left\{\dfrac{n+1}{n^3-1}\right\}$　(2) $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\}$　(3) $\left\{\dfrac{\sin n\theta}{n}\right\}$　(4) $\{1+(-1)^n\}$

数列 $\{a_n\}$ において,

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots$$

が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ は**単調増加**であるといい, 特に

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

のとき, **狭義の単調増加**という.

同様に,

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots$$

が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ は**単調減少**であるといい, 特に

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$$

のとき, **狭義の単調減少**という. これらを総称して, **単調数列**という.

次に, 数列 $\{a_n\}$ において,

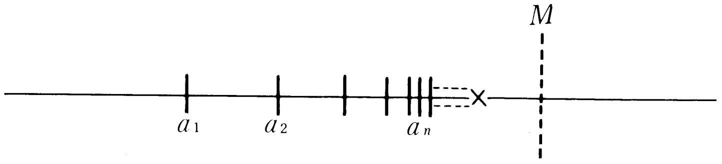
$$a_n \leqq M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる定数 M が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるという. 同様に,

$$a_n \geqq L \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる定数 L が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ は下に有界であるという. 上にも下にも有界な数列 $\{a_n\}$ (つまり, $|a_n| \leqq K$ となる定数 K が存在するとき) を単に有界という.

定理 1.2 (単調数列の収束) . 上に有界な単調増加数列は収束する. また, 下に有界な単調減少数列も収束する.



有界な単調増加数列

例 1.1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示せ.

証明　$h_n = \sqrt[n]{n} - 1$ とおく. $\sqrt[n]{n} \geqq \sqrt[n]{1} = 1$ より $h_n \geqq 0$ である. 2項定理[1] より

$$n = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

そこで, $n \geqq 2$ のとき $0 \leqq h_n \leqq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$ となる. ここで, $n \to \infty$ とすれば $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \to 0$. したがって, 間にはさまった h_n も仕方なく 0 に近づく. ゆえに, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1+h_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} h_n = 1.$ □

上の例 1.1 の証明の最後で用いた論法ははさみうちの原理とよばれ, いろいろな数列の極限値を求める際に多用される. すなわち,

定理 1.3 (はさみうちの原理) . 3つの数列 $\{a_n\}\{b_n\}\{h_n\}$ について, 十分大きな n に対しては, つねに $a_n \leqq h_n \leqq b_n$ が成り立ち $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であれば, $\lim_{n\to\infty} h_n = \alpha$ となる.

[1] 第 2 章 4 節参照

例 1.2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$ を示せ.

証明 $a = 1$ のとき: $\sqrt[n]{a} = 1$ だから明らか.

$a > 1$ のとき: $n > a$ となるように n を十分大きくとれば, $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ となる. 例 1.1 より, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ となり, はさみうちの原理より, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ を得る.

$a < 1$ のとき: $a = \dfrac{1}{b}$ とおくと, $b > 1$ であるから, 定理 1.1 (3) と上の場合より

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1. \quad \square$$

例 1.3. 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は収束する (この極限値を**自然対数の底**といい, e で表す).

証明 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = a_n$ とおく. 定理 1.2 により, 数列 $\{a_n\}$ が (狭義の) 単調増加かつ上に有界であることを示せばよい.

単調性: 2 項定理により,

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

a_n と a_{n+1} の各項を比べると第 3 項以降は a_{n+1} の方が大きく, また a_{n+1} は正の項を最後に余分にもつので, $a_n < a_{n+1}$ となる.

有界性: $n > 2$ のとき $n! > 2^{n-1}$ であるから, 上の a_n の等式より

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

よって, $\{a_n\}$ は有界である. $\square$

注 1.3. e は無理数で, $e = 2.7182818\cdots$ であることが知られている.

問 1.2. 次の数列の極限値を求めよ.

(1) $\left\{\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{3n}\right\}$ (2) $\left\{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

2 数列の級数

数列 $\{a_n\}$ に対して, その無限和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を数列 $\{a_n\}$ の**級数**といい, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ または単に $\sum a_n$ で表す.

数列 $\{a_n\}$ の有限和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ で表す. この有限和による数列 $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$ がひとつの値 s に収束するとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ と表す. 数列 $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$ が発散するとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**発散する**という. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ として, 数列 $\{s_n\}$ が収束しなければならないので, 次の定理が成り立つことがわかる.

定理 2.1. 級数 $\sum a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ である級数 $\sum a_n$ は収束しない.
高等学校で習った簡単な例を思い出すと,

例 2.1. 等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散する} & (|r| \geqq 1) \end{cases}.$$

証明 等比数列の有限和は, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ である. そこで, $|r| < 1$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$ となる. また, $|r| \geqq 1$ のときは, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n \neq 0$ であるから, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は発散する. □

問 2.1. すべての循環小数が, なぜ分数で表されるかを考えよ.

定理 1.1 から次のことがすぐわかる.

定理 2.2 (収束する級数の基本的性質) . 2 つの級数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ が収束しているとき, 次が成り立つ.

(1) $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

(2) $\sum ca_n = c \sum a_n$. (c は定数).

以下，級数の値そのものを求めるより，級数が収束するか発散するかを議論する．

数列 $\{a_n\}$ の各項が正，すなわち $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ のとき，$\sum a_n$ を**正項級数**という．一般に，級数 $\sum a_n$ が収束するかどうかの判定は容易ではない．しかし，正項級数に関する限りいくつかの有効な判定法がある．それらのいくつかを証明せずに述べておこう．

定理 2.3 (比較判定法)．2 つの正項級数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ において，

$$a_n \leqq b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

であるとき，次が成り立つ．

(1) $\sum b_n$ が収束すれば，$\sum a_n$ も収束する．

(2) $\sum a_n$ が発散すれば，$\sum b_n$ も発散する．

問 2.2. 比較判定法により $\sum \dfrac{1}{2^n + n}$ は，収束することを示せ．

定理 2.4 (ダランベールの判定法)．正項級数 $\sum a_n$ において，$r = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ であるとき，次が成り立つ．

(1) $0 \leqq r < 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．

(2) $1 < r \leqq \infty$ ならば，$\sum a_n$ は発散する．

問 2.3. ダランベールの判定法を用いて，$\sum \dfrac{2^n}{n!}$ は，収束するか発散するかを判定せよ．

定理 2.5 (コーシーの判定法)．正項級数 $\sum a_n$ において，$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ であるとき，次が成り立つ．

(1) $0 \leqq r < 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．

(2) $1 < r \leqq \infty$ ならば，$\sum a_n$ は発散する．

問 2.4. コーシーの判定法を用いて，$\sum \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ は，収束するか発散するかを判定せよ．

3　写像と関数

以下, 本書を通して, $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を表す. まず, 一般的な議論から始めよう.

2つの空でない集合 A, B があって, A の各元 x に対して, B の1つの元 y が対応しているとき, その対応の規則を A から B への**写像**という. A から B への写像を,

$$f : A \to B \qquad \text{または} \qquad y = f(x),\ x \in A$$

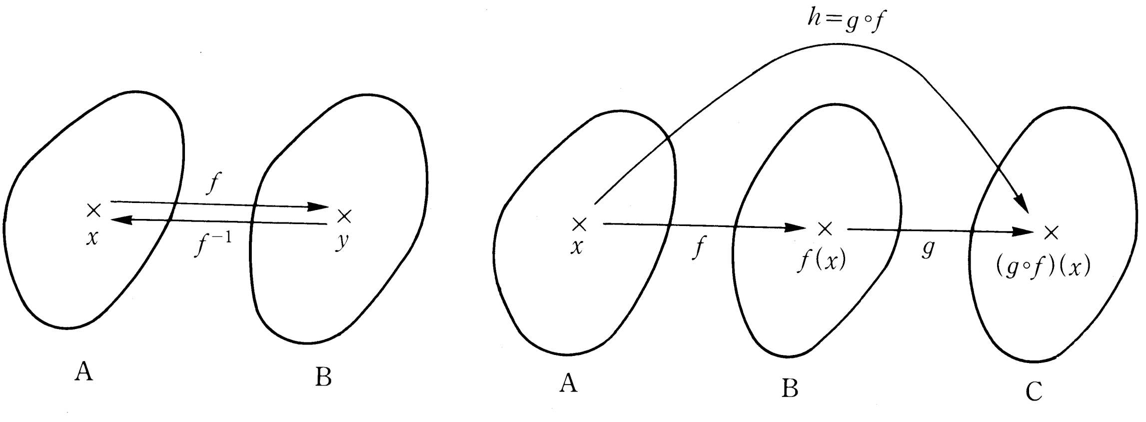
で表す.

写像 $f : A \to B$ に対して, A を f の**定義域**といい, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ を f の**値域**という.

写像 $f : A \to B$ に対して, $f(A) = B$ であるとき, f は A から B の**上への写像**または**全射**という. $x, x' \in A$ で $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ となるとき, f は**1対1の写像**または**単射**という.

写像 $f : A \to B$ が1対1上への写像 (全単射) であるとき, B の任意の元 y に対して, $f(x) = y$ となる A の元 x がただ1つ定まる. そこで, この対応により B から A への写像が得られる. これを f の**逆写像**といい, f^{-1} で表す.

3つの空でない集合 A, B, C と写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ が与えられたとき, 写像 $h : A \to C$ を $h(x) = g(f(x))$ によって定義できる. これを f と g の**合成写像**といい, $h = g \circ f$ で表す.



逆写像と合成写像

D が実数の部分集合 ($\mathbf{R}$ の部分集合) であるとき, 写像 $f : D \to \mathbf{R}$ を (**1変数**) **関数**という. f の定義域 D に属する x を (**独立**) **変数**, y を**従属変数**という. 関数に対する逆写像や合成写像は, それぞれ**逆関数**, **合成関数**といわれる.

D を平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ の部分集合とするとき, D から $\mathbf{R}$ への写像を**2変数関数**という. 一般に, D を n 次元空間 $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$ の部分集合とするとき, D から $\mathbf{R}$ への写像を **n 変数関数**という.

例 3.1. 2 つの関数 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+3$ に対して, その合成関数 $(g\circ f)(x)$ および $(f\circ g)(x)$ はそれぞれ

$$(g\circ f)(x)=2x^2+3, \qquad (f\circ g)(x)=(2x+3)^2$$

となる.

具体的な表示が与えられている関数 $y=f(x)$ に対して, 通常その定義域として $f(x)$ が意味を持つすべての点を考えるので, いちいちそれを明示しない. 例えば, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ なる関数の自然に考えうる定義域は 0 を除く全実数である.

関数の定義域として, 次の $\mathbf{R}$ の部分集合がよく用いられる: $a<b$ に対して,

(1) $(a,b)=\{x : a<x<b\}$,
(2) $[a,b]=\{x : a\leqq x\leqq b\}$,
(3) $[a,b)=\{x : a\leqq x<b\}$, $\quad (a,b]=\{x : a<x\leqq b\}$,
(4) $(a,\infty)=\{x : a<x\}$, $\quad [a,\infty)=\{x : a\leqq x\}$,
(5) $(-\infty,b)=\{x : x<b\}$, $\quad (-\infty,b]=\{x : x\leqq b\}$,
(6) $(-\infty,\infty)=\mathbf{R}$.

これらを総称して**区間**という. 特に, (1) を**開区間**, (2) を**閉区間**, (3) を**半開区間**という. (1), (2), (3) を**有限区間**, (4), (5), (6) を**無限区間**という.

例 3.2. (1) $y=\dfrac{1}{x}$ の定義域と値域は, $\{x\in\mathbf{R} : x\neq 0\}$ である.

(2) $y=\sqrt{1-x^2}$ の定義域は $[-1,1]$ であり, 値域は $[0,1]$ である.

問 3.1. 次の関数の定義域と値域を求めよ.

(1) $y=x^2$ $\qquad$ (2) $y=\log x$ $\qquad$ (3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ (4) $y=\tan x$

4 関数の極限

関数 $f(x)$ の定義域を D とする. 変数 $x\in D$ が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき, $f(x)$ の値がある 1 つの値 α に限りなく近づくとする. このとき, α を $f(x)$ の a における**極限値**といい,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad f(x)\to\alpha\ (x\to a)$$

で表す. ここで, $a=\infty$ $(-\infty)$ のときは, x が限りなく大きく (小さく) なることを意味する. また, $f(x)$ は $x=a$ において定義されていなくともよい.

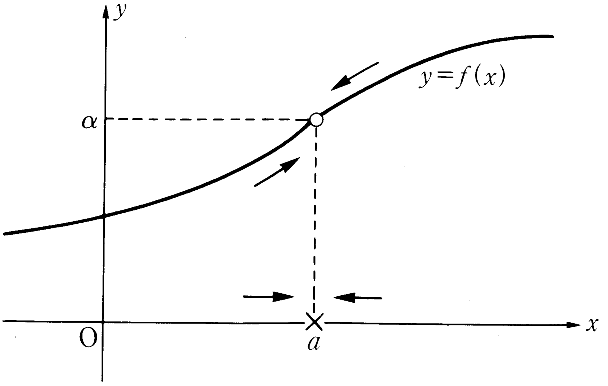
注 4.1. D を定義域とする関数 $f(x)$ に対して, $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ を厳密に定義すると：

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある (適当な) $\delta > 0$ をとると,

$$0 < |x-a| < \delta,\ x \in D \quad ならば \quad |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ.」

このような定義をいわゆる $\varepsilon - \delta$ **法**という.



関数の極限

同様に, $x \to a$ のとき, $f(x)$ の値が限りなく大きく (小さく) なることを

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad または \quad f(x) \to \infty \ (x \to a)$$
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad または \quad f(x) \to -\infty \ (x \to a) \right)$$

で表す.

例 4.1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ を求めよ.

解 $x \to 1$ のとき, $x \neq 1$ だから, 分子と分母を $x-1$ で割って,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2. \quad \square$$

x を $x > a$ に制限して限りなく a に近づけたとき (これを $x \to a+0$ で表す), $f(x)$ の値がある 1 つの値 α に限りなく近づくならば α を $f(x)$ の**右極限**といい,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha \quad または \quad f(x) \to \alpha \ (x \to a+0)$$

で表す. また, x を $x < a$ に制限して限りなく a に近づけたとき (これを $x \to a-0$ で表す), $f(x)$ の**左極限**

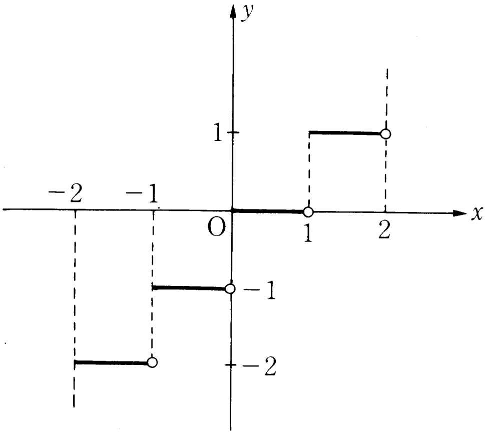
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \beta \quad または \quad f(x) \to \beta \ (x \to a-0)$$

が同様に定義される. 特に $x \to 0+0$ は $x \to +0$, $x \to 0-0$ は $x \to -0$ で表す.

注 4.2. $x \to a-0$ のとき, $b<a$ ならば $b<x<a$ とみなせる. $x \to a+0$ のとき, $a<c$ ならば $a<x<c$ とみなせる. そこで, $x \to a$ のとき, $b<a<c$ ならば $b<x<c$ とみなすことができる.

例 4.2. 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す (これを**ガウス記号**という). すなわち, $n \leqq x < n+1$ (n は整数) のとき, $[x]=n$ となる. このとき, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}[x]$ および $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}[x]$ を求めよ.

解 (1): $0 \leqq x < 1$ のとき, $[x]=0$ となるから, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}[x]=0$.
(2): $1 \leqq x < 2$ のとき, $[x]=1$ より, $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}[x]=1$. □



$y=[x]$ のグラフ

数列の場合の定理 1.1 と同様に, 次を得る.

定理 4.1 (関数の極限の基本的性質)． $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$,　特に, $\displaystyle\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x)$　(c は定数).

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)}$　$(\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ とする).

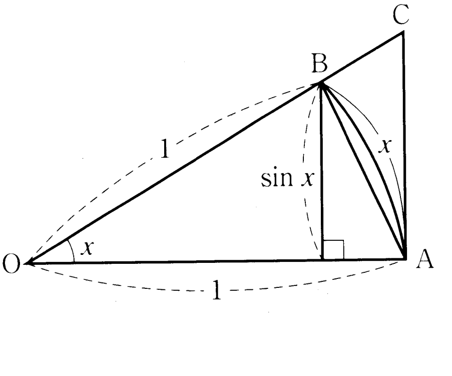
(4) $f(x) \leqq g(x)$ ならば, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \leqq \lim_{x\to a} g(x)$.

(5) (はさみうちの原理) $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ ならば, $\displaystyle\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$.

注 4.3. $a=\pm\infty$ のときも, 定理 4.1 は成り立つ.

補題 4.2. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ならば, $\sin x < x < \tan x$.

証明 右の図の $\triangle$OAB の面積, 扇形 OAB の面積, $\triangle$OAC の面積は, それぞれ $\dfrac{1}{2}\sin x$, $\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{1}{2}\tan x$ である. それらの大小を比較すると, 求める不等式が得られる. □



定理 4.3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

証明 $x\to +0$ のとき：注 4.2 より, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい. $\sin x>0$ だから, 補題 4.2 の式を $\sin x$ で割って逆数をとると, $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$ を得る. そこで, 定理 4.1 (5) より, $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$ となる.

$x\to -0$ のとき：$y=-x$ とおく. このとき, $y\to +0$ かつ $\sin x=\sin(-y)=-\sin y$ だから, 上の場合より

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to +0}\frac{-\sin y}{-y}=\lim_{y\to +0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

いずれにしても, 求める式を得る. □

例 4.3. (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

証明 (1): $[x]=n$ とする. $n\leqq x<n+1$ より, $1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{x}\leqq 1+\dfrac{1}{n}$ となるから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

定理 1.1 (2),(3) および例 1.3 より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e,\\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=e.\end{aligned}$$

ゆえに, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

次に, $x=-y$ とおくと, $x\to -\infty$ のとき $y\to\infty$ となるから, 定理 4.1 (2) より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y\\ &=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.\end{aligned}$$

(2): $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと, $x\to\pm\infty$ のとき $t\to 0$ となるから,

$$e=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.\quad\square$$

問 4.1. 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$　(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a,b>0)$　(3) $\lim_{x\to +0}\dfrac{|x|}{x}$

(4) $\lim_{x\to -0}\dfrac{x}{|x|}$　(5) $\lim_{x\to 3-0}[x^2]$　(6) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$

問 4.2. $\lim_{x\to a}|f(x)|=0$ ならば, $\lim_{x\to a}f(x)=0$ となることを示せ.

5　連続関数

関数 $f(x)$ に対して,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\quad (\text{または}, \lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a))$$

が満たされるとき, $f(x)$ は $x=a$ で**連続**であるという. すなわち, $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは, 次の 3 つの条件：

(i) a が $f(x)$ の定義域にある,

(ii) 極限値 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ が存在する,

(iii) $f(a)=\alpha$ である,

が成り立つことと同等である. 関数 $f(x)$ がその定義域のすべての点で連続のとき, $f(x)$ は**連続**であるまたは**連続関数**であるという. また, $f(x)$ が区間 I の上で定義されており, I の各点で連続のとき, $f(x)$ は I **で連続**であるという. 特に, $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとは, $f(x)$ が開区間 (a,b) で連続であり,

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)\quad (\text{これを } f(x) \text{ は } x=a \text{ で}\textbf{右連続}\text{という}),$$
$$\lim_{x\to b-0}f(x)=f(b)\quad (\text{これを } f(x) \text{ は } x=b \text{ で}\textbf{左連続}\text{という})$$

であるとき.

定理 5.1 (連続関数の基本的性質). 関数 $f(x)$, $g(x)$ が ($x=a$ で) 連続ならば, 次の関数

(1) $f(x)+g(x)$,

(2) $f(x)g(x)$,　特に, $cf(x)$　(c は定数),

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　($g(a)\neq 0$ とする)

は ($x=a$ で) 連続となる.

証明 (1): 定理 4.1 (1) より,

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a).$$

以下同様に, (2) と (3) はそれぞれ定理 4.1 の (2) と (3) より従う.　□

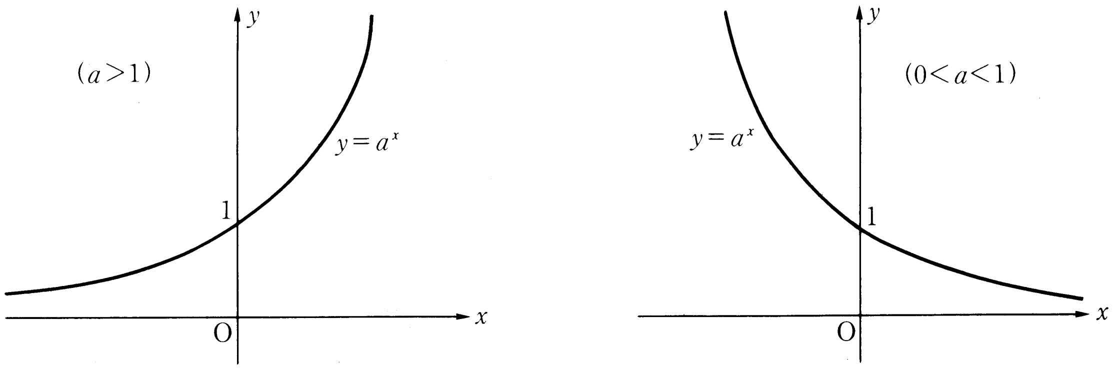
われわれは高等学校で学んだような, なじみ深い関数の連続性については, 暗黙の内に仮定して議論を進めている. (例えば, 定理 4.3 の証明の中では厳密にいえば $\cos x$ が $x=0$ で連続であることを用いている[2] .) ここで, それらがどのように示されるのかをいくつか例示しよう.

例 5.1. n 次多項式関数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ は連続である.

証明 定数関数 $y=c$ および 1 次関数 $y=x$ は連続である. よって, 定理 5.1 (1), (2) を用いて, 上の n 次多項式関数は連続となる. □

問 5.1. 有理関数 $\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ は, 分母が 0 と異なるすべての点で連続となるか.

例 5.2. 指数関数 $y=a^x$ $(a>0)$ は連続である.



$y=a^x$ のグラフ

証明 まず, $\lim_{h\to 0} a^h=1$ を示すために 3 つの場合分けをする.

(i) $a=1$ のとき : 明らか.

(ii) $a>1$ のとき : 十分に 0 に近い h に対して, $-\dfrac{1}{n}<h<\dfrac{1}{n}$ となる最大の自然数 n をとると, 上の図から $a^{-\frac{1}{n}}<a^h<a^{\frac{1}{n}}$ となる. 例 1.2 より, $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$ だから, $h\to 0 \Leftrightarrow n\to\infty$ に注意すれば, 定理 1.1 (3), (4) より

$$1=\frac{1}{\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} \leqq \lim_{h\to 0} a^h \leqq \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1.$$

---

[2]もっとも, この証明の方法自体厳密にいえば, 円の面積とは何物であるかという反省なしには受け入れ難いものである. もう少し論理的整合性を重視して証明しようとすれば, 定理 4.3 の図で $\sin x$, 弧 AB および線分 AC の長さを比較するほうがよい. しかし本書では論理的整合性よりも直感的な理解を重視した.

(iii) $0 < a < 1$ のとき： $b = \dfrac{1}{a}$ とおくと, $b > 1$ となる. そこで, (ii) の場合と定理 4.1 (3) より,

$$\lim_{h\to 0} a^h = \lim_{h\to 0} \frac{1}{b^h} = \frac{1}{\lim_{h\to 0} b^h} = 1$$

以上から $\lim_{h\to 0} a^h = 1$ が示された. ここで, 任意の点 x に対して, 定理 4.1 (2) より,

$$\lim_{h\to 0} a^{x+h} = \lim_{h\to 0} a^x a^h = a^x \lim_{h\to 0} a^h = a^x. \quad \square$$

例 5.3.　三角関数 $y = \sin x$ は連続である.

証明　補題 4.2 より, $|h| < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $|\sin h| = \sin|h| < |h|$. そこで定理 4.1 (5) より, $\lim_{h\to 0} |\sin h| = 0$ となる. さらに問 4.2 より, $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$ を得る. また, $h \to 0$ のとき $\dfrac{h}{2} \to 0$ だから, 定理 4.1 (1), (2) より

$$\lim_{h\to 0} \cos h = \lim_{h\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}\right) = 1 - 2\left(\lim_{\frac{h}{2}\to 0} \sin \frac{h}{2}\right)^2 = 1.$$

ここで, 任意の x に対して, $\sin x$ の加法定理, 定理 4.1 (1), (2) および上のことから,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \sin(x+h) &= \lim_{h\to 0}(\sin x \cos h + \cos x \sin h) \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \cos h + \cos x \lim_{h\to 0} \sin h \\ &= \sin x. \quad \square\end{aligned}$$

以下, 連続関数に関する他の基本的な定理をいくつか述べる.

定理 5.2. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続, 関数 $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続ならば, 合成関数 $z = (g \circ f)(x)$ は $x = a$ で連続となる. それゆえ, 連続関数の合成関数は連続となる.

証明　$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ かつ $\lim_{y\to f(a)} g(y) = g(f(a))$ だから,

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to f(a)} g(y) = (g \circ f)(a). \quad \square$$

注 5.1.　このとき, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ が成り立つことに注意.

例 5.4.　三角関数 $y = \cos x$ は連続である.

証明　$y = x + \dfrac{\pi}{2}$ は連続だから, 例 5.3 と定理 5.2 より, $\cos x = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$ も連続. $\square$

定理 5.3 (中間値の定理) . 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して,

$$f(c) = k, \quad a < c < b$$

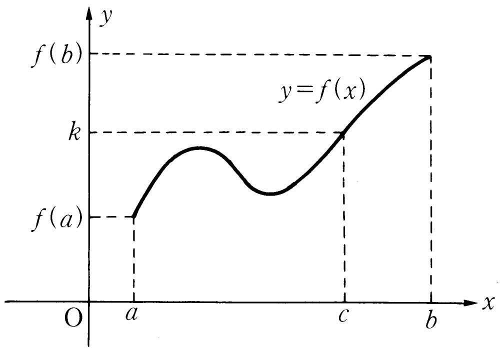
となる c が存在する.

例 5.5. 方程式 $x - \cos x = 0$ は開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において解をもつ.

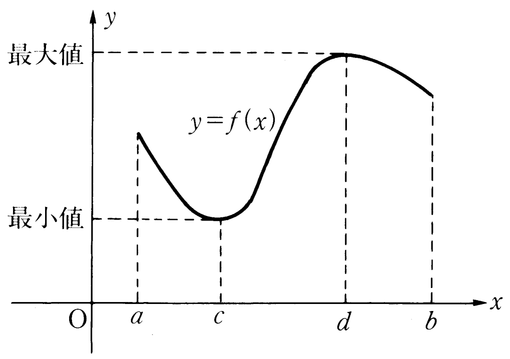
証明 $f(x) = x - \cos x$ とおく. $f(x)$ は連続関数であり, $f(0) = -1, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ であるから, 中間値の定理において $k = 0$ とみなせば, $f(c) = 0$ かつ $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$ となる方程式 $f(x) = 0$ の実数解 c が存在する. □

問 5.2. 3次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ は相異なる3つの実数解をもつことを示せ.

定理 5.4 (最大値・最小値の定理). 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば, この閉区間で最大値および最小値をとる. すなわち, $a \leqq x \leqq b$ ならば $f(c) \leqq f(x) \leqq f(d)$ を満たす点 c, d が $[a, b]$ 内に存在する.



中間値の定理



関数の最大値と最小値

問 5.3. 閉区間 $[0, 1]$ において, 最大値も最小値ももたない関数の例をあげよ.

6 関数列とベキ級数

無限個の関数の列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ を**関数列**といい, $\{f_n(x)\}$ または $\{f_n\}$ で表す. すべての x に対して, 数列 $\{f_n(x)\}$ の極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき, 関数列 $\{f_n(x)\}$ または $\{f_n\}$ は**収束する**という. 各 x について, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ とおいてできる新しい関数 $f(x)$ を関数列 $\{f_n(x)\}$ または $\{f_n\}$ の**極限関数**という.

一般には, 連続関数による収束する関数列の極限関数は, 必ずしも連続になるとは限らない. 区間上で定義された収束する関数列 $\{f_n(x)\}$ が極限関数 $f(x)$ に一様収束するとき, その極限関数 $f(x)$ は連続関数となる. しかし, ここでは一様収束性の概念には触れないでおく.

問 6.1. 各自然数 n に対して, $f_n(x) = x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおくとき, その関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限関数を求めよ.

関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して, その有限和による関数

$$g_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

はつねに定義できる. その関数列の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

は, すべての x について

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

の値が存在するとき, この新しい関数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ として定義される. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は**収束する**という. そうでないとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は**発散する**という.

関数列の級数で

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

の形のものを**ベキ級数**という. 特に簡単にするため, $c=0$ の場合

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を考える.

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x=0$ だけで収束するとき, $R=0$ とおき, すべての x において収束するとき, $R=\infty$ とおく. これらの場合を除くと, ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x|<R$ となるすべての x に対して収束し, $|x|>R$ となるすべての x に対して発散するような数 R $(0<R<\infty)$ が存在することが証明される. このとき, R をベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の**収束半径**という.

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R を求めるためには, 次の定理がある.

定理 6.1. ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R について, 次が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が存在すれば, $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ となる.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$ が存在すれば, $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ となる.

問 6.2. 次のベキ級数の収束半径を求めよ．

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}x^n \qquad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$$

7　逆関数

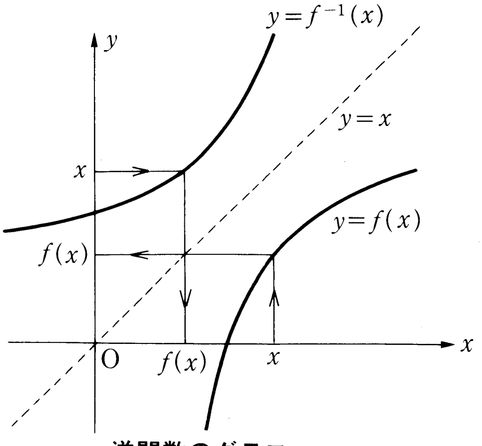
関数 $f(x)$ の定義域を D とする．任意の $x, x' \in D$ に対して，「$x < x'$ ならば $f(x) < f(x')$」となるとき，$f(x)$ は**狭義の単調増加関数**といい，「$x < x'$ ならば $f(x) > f(x')$」となるとき，$f(x)$ は**狭義の単調減少関数**という．これらを総称して，**狭義の単調関数**という．

注 7.1. 「$x < x'$ ならば $f(x) \leqq f(x')$ $(f(x) \geqq f(x'))$」となるとき，$f(x)$ は広義の単調増加 (減少) 関数という．

狭義の単調関数 $f(x)$ をその定義域から実数への写像とみれば，単射であるので，その値域を定義域とする，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ をもつ．

定理 7.1 (逆関数の存在)． 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で狭義の単調増加 (減少) 関数ならば，その逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は閉区間 $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$ で連続であり狭義の単調増加 (減少) となる．

定理 7.1 では $y = f(x)$ の逆関数は，x と y を入れ替えて y について解いた式を求めればよい．通常，この関数を $y = f^{-1}(x)$ と書き $f(x)$ の**逆関数**という．このとき，x の変域は，もとの関数の値域であるので注意すること．



逆関数のグラフ

注 7.2. $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，$y = x$ に対して対称となる．

例 7.1. 次の関数の逆関数を求めよ．

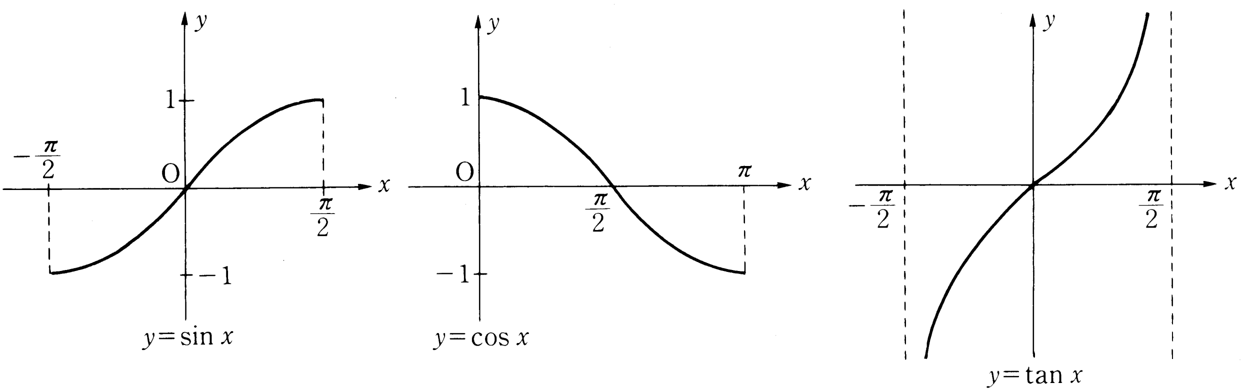
(1) $y = \sqrt{x-1} + 2$　　(2) $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{x-4}$

解 (1) $x = \sqrt{y-1} + 2$ より $y = (x-2)^2 + 1$ ただし $x \geqq 2$.

(2) $x = \frac{1}{2}y + \sqrt{y-4}$ より $y = 2x + 2 \pm \sqrt{8x-12}$. ここで，もとの関数は $4 \to 2$ であるので，求める逆関数は $2 \to 4$ であるので，代入して $y = 2x + 2 - \sqrt{8x-12}$ が求める逆関数である．ただし，$x \geqq 2$.

例 7.2. 指数関数 $y = a^x$ $(a > 1)$ は, 連続で狭義の単調増加関数である (例 5.2 の図を参照). そこで, 定理 7.1 からその逆関数が存在するが, それは対数関数 $y = \log_a x$ であり, 連続で狭義の単調増加関数となる.

三角関数は狭義の単調関数ではないので, 一般にその逆関数は存在しない. そこで, その定義域を狭義の単調関数となるように制限する. $y = \sin x$ は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で狭義の単調増加, $y = \cos x$ は $[0, \pi]$ で狭義の単調減少, $y = \tan x$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ で狭義の単調増加となる.



制限された三角関数のグラフ

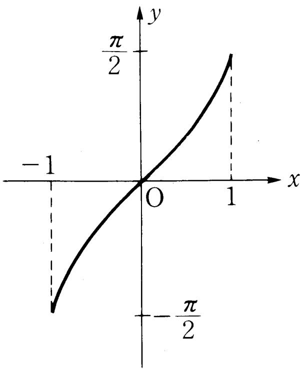
上記のように定義域を制限された三角関数は, 定理 7.1 より逆関数をもつ. これらの逆関数をそれぞれ

$$y = \sin^{-1} x, \qquad y = \cos^{-1} x, \qquad y = \tan^{-1} x$$

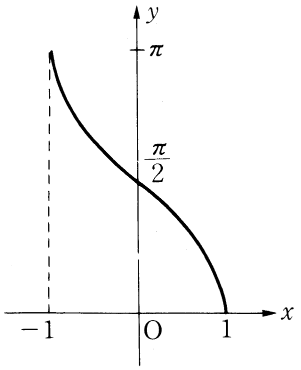
で表し, **逆三角関数**という. すなわち,

$$\begin{aligned} y = \sin^{-1} x &\iff x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} \\ y = \cos^{-1} x &\iff x = \cos y, \quad 0 \leqq y \leqq \pi \\ y = \tan^{-1} x &\iff x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

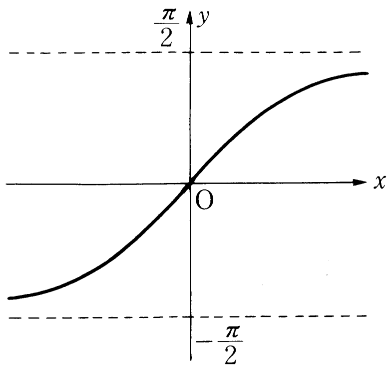
により逆三角関数は定義される.



$y=\sin^{-1}x$



$y=\cos^{-1}x$



$y=\tan^{-1}x$

逆三角関数のグラフ

注 7.3. 逆三角関数 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ はそれぞれアークサイン, アークコサイン, アークタンジェントと読む. また, それらはそれぞれ $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ の形で表されることもある. すでに述べたように, 制限された三角関数のグラフと逆三角関数のグラフは, $y=x$ に関してそれぞれ対称になっている (注 7.2 参照).

例 7.3. $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ の値を求めよ.

解 $y=\sin^{-1}\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin y=\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より, $y=\dfrac{\pi}{6}$. ゆえに, $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$. □

例 7.4. $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ の値を求めよ.

解 $y=\cos^{-1}\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \cos y=\dfrac{3}{5}$, $0 \leqq y \leqq \pi$ であるから, $\sin y \geqq 0$ より,

$$与式=\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5} \quad \square$$

例 7.5. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ を証明せよ.

証明 $y_1=\sin^{-1}x$, $y_2=\cos^{-1}x$ とおく. 定義より,

$$x=\sin y_1,\ -\frac{\pi}{2} \leqq y_1 \leqq \frac{\pi}{2} \quad かつ \quad x=\cos y_2,\ 0 \leqq y_2 \leqq \pi.$$

よって, $x=\sin y_1=\cos y_2=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y_2\right)$. さらに, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}-y_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから, $y_1=\dfrac{\pi}{2}-y_2$ となる. ゆえに, 与式 $=y_1+y_2=\dfrac{\pi}{2}$ を得る. □

例 7.6. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ (ただし, $xy \leqq 0$) を証明せよ.

証明 $x \geqq 0$, $y \leqq 0$ として一般性を失わない. $u=\tan^{-1}x$, $v=\tan^{-1}y$ とおくと, $x=\tan u$, $y=\tan v$ であり, $0 \leqq u<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<v \leqq 0$ である. 加法定理より,

$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}=\frac{x+y}{1-xy}$$

である. ここで, $-\dfrac{\pi}{2}<u+v<\dfrac{\pi}{2}$ に注意すれば

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=u+v=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} \quad \square$$

問 7.1. $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と $\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の値を求めよ.

問 7.2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$ の値を求めよ.

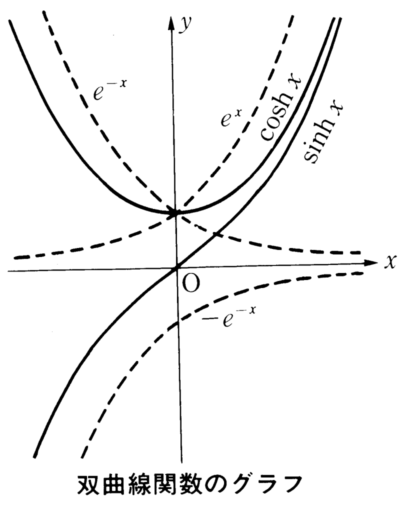
問 7.3. 次の値を求めよ.

(1) $\sin^{-1}\dfrac{4}{5}+\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ (2) $\tan^{-1}2+\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

次のように定義される関数を総称して, **双曲線関数**とよばれる.

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

注 7.4. 上記の双曲線関数 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ はそれぞれハイパボリック・サイン, ハイパボリック・コサイン, ハイパボリック・タンジェントと読む.



双曲線関数のグラフ

$y=\sinh x$, $y=\tanh x$ は, 実数直線上で定義された狭義の単調関数だから, 定理 7.1 より逆関数が存在する. その逆関数をそれぞれ $y=\sinh^{-1}x$, $y=\tanh^{-1}x$ で表す. $y=\cosh x$ は定義域を $[0,\infty)$ に制限すれば狭義の単調関数となり, この区間で逆関数 $y=\cosh^{-1}x$ が存在する.

$y=\sinh^{-1}x$, $y=\cosh^{-1}x$, $y=\tanh^{-1}x$ は総称して**逆双曲線関数**とよばれる.

問 7.4. 次のことを示せ.

(1) $\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ $(-\infty<x<\infty)$

(2) $\cosh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x\geqq 1)$

(3) $\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1<x<1)$

第 1 章　練習問題

1. 次の数列の極限値を求めよ.

(1) $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$　(2) $\left\{\dfrac{1-3n}{2n-1}\right\}$　(3) $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$

(4) $\left\{\dfrac{\sqrt{n}+2}{n+4}\right\}$　(5) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$　(6) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right\}$

(7) $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$　(8) $\left\{\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)\right\}$　(9) $\{(1+2^n)^{\frac{1}{n}}\}$

(10) $\left\{\dfrac{2^n+1}{3^n-1}\right\}$　(11) $\left\{\dfrac{2\cdot 3^n+3}{3^n+2^n}\right\}$　(12) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}$

(13) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}\right\}$　(14) $\left\{\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^n}\right\}$　(15) $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$ $(a>0)$

2. 次の級数の収束・発散を判定せよ.

(1) $\sum 2\cdot 3^{n-1}$　(2) $\sum 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　(3) $\sum\dfrac{1}{n^2+3n+2}$　(4) $\sum\dfrac{2n-1}{3n+1}$

(5) $\sum\dfrac{n^n}{n!}$　(6) $\sum\dfrac{n^p}{n!}$, $(p>0)$　(7) $\sum\dfrac{1}{\{\log(n+1)\}^n}$　(8) $\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$

(9) $\sum\dfrac{n}{2^n}$　(10) $\sum\dfrac{n!}{2^n}$　(11) $\sum\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$　(12) $\sum\dfrac{1}{n^3}$

3. 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{4x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin 2x}{2x+\sin x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x}$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$　(14) $\displaystyle\lim_{x\to -2+0}([x^2]-[x]^2)$　(15) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$　$(a>0)$

4. 関数 $f(x)$ が連続ならば, $|f(x)|$ も連続となることを示せ.

5. 関数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

は連続であることを示せ.

6. 方程式 $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ は, 開区間 $(0,1)$ において実数解をもつことを示せ.

7. 次のベキ級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n}x^n$

8. $y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{x+1}$ の逆関数を求めよ.

9. 次の値を求めよ.

(1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\sin^{-1}\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$　(3) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{-1}{2}\right)$　(5) $\tan\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(6) $\sin\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(7) $\sin\left(2\cos^{-1}\dfrac{1}{5}\right)$　(8) $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{3}+\sin^{-1}\dfrac{7}{9}\right)$　(9) $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

(10) $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$　(11) $\sin^{-1}\dfrac{7}{25}+\sin^{-1}\dfrac{24}{25}$　(12) $\tan\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{12}{13}\right)$

(13) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$　(14) $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3}\right)$　(15) $\sin^{-1}\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}\right)$

10. 次の式を証明せよ.

(1) $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\cos^{-1}x & (0\leqq x\leqq 1)\\ \pi-\cos^{-1}x & (-1\leqq x\leqq 0)\end{cases}$

第2章

微分法

1　微分係数と導関数

関数 $f(x)$ は $x = a$ を含むある開区間で定義されているとする[1]．極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が有限確定値をとるとき，この関数は $x = a$ で**微分可能**であるといい，この値を a における**微分係数** とよび $f'(a)$ で表す．

微分係数 $f'(a)$ は，幾何的には $y = f(x)$ で表される曲線の $(a, f(a))$ における接線の傾きを意味する．すなわち，この点における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

で与えられる．これらについては，多くの読者はすでに高等学校で学んだことであろう．以下，微分係数についていくつかの注意を述べる．

上の微分係数の定義式を $a + h = x$ とおいて，a と x との式に書き直せば，$h \to 0$ と $x \to a$ とは同じことであるから，それは

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

と書き表される．

注 1.1. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば，この点で $f(x)$ は連続である．

実際 $x \to a$ のとき $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が有限確定値をもち，しかも，$x - a \to 0$ である．したがって，$\lim\limits_{x \to a}\{f(x) - f(a)\} = 0$．これは $f(x)$ が $x = a$ で連続であることを意味する．□

[1] もちろん，その区間よりも，広いところで定義されていても差し支えない．微分可能性は a のごく近くでの $f(x)$ の振舞いで定まるものであるから，このような述べ方をするのである．

注 1.2. 微分係数の定義式で $h \to 0$ は, h が 0 にどのような近づき方をしても, という意味を含んでいる. したがって, 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば, もちろん

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

も同じ有限確定値をもつ (その値は $f'(a)$). しかし逆に上の式が有限確定値をもっても

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が有限確定値をもたないか, 上の二式が異なる値を持つ場合も存在し, そのとき関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能ではない.

問 1.1. $f(x) = |x|$, $a = 0$ として上の注 1.2 を確かめよ.

注 1.2 の式が有限確定値をとるとき, $x = a$ で **右微分可能** といい, その値を **右微分係数** とよび $f'_+(a)$ で表す. 同様にして, **左微分可能性**および**左微分係数** $f'_-(a)$ を定義する.

明らかに $x = a$ における右微分係数 $f'_+(a)$ および左微分係数 $f'_-(a)$ が存在してそれらが一致すれば, その関数 $f(x)$ は a において微分可能で $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$ である.

関数 $f(x)$ がその定義域の各点で微分可能であるとき, 各点 x に対して, その点での微分係数 $f'(x)$ を対応させることにより, 新たな関数を得る. これを $f(x)$ の **導関数** とよび, $f'(x)$ あるいは $\dfrac{df}{dx}(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$ 等の記号で表す. また, $y = f(x)$ とおいたときには $\dfrac{dy}{dx}$ と表す[2] こともある. また, 電気などの書物では $\dot{y}$ という表し方[3] をしているものもあるが, 本書では用いない.

微分係数や導関数を求めることを微分するという.

2　微分の計算 1

この節の内容は多くの読者にとっては既知の事実であろう. そのような読者はこの節をとばして読み進み, 公式の確認の必要が生じたときに立ち返ればよい.

定理 2.1 (導関数の線形性) . $f(x)$, $g(x)$ がともに同じ区間で微分可能であるとき, スカラー α, β に対して, 関数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も同じ区間で微分可能であり

$$\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

となる.

証明　左辺を定義どおり書いてみれば第 1 章定理 1. 1 より明らか. □

[2]ライプニッツによる記号
[3]ニュートンによる記号

多項式関数の導関数　多項式で表示される関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \ \ (a_0, \ldots, a_n \text{は定数})$$

について，この導関数を知るためには定理 2.1 より x^m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ の導関数を知ればよい．したがって，

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

の値を求めればよい．恒等式

$$X^m - Y^m = (X - Y)(X^{m-1} + X^{m-2}Y + \cdots + Y^{m-1})$$

に注意すれば

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \cdots + x^{m-1}\right\} = mx^{m-1}. \quad \square$$

以上まとめると，

定理 2.2. 多項式関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-i}x^{n-i} + \cdots + a_0$$

の導関数は

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + (n-i)a_{n-i}x^{n-i-1} + \cdots + a_1$$

である．

積および商の微分の公式　次に関数の積および商の微分の公式を述べよう．

定理 2.3 (積の微分)．2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに同じ区間で微分可能であればそれらの積 $f(x)g(x)$ もその区間で微分可能であり

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
=\ &\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
=\ &\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
=\ &f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

であるから $f(x)g(x)$ は微分可能で $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が成り立つ. □

関数の商の微分の公式を得るために, まず次の補題を示そう.

補題 2.4. 関数 $f(x)$ がある区間で微分可能で, $f(x) \neq 0$ であれば, $\dfrac{1}{f(x)}$ も微分可能で

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

が成り立つ.

証明

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} &= \lim_{h\to 0} \left\{ -\frac{f(x+h) - f(x)}{hf(x+h)f(x)} \right\} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x+h)f(x)}
\end{aligned}$$

であるから $\dfrac{1}{f(x)}$ は微分可能で, その導関数は $-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$ である. □

定理 2.5 (商の微分) . $f(x)$, $g(x)$ が微分可能で $g(x) \neq 0$ とする. このとき $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

が成り立つ.

証明　補題 2.4 より $\dfrac{1}{g(x)}$ は微分可能. したがって定理 2.3 より $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

有理式の微分については, 次の例のように, 直接上の定理を使うよりも, 割り算を先に実行してから, 導関数を計算した方が簡単である場合も多い.

例 2.1. $\dfrac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}{x+1}$ の導関数を求めよ.

解　$\dfrac{x^4+2x^3+x^2+1}{x+1} = x^3+x^2+\dfrac{1}{x+1}$ であるから,

$$\left(\frac{x^4+2x^3+x^2+1}{x+1}\right)' = 3x^2+2x-\frac{1}{(x+1)^2}. \ \square$$

問 2.1. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{x+2}{x^2+1}$　　(2) $\dfrac{(x^2-3)(x+1)}{x+2}$　　(3) $\dfrac{2x}{x^3+x+2}$

合成関数の微分　次に関数の合成について微分がどう振舞うかを調べる.

定理 2.6. $y=f(u)$, $u=g(x)$ はともに微分可能な関数で $g(x)$ の値域は $f(u)$ の定義域に含まれているとする. このとき, 合成関数 $f(g(x))$ も微分可能で

$$\{f(g(x))\}' = f'(u)g'(x)$$

が成立する.

注 2.1. $u=g(x)$, $y=f(u)$ とおいて 定理 2.6 の式をライプニッツ流の記法で表せば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

となる. これは, あたかも分数を約分したような形になっているので記憶しやすいと思う.

定理 2.6 の証明　まず理解の手助けのため, 論理的には欠陥があるが, わかりやすい "証明" を (1) で与え, その後 (2) において正しい証明を行う.

(1)　$\dfrac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$ で $h\to 0$ のときの極限を知りたいのであるが, $k=g(x+h)-g(x)$ とおくと

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \frac{f(u+k)-f(u)}{k}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

また $h\to 0$ のとき, $k\to 0$ である (なぜか？理由を考えよ) ので $\{f(g(x))\}' = f'(u)g'(x)$ を得る.

(2)　上の証明で $h\neq 0$ であっても $k=0$ となる可能性がある. このとき上の式は意味を失ってしまう. このようなトラブルを避けるため以下のように証明する. x を固定して

$$\varepsilon(h) = \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x)$$

と定めると $h\to 0$ のとき, $\varepsilon(h)\to 0$ であり $g(x+h)=g(x)+hg'(x)+h\varepsilon(h)$. 同様にして

$$\delta(k) = \begin{cases} \dfrac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) & (k\neq 0) \\ 0 & (k=0) \end{cases}$$

とすると, k が 0 であってもなくても

$$f(u+k)-f(u)=kf'(u)+k\delta(k)$$

である．また $k\to 0$ のとき微分可能であるから $\delta(k)\to 0$. さて,

$$f(g(x+h))-f(g(x))=f(u+hg'(x)+h\varepsilon(h))-f(u)$$

であるが, ここで $k=hg'(x)+h\varepsilon(h)$ とおけば

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) &- f(g(x))=f(u+k)-f(u) \\ &= kf'(u)+k\delta(k)=\{hg'(x)+h\varepsilon(h)\}f'(u)+\{hg'(x)+h\varepsilon(h)\}\delta(k) \end{aligned}$$

であり, $h\to 0$ のとき k のおき方から $k\to 0$ である．したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} &= \lim_{h\to 0}\left[\{g'(x)+\varepsilon(h)\}f'(u)+\{g'(x)+\varepsilon(h)\}\delta(k)\right] \\ &= g'(x)f'(u). \quad \square \end{aligned}$$

Point: 微分をするとき, ほとんどが合成関数の微分の公式を使うので, しっかりと覚えよう！そして, 与えられた関数を自分で合成関数としてとらえることができるように練習を繰り返そう．

問 2.2. 次の関数の導関数を求めよ．
(1)　$(x^2+1)^8$　　　　(2)　$(x^4+x^2)^5+(x^8+1)^4$

三角関数の微分　　まず $\sin x$ の導関数を求めよう．差分商 $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ の $h\to 0$ としたときの極限を調べればよい．

3 角関数の和 (差) を積で表示する公式を思い起こそう:

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

これによって,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \\ &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x \quad (\text{第 1 章, 定理 4.3}) \end{aligned}$$

となる．また $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ に注意して定理 2.6 を用いれば $\cos x$ の導関数が求まり, $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ に注意して定理 2.5 を用いれば $\tan x$ の導関数が得られる．よって次の公式を得る．

定理 2.7. (1) $(\sin x)' = \cos x$　(2) $(\cos x)' = -\sin x$　(3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

問 2.3. 定理 2.7 の公式 (2), (3) を証明せよ.

問 2.4. 次の関数の導関数を求めよ.
(1) $\sin(\cos x)$　(2) $\sin x^2$　(3) $\sin^2 x$

3 微分の計算 2

この節では, まず逆関数の微分法について説明し, その後指数関数, 対数関数および逆三角関数などの導関数を調べる.

定理 3.1 (逆関数の微分). ある区間で定義された狭義の単調関数 $f(x)$ が連続で（したがって第 1 章, 定理 7.1 より逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する）, $x = a$ において微分可能, しかも $f'(a) \neq 0$ ならば, $f^{-1}(x)$ は $f(a)$ において微分可能で

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

である.

注 3.1. $y = f(x)$ とおけば, 逆関数の定義により $x = f^{-1}(y)$ であり, この書き方の下でライプニッツ流の記号で表せば

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

と書け, 注 2.1 の式同様記憶しやすい形である.

証明　$b = f(a)$ とおこう. さらに, $f^{-1}(b+h) = a + k$ と書くとき, f^{-1} は連続であるから (第 1 章, 定理 7.1), $h \to 0$ のとき $k \to 0$ となる. また狭義の単調性より, $h \neq 0$ である限り $k \neq 0$ である. よって,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a + k - f^{-1}(b)}{f(a+k) - b} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)} \\
&= \frac{1}{f'(a)}
\end{aligned}$$

を得る. □

指数関数と対数関数の微分　$a > 0$, $a \neq 1$ として, 指数関数 $f(x) = a^x$ を考える. これは $a > 1$ ならば狭義の単調増加関数, $1 > a > 0$ ならば狭義の単調減少関数であるので, 第

1章, 定理 7.1 により, $(0,\infty)$ で定義された逆関数をもつ. これが a を底とする対数関数 $\log_a x$ にほかならない. e を自然対数の底 (第1章, 例 1.3) とするとき, $\log_e x$ は $\log x$ と略記される. また, 工学系の書物では, これを $\ln x$ と書き表すことも多い.

さて指数関数 a^x の導関数を調べよう. $a^x = e^{x\log a}$ であるから e^x の導関数を知れば, 定理 2.6 により a^x の導関数も求まる. $\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\dfrac{e^h-1}{h}$ であるから $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ の値がわかればよい.

補題 3.2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$

証明 まず, $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を示す. $h>0$ ならば $e^h>1$ であるから, $e^h = 1+\dfrac{1}{t}$ $(t>0)$ とおくことができる. 指数関数の連続性より, $h\to +0$ のとき $t\to +\infty$ である. $h = \log\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$ より

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{\frac{1}{t}}{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}$$

となり, $\log x$ の連続性と第1章, 例 4.3 より

$$\lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log e = 1\,.$$

したがって $\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h} = 1\,.$

$h<0$ のときは, $-h=k$ とおくと

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{e^{-k}(1-e^k)}{-k} = \frac{e^k-1}{k}\frac{1}{e^k}$$

であるから, 前半で示したことを用いて,

$$\lim_{h\to -0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{k\to +0}\frac{e^k-1}{k}\frac{1}{e^k} = 1$$

をえる. したがって, 1節の最後に述べたことより $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を得る. □

定理 3.3 (指数関数および対数関数の導関数) . e を自然対数の底, a を 1 以外の正の実数とするとき

(1) $(e^x)' = e^x$

(2) $(a^x)' = a^x\log a$

(3) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{\log a}\dfrac{1}{x}$.

証明　(1)　上に述べたことで証明はすんでいる.
(2)　$(a^x)' = \left(e^{x\log a}\right)' = \log a \left(e^{x\log a}\right) = a^x \log a$.
(3)　$y = \log x$ とおこう. このとき, $x = e^y$ であるから, 注 3.1 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} .$$

(4)　対数の底の変換公式 $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ と上の (3) より明らか. □

例 3.1 (対数微分法) . x^x $(x > 0)$ の導関数を求めよ.

解　$y = x^x$ とおいて, 両辺の対数をとり

$$\log y = x \log x ,$$

この両辺を x で微分すると,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1 .$$

したがって,

$$\frac{dy}{dx} = (\log x + 1)y = (\log x + 1)x^x . \ \square$$

問 3.1. $x^{\sin x}$ $(x > 0)$ の導関数を求めよ.

逆三角関数の微分　次に, 逆三角関数の導関数について調べる.
第1章7節で述べたように,

$$y = \sin^{-1} x \Longleftrightarrow x = \sin y , \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

である. $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$ は $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ で決して 0 とはならないので, 定理 3.1 によって, $-1 < x < 1$ で微分可能. よって, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\cos y}$ である. $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ では $\cos y > 0$ であるから, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ である. よって, $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ を得る.

次に $y = \tan^{-1} x$ について考えよう.

$$y = \tan^{-1} x \Longleftrightarrow x = \tan y , \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

であり，$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ は，この区間で決して 0 にならない．したがって $y = \tan^{-1} x$ はすべての実数 x において，微分可能で

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \cos^2 y \\ &= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}\ .\end{aligned}$$

定理 3.4. (1)　$\sin^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で，その導関数は $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

(2)　$\cos^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で，その導関数は $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$．

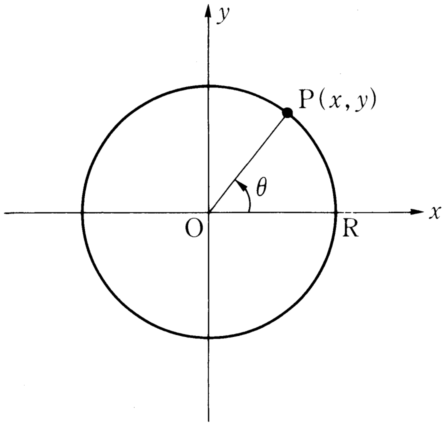
(3)　$\tan^{-1} x$ はすべての実数において微分可能で，その導関数は $\dfrac{1}{1+x^2}$．

証明　(1), (3) は既に示しているので，(2) のみを示す．$y = \cos^{-1} x \Longleftrightarrow x = \cos y$，$0 \leqq y \leqq \pi$ であり $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y$．これが 0 にならないのは，$0 < y < \pi$ のとき．したがって，$\cos^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能であり，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = -\dfrac{1}{\sin y}$．$0 < y < \pi$ では $\sin y > 0$ だから $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$．よって，$(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

(2) の別証明　第 1 章，例 7.5 より $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$，しかも $\sin^{-1} x$ は $-1 < x < 1$ で微分可能で $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だから $\cos^{-1} x$ も同じ区間で微分可能で $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

問 3.2. $\sin^{-1}(\sin x)$ の導関数を求めよ．($\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数だから，どんな x についても $\sin^{-1}(\sin x) = x$ とはやとちりしてはいけない．$\sin x$ の逆関数を考えたとき，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で考えていた．)

媒介変数表示　媒介変数表示の例として円 $x^2+y^2=1$ をとりあげよう.

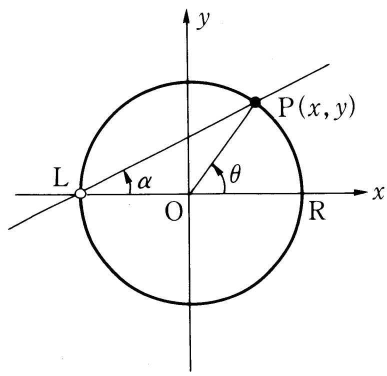


(1°)　これを, 図のように OR と OP とのなす角 θ を媒介変数として表せば

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi) \end{cases}$$

なる表示を得る.

(2°)　次に, $\mathrm{L}(-1,0)$ を固定して, 直線 LP の傾き t $(-\infty < t < \infty)$ を媒介変数として x, y を表示すれば



$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \quad (-\infty < t < \infty) \end{cases}$$

を得る.

問 3.3. (2°) の主張を証明せよ.

次に (1°) における媒介変数表示と (2°) のそれとを比較しよう. $t=\tan\alpha$ であり, 初等幾何の "円の弦に対する円周角は, 中心角の半分" という事実に注意すれば $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$. したがって, 次の補題を得る.

補題 3.5. $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおけば,

$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

である.

この補題は三角関数の不定積分を計算する際に有用である.

媒介変数で表示された関数の微分法

定理 3.6. ある区間で微分可能な 2 つの関数

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

が与えられ, $f(t)$ は狭義の単調関数で, $f'(t) \neq 0$ とする. このとき y を x の関数とみて, 微分可能であり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

である.

注 3.2. これも

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

と書き表せば記憶しやすい.

証明 定理 3.1 より, $t = f^{-1}(x)$ は微分可能であり, $\dfrac{d(f^{-1})}{dx} = \dfrac{1}{f'(t)}$. したがって, 定理 2.6 より,

$$\frac{dy}{dx} = \left\{g(f^{-1}(x))\right\}' = g'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \square$$

Point: $y = f(x)$ と表示できない関数でも接線の方程式を求めることができる.

例 3.3. 媒介変数表示の項の (2°) で述べた例について, 定理 3.6 の適用の可否を調べよ.

解 まず, $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ の増減の様子を調べよう (後出 7 節を参照).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

であるから, $t > 0$ では狭義の単調減少, $t < 0$ では狭義の単調増加. よって, $t > 0$ と $t < 0$ とに分けて, 定理 3.6 を適用できる. さらに,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

である. したがって, $t \neq 0$ で, y は x の関数として微分可能であり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

である. □

4 高次導関数

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が再び導関数をもつとき, これを $f(x)$ の 2 **次導関数** とよび, $f''(x)$ で表す. 以下, 帰納的に $f(x)$ の n **次導関数** $f^{(n)}(x)$ を定義する. これらを総称して, **高次導関数** とよぶ.

高次導関数について, いくつか注意を述べる. $f(x)$ が少なくとも n 次導関数までもつとき, $f(x)$ は n **回微分可能** であるという. 便宜上 $f(x)$ の 0 次導関数 $f^{(0)}$ とは, $f(x)$ 自身のことと規約する. また $\dfrac{dy}{dx}$ なる導関数の記法に対応しては, n 次導関数を $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ で表す.

例 4.1. $f(x) = \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

解 $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f^{(0)}(x)$ であるから,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n \text{ が } 4k \text{ の形}) \\ \cos x & (n \text{ が } 4k+1 \text{ の形}) \\ -\sin x & (n \text{ が } 4k+2 \text{ の形}) \\ -\cos x & (n \text{ が } 4k+3 \text{ の形}) . \end{cases}$$

この答えを 1 行で書き表すとすれば, $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $-\sin x = \sin(x+\pi)$ であることに注意すれば,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

と表せる. □

問 4.1. (1) x^3 の 3 次導関数を求めよ.
(2) $x^3 + 2x$ の 100 次導関数を求めよ.
(3) $x^{13} + x^4 + 1$ の 13 次導関数を求めよ.

高次導関数については次のライプニッツの定理が基本的である.

定理 4.1 (ライプニッツの公式) . $f(x)$, $g(x)$ がともに, ある開区間で n 回微分可能とする. このとき, $f(x)g(x)$ も n 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

が成り立つ. ただし, ${}_nC_k$ は 2 項係数を表す.

2 項係数の性質 定理 4.1 の証明に必要な 2 項係数の性質について述べる. 2 項係数とは,

$${}_nC_k := n \text{ 個のものから } k \text{ 個取り出す組合せの数} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

で定義される自然数である．(ただし，${}_nC_0 = 1$ と規約する.) したがって，n 個の文字 $x_1, \cdots, x_n$ に関する多項式

$$(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_n+1)$$

を展開すると $x_1, \cdots, x_n$ について k 次の項は，ちょうど ${}_nC_k$ 個ある．よって，$x_1 = \cdots = x_n = x$ とおくと，

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k \,.$$

この公式は2項定理とよばれる．(この公式の一般化を次の節で述べる．) これが2項係数という名の由来である．

補題 4.2. ${}_nC_k + {}_nC_{k-1} = {}_{n+1}C_k$

証明　定義式から簡単な計算で示せるが，以下のように考えれば，計算する必要はない．

$n+1$ 個のもの $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ から k 個取り出すとり出し方を数えるのに (1°) a_0 を含むとり出し方; (2°) a_0 を含まないとり出し方，に分けて考える．(1°) に属するとり出し方の数は，$\{a_1, \cdots, a_n\}$ から $k-1$ 個取り出すとり出し方の数と同じだから ${}_nC_{k-1}$ 個であり，(2°) に属するとり出し方の数は $\{a_1, \cdots, a_n\}$ から k 個取り出すとり出し方の数 ${}_nC_k$ に等しい．したがって，${}_nC_k + {}_nC_{k-1} = {}_{n+1}C_k$ を得る．□

定理 4.1 の証明　n についての帰納法で証明する．$n=1$ のときは，積の導関数の公式に他ならない．次に n について定理の主張が正しいとしよう．このとき，$n+1$ について，定理の主張が正しいことを示す．すなわち，$f(x)$, $g(x)$ がともに $n+1$ 回微分可能であるとき，

$$\{f(x)g(x)\}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k\, f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

となることを示す．

$n+1$ 回微分可能ならば，当然 n 回微分可能であるから，$f(x)$, $g(x)$ についての帰納法の仮定が適用できて，$f(x)g(x)$ は n 回微分可能で，

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

が成立している．ここで右辺の各項をみると $f^{(n-k)}(x)$, $g^{(k)}(x)$ は，それぞれさらに1回は微分できるから，定理 2.3 によって，$f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ は微分可能で，

$$\{f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\}' = f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\,.$$

したがって，$\{f(x)g(x)\}^{(n)}$ は微分可能，すなわち，$f(x)g(x)$ は $n+1$ 回微分可能で，

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}^{(n+1)} &= \left\{(f(x)g(x))^{(n)}\right\}' \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left\{f^{(n-k+1)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right\} \\
&= {}_nC_0 f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \{{}_nC_{k-1} + {}_nC_k\}\, f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x) \\
&\qquad + {}_nC_n f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

となるが, ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ であること, および補題 4.2 より上式は,

$$\sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

に一致する. □

Point: ライプニッツの公式は n 次の微分係数を求めるのに大変有効である.

例 4.2. $x^3 e^x$ の n 次導関数を求めよ.

解

$$\left(x^3\right)^{(m)} = \begin{cases} x^3 & (m=0) \\ 3x^2 & (m=1) \\ 6x & (m=2) \\ 6 & (m=3) \\ 0 & (m>3) \end{cases}$$

であるから, ライプニッツの公式より,

$$\begin{aligned} \left(x^3 e^x\right)^{(n)} &= x^3 e^x + {}_nC_1 3x^2 e^x + {}_nC_2 6x e^x + {}_nC_3 6 e^x \\ &= \{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\} e^x . \end{aligned}$$

ここで, $n \geqq 3$ として計算したが, この答えは $n = 0, 1,$ または 2 でも通用していることに注意せよ. □

例 4.3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ について, $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

解　$n \geqq 2$ として, $(x^2+1)f(x) = 1$ の両辺を n 回微分し, 左辺にライプニッツの公式を適用すると,

$$(x^2+1)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0 .$$

ここで, $x = 0$ とすると, $f^{(n)}(0) = -n(n-1)f^{(n-2)}(0)$ なる漸化式を得る. $f^{(0)}(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = 0$ に注意して, これを解けば

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} n! & (n \text{ が偶数 }) \\ 0 & (n \text{ が奇数 }) \end{cases}$$

となる. □

5 平均値の定理とテイラーの定理

この節の話題は, 少しばかり一般的かつ抽象的である. 最初の一読では, 定理およびそれらの系の内容を頭にとどめるだけで, それらの証明はスキップして, 最後の小節に進んで差し支えない.

この節を通しての仮定 以下, 特に断わらない限り, $a<b$ として, 閉区間 $[a,b]$ で定義された関数で, 次の条件を満たすものを考える:

($\heartsuit$) 閉区間 $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能.

定理 5.1 (ロルの定理)． 関数 $f(x)$ は 条件 ($\heartsuit$)を満たしているとする. さらに, $f(a)=f(b)$ であれば, $a<\alpha<b$ なる, ある α に対して, $f'(\alpha)=0$ となる.

証明 関数 $f(x)$ は閉区間上で連続であるから, この区間内で最大値 (これを M と書こう) および最小値 (これを m と書こう) をもつ. $M=m$ であれば $f(x)$ はこの区間で定数関数. よって, どんな α $(a<\alpha<b)$ をとっても $f'(\alpha)=0$ である.

$M>m$ とする. $M \geqq f(a)=f(b) \geqq m$ であるから, $M>f(a)=f(b)$ または, $f(a)=f(b)>m$ の少なくとも, 一方は成立する. $M>f(a)=f(b)$ であるとしよう. $f(x)$ が最大値 M を $x=\alpha$ でとるとしよう. 仮定より, $a<\alpha<b$ である. このとき, (十分小さな,) $h>0$ に対して, $f(\alpha+h) \leqq M=f(\alpha)$ かつ $f(\alpha-h) \leqq M=f(\alpha)$ であるから,

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \leqq 0 \quad かつ \quad \frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h} \geqq 0\,.$$

ここで, $h \to 0$ とすると, 前者からは $f'_+(\alpha) \leqq 0$, 後者からは $f'_-(\alpha) \geqq 0$ を得るが, $f(x)$ は $x=\alpha$ で微分可能であるから,

$$0 \geqq f'_+(\alpha)=f'(\alpha)=f'_-(\alpha) \geqq 0\,.$$

よって, $f'(\alpha)=0$ である. $f(a)=f(b)>m$ のときも同様に議論すればよい. □

ロルの定理の興味ある応用例をひとつ述べよう.

例 5.1. $f(x)$ を, ある (有限または無限の) 開区間で定義された微分可能な関数とする. 方程式 $f(x)=0$ が相異なる m 個の実解をもてば, $f'(x)=0$ は, 少なくとも, $m-1$ 個の相異なる実解をもつ.

解 $f(x)=0$ の相異なる m 個の実解を $a_1<a_2<\cdots<a_m$ としよう. $f(a_i)=f(a_{i+1})$ $(i=1,2,\ldots,m)$ であるので, ロルの定理より, ある α_i $(a_i<\alpha_i<a_{i+1})$ が存在して, $f'(\alpha_i)=0$. すなわち, $f'(x)=0$ は $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{m-1}$ を実解にもつ. □

定理 5.2 (ラグランジュの平均値の定理)． 関数 $f(x)$ は 条件 ($\heartsuit$)を満たしているとする. このとき,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha), \quad a<\alpha<b$$

なる α が (少なくとも 1 つは) 存在する.

証明

$$F(x) := f(b) - f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

とおけば, これも 条件 (♡)を満たし $F(a) = F(b) = 0$. したがって, ロルの定理より,

$$F'(\alpha) = 0, \qquad a < \alpha < b$$

なる α が存在する. $F'(x) = -f'(x) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であるから, 求める式を得る. □

> **系 5.3.** 開区間 (c, d) 上で微分可能な関数 $f(x)$ について, この区間で導関数が恒等的に 0 であれば, $f(x)$ は定数関数である.

証明　$a < b$ をこの区間内の 2 点とするとき, $f(a) = f(b)$ を示せばよい. 区間 $[a, b]$ について, $f(x)$ は 条件 (♡)を満たす. よって, 平均値の定理が使えて, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha)$ なる α $(a < \alpha < b)$ が存在するが, 仮定より $f'(\alpha) = 0$ であるので, $f(a) = f(b)$ となる. □

> **定理 5.4 (コーシーの平均値の定理)** . $f(x)$, $g(x)$ が, ともに, 条件 (♡)を満たし, $g'(x)$ はこの区間で, 決して 0 とならないとき, $a < \alpha < b$ なる, α が存在して,
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$
>
> となる.

証明　$g(b) - g(a) \neq 0$ である. なぜなら, $g(a) = g(b)$ であれば, ロルの定理より, $g'(\beta) = 0$ なる β $(a < \beta < b)$ が存在してしまうから.

したがって,

$$F(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(x))$$

はこの区間で意味をもち, かつ微分可能で, $F(b) = F(a) = 0$. ゆえ, ロルの定理より, $F'(\alpha) = 0$ なる α $(a < \alpha < b)$ が存在する. この α について,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

である. □

ラグランジュの平均値の定理にあらわれる式は

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\alpha) \qquad a < \alpha < b$$

あるいは

$$f(a) = f(b) + (a-b)f'(\alpha) \qquad a < \alpha < b$$

と表現できる.

定理 5.5. 実数 c を含む，ある開区間で定義された関数 $f(x)$ が，この区間で微分可能であれば

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c+\theta(x-c)) \quad 0 < \theta < 1$$

となる θ が（ x に依存して ）存在する．

証明　$x = c$ のときは明らか．$x > c$ のときは，上に述べたラグランジュの平均値の定理の第 1 の変形の式を $a = c, b = x$ として用いれば，

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(\alpha) \quad c < \alpha < x\,.$$

したがって，$\alpha = c + \theta(x-c)$　$(0 < \theta < 1)$ と表せる．

$x < c$ のときは，第 2 の変形の式を $a = x, b = c$ として用いれば同様である．　□

テイラーの定理　次に定理 5.5 を "良い" 関数に対して，精密化することを考える．

関数 $f(x)$ が条件 ($\heartsuit$)を満たし，さらに $\lim_{x\to a+0} f'(x)$ および $\lim_{x\to b-0} f'(x)$ が存在すれば，$f'(x)$ は自然に，閉区間 $[a,b]$ 上の関数とみなせる．このような $f'(x)$ が，さらに条件 ($\heartsuit$)を満たすとき，$f(x)$ は条件 ($\heartsuit_1$) を満たすと呼ぶことにしよう．以下，帰納的に自然数 n に対して条件 ($\heartsuit_n$) を満たすということを定義する．すなわち，$f(x)$ が条件 ($\heartsuit_n$) を満たせば，開区間 (a,b) において n 回微分可能で，$f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ は自然に閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数に延長され，さらに $f^{(n)}(x)$ も微分可能である．

定理 5.6. 関数 $f(x)$ が 条件 ($\heartsuit_n$) を満たせば，$a < \alpha < b$ なる α が存在して，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

となる．

証明

$$F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{1}{(b-a)^{n+1-k}} \right)(b-x)^{n+1}$$

とおく．（ ここで，$n = 0$ とすれば，ちょうどラグランジュの平均値の定理の証明にあらわれた $F(x)$ に一致する．）明らかに，$F(a) = F(b) = 0$ である．$k \geqq 1$ のとき，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \right) = -\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k$$

であることに注意すれば，

$$F'(x) \;=\; -f'(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x)}{i!}(b-x)^i - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k$$

$$+ (n+1)\left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(b-a)^{n+1-k}}\right)(b-x)^n$$

$$= \ -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)\left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(b-a)^{n+1-k}}\right)(b-x)^n .$$

したがって, ロルの定理より, ある α $(a < \alpha < b)$ が存在して,

$$(n+1)\left(\frac{f(b)}{(b-a)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{(b-a)^{n+1-k}}\right)(b-\alpha)^n = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n!}(b-\alpha)^n .$$

これを書き直せば,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を得る. □

ラグランジュの平均値の定理から定理 5.5 を導いた論法とまったく同様の論法で, 定理 5.6 より, 次の定理を得る.

定理 5.7 (テイラーの定理) . 実数 c を含むある開区間で定義された関数 $f(x)$ が, この区間で $n+1$ 回微分可能であれば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(c+\theta(x-c))}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

となる θ が (x と c とに依存して) 存在する.

定理 5.7 において,

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c+\theta(x-c))}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

とおく[4] . もし, $f(x)$ が無限回微分可能で $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となるならば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

と無限級数で表示されることになる. これを $f(x)$ の点 c における**テイラー級数** とよぶ. $f(x)$ がこのような表示を定義域の各点 c でもつとき, $f(x)$ は **解析関数** とよばれる, 解析関数の本質は, それを複素変数の関数として考察することによって, 極めて自然に, 明らかになるが, この事柄については他書に譲ることにする.

[4]この項を**ラグランジュの剰余項**とよぶ.

Point: 多くの場合, 関数値を計算するのにそれほど正確な値は必要でない. そして, テイラーの定理によれば複雑な関数でも多項式で近似できることになり, 多項式であれば種々の計算が楽になる.

いくつかの関数のテイラー級数 具体的な関数のテイラー級数を調べる. まず, 無限回微分可能な関数が上のような表示をもつことを示すために必要となる補題を述べる.

補題 5.8. 任意の実数 M について,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}=0.$$

証明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{M^n}{n!}\right|\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{|M|^n}{n!}\right)=0$ を示せば十分であるので, $M \geqq 0$ として証明すればよい.

$$\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{M^n}{n!}=\frac{M^n}{n!}\left(\frac{M}{n+1}-1\right)$$

であるから, 数列 $\left\{\dfrac{M^n}{n!}\right\}$ は $n \geqq M$ では単調減少である. しかも, $\dfrac{M^n}{n!}\geqq 0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}$ は存在する (第 1 章, 定理 1.2). この収束値を α とおくと

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n+1}\cdot\frac{M^n}{n!}=0\cdot\alpha=0. \quad \square$$

以下では, $c=0$ におけるテイラー級数 (これを, **マクローリン級数**とよぶ) を調べる.

例 5.2.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

よって, すべての実数 x に対し,

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

となる.

証明 定理 5.7 より, e^x が無限回微分可能で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$ を示せばよい. $\dfrac{d}{dx}e^x=e^x$ であるから前半は明らか.

$$|R_n|=\left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right|\leqq\frac{|x|^n e^{|x|}}{n!}$$

であるから, 補題 5.8 より各 x について, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$. $\square$

例 5.3. 以下, いくつかの関数のマクローリン級数を述べるが, それらにあらわれる θ は x と n とに依存して定まる $0<\theta<1$ を満たす定数である.

(1) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

よって, すべての実数 x に対して $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ である.

(2) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

よって, すべての実数 x に対して $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ である.

問 5.1. 例5.3 を証明せよ.

テイラー級数を調べる際に, 定義どおりに剰余項を求めることは必ずしも得策ではない. $\log(1+x)$ に定理 5.6 を直接適用すれば

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} \ (0<\theta<1)$$

であるが, この剰余項を評価することは容易ではない. 少々先ばしることにはなるが, これを積分を用いて評価しよう.

例 5.4. $-1<x$ に対し

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}, \\ R_{n+1} &= (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \end{aligned}$$

となる. さらに, $-1<x\leqq 1$ として, この積分を評価すると $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ となり, この区間で

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

と表される.

証明 等比数列の公式より,

$$1 - t + t^2 \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

従って,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x)$ に注意すれば, 前半の式を得る.

この剰余項 $R_{n+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$ を評価する.

(i) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき,

積分区間 $[0,x]$ では $\frac{t^n}{1+t} \leqq t^n$ より

$$|R_{n+1}| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leqq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}.$$

よって, $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$.

(ii) $-1 < x < 0$ のとき,

積分区間 $[x,0]$ では $\frac{(-t)^n}{1+t} \leqq \frac{(-t)^n}{1+x}$. よって,

$$|R_{n+1}| = \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+t}dt \leqq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x}dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \leqq \frac{1}{(n+1)(1+x)}.$$

よって, $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$. □

任意の実数 α と自然数 k とに対して

$${}_\alpha C_k := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

と定め, ${}_\alpha C_0 = 1$ と規約する. これは, 第4節で説明した2項係数の自然な一般化になっている.

例 5.5 (一般化された2項定理) . 任意の実数 α に対し,

$$(1+x)^\alpha = 1 + {}_\alpha C_1 x + {}_\alpha C_2 x^2 + \cdots + {}_\alpha C_n x^n + {}_\alpha C_{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

なる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する. さらに $|x| < 1$ において, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} {}_\alpha C_k x^k$ となる表示をもつことが知られている.

オイラーの公式 この節の最後の話題として, オイラーの公式について少しばかり触れよう.

e^x のテイラー級数による表示 (例 5.2) の x に形式的に iy (i は虚数単位 $\sqrt{-1}$) を代入した式を考える.

$$i^k = \begin{cases} 1 & (k = 4m) \\ i & (k = 4m+1) \\ -1 & (k = 4m+2) \\ -i & (k = 4m+3) \end{cases}$$

であることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= 1+i\frac{y}{1!}-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+i\frac{y^5}{5!}+\cdots \\
&= \left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)
\end{aligned}
$$

を得る. これを $\sin y$ および $\cos y$ の テイラー級数による表示 (例 5.3) と見較べれば, 形式的に

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

なる式を得る. これを **オイラーの公式** とよぶ.

われわれは, 複素数ベキの定義をしていないので, この公式は形式的な意味しかもち得ないが, 適当に複素数ベキを意味付けすれば, 上の式は実質的な意味をもつ. あるいは, オイラーの公式によって正の数の複素数ベキを定義してもよい. すなわち, $a>0$ (ただし $a\neq 1$) および複素数 $x+iy$ について

$$a^{x+iy}=a^x(\cos(y\log a)+i\sin(y\log a))$$

によって定義するのである. このとき, 3 角関数の加法公式を用いれば指数法則 $a^{z_1+z_2}=a^{z_1}a^{z_2}$ が成立することを容易に確かめうる.

6 不定形の極限値

コーシーの平均値の定理の応用として不定形の極限について考察しよう.

関数 $f(x),g(x)$ において $x\to a$ のとき $f(x),g(x)$ が $\to 0,\infty$ などになるとき,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

は形式的に

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$$

などと表され **不定形** とよばれている. 不定形について次の定理が成り立つ.

定理 6.1 (ロピタルの定理) . 微分可能な関数 $f(x),g(x)$ において $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ で a の近くの任意の x に対し $g'(x)\neq 0$ であるとき, もし $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

証明 a が $f(x),g(x)$ の微分可能である区間に含まれているならば, それらは a で連続であるので $f(a)=g(a)=0$. もし a が微分可能な区間の端点であるならば, a における値を (あ

らためて) $f(a)=g(a)=0$ と定めることにことにする. いずれにせよ a の十分近くの x に対し, $f(x), g(x)$ は区間 $[a,x]$ (かつ/または $[x,a]$) でコーシーの平均値の定理の条件 (♡) を満たす. したがって a と x の間に

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

を満たす α が存在する. ここで $x\to a$ とすれば $\alpha\to a$ より

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{\alpha\to a}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}. \quad \square$$

注 6.1. この定理は a が $\pm\infty$ の場合にも成り立つ. また, $x\to a$ のとき $f(x)\to\pm\infty, g(x)\to\pm\infty$ の場合にも $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を証明することができる.

Point: ロピタルの方法は大変有効なので, しっかりマスターしよう.

例 6.1. ロピタルの定理を利用して次のように関数の極限を求めることができる.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{2x+2}{2x-3}=-4.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}=1$

(なぜなら, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0.$)

問 6.1. 次の関数の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin ax^2}{\sin bx^2}\ (b\neq0)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(-\log x)^x$

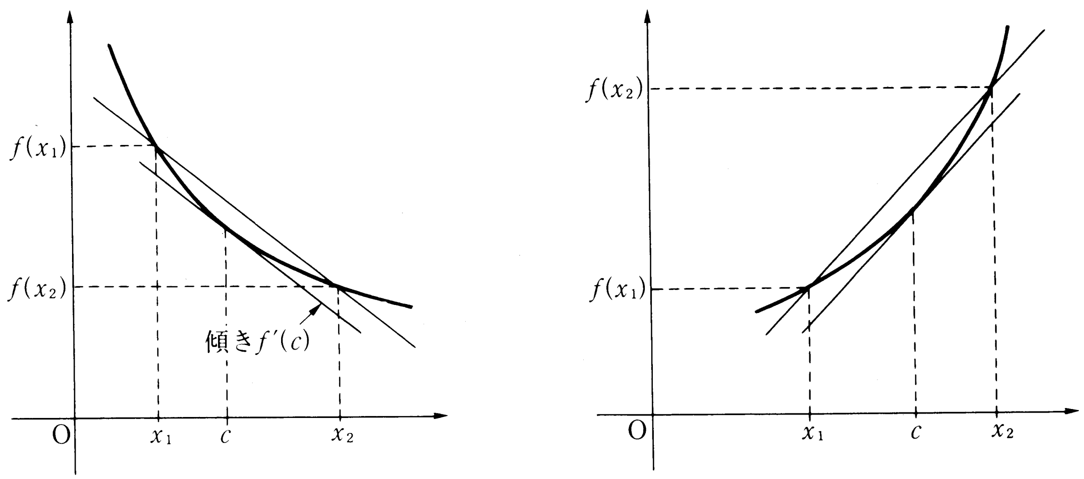
7　関数の極大・極小と凹凸

定理 7.1. $[a,b]$ で連続で, (a,b) で微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で単調増加（単調減少）であるための必要十分条件は, (a,b) において常に $f'(x) \geqq 0$ $(f'(x) \leqq 0)$ が成り立つことである.

証明 区間 $[a,b]$ の任意の点 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ に対し, 平均値の定理より

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \ (x_1 < c < x_2)$$

を満たす c が存在する. よって, もし $f'(c) \geqq 0$ $(f'(c) \leqq 0)$ であれば $f(x_2) \geqq f(x_1)$ $(f(x_2) \leqq f(x_1))$ が成り立ち, また, この逆も上の式より簡単に確かめることができる. □



単調減少・単調増大のグラフ

点 c を含む十分小さな開区間において任意の $x \neq c$ に対し

$$f(c) > f(x) \ (f(c) < f(x))$$

が成り立つならば, $f(x)$ は $x = c$ で**極大** (**極小**) であるといい, $f(c)$ を**極大値** (**極小値**) という.

定理 7.2. 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能であるとき, $c \in (a,b)$ とするとき, (a,c) において $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, (c,b) において $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で**極大**（**極小**）である.

証明 任意の $a < x < c$ においてラグランジュの平均値の定理より

$$f(c) = f(x) + (c - x)f'(\alpha) \ (x < \alpha < c)$$

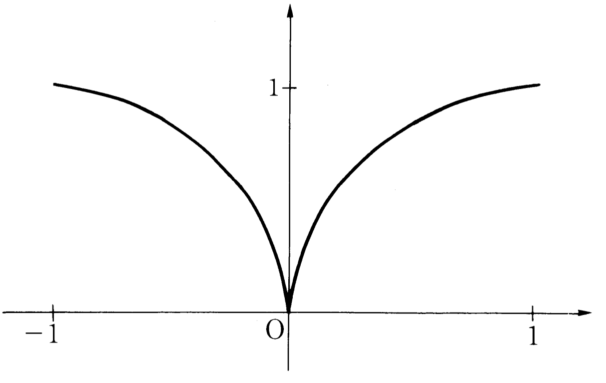
を満たす α が存在する．$f'(\alpha) > 0$ より $f(c) > f(x)$．同様に任意の $c < x < b$ において

$$f(x) = f(c) + (x - c)f'(\alpha)\ (c < \alpha' < x)$$

を満たす α' が存在する．$f'(\alpha') < 0$ より $f(c) > f(x)$．よって $x = c$ で極大． □

注 7.1. 定理 7.2 では, $f(x)$ が $x = c$ で微分可能である必要はない．

例 7.1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ は区間 $(-1, 1)$ 上の連続関数で, $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} < 0\ (x \in (-1, 0))$, $f'(x) > 0\ (x \in (0, 1))$．また $f(0) = 0$ より関数 $f(x)$ は極小値 0 をとる．



$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ のグラフ

$f'(x) = 0$ の解の中で, 極値をもつものは次の定理により判定できる．

定理 7.3. $f(x)$ は (a, b) で n 回微分可能 $(n \geqq 2)$, (a, b) の点 c で $f^{(n)}(x)$ が連続,

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, f^{(n)}(c) \neq 0$$

であるとする．このとき

(1) n が偶数で $f^{(n)}(c) > 0$ $(f^{(n)}(c) < 0)$ ならば $f(c)$ は極小値（極大値）である．

(2) n が奇数ならば $f(x)$ は c で極値をとらない．

証明 テイラーの定理より

$$f(c + h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c + \theta h)}{n!}h^n$$

すなわち

$$f(c + h) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c + \theta h)}{n!}h^n$$

となる θ $(0<\theta<1)$ が存在し, n が偶数ならば, $h^n>0$. $f^{(n)}(x)$ が $x=c$ で連続で $f^{(n)}(c)\neq 0$ であるから $|h|$ が十分小さければ, $f^{(n)}(c+\theta h)$ は $f^{(n)}(c)$ と同符号である. よって $f^{(n)}(c)>0$ ならば $f(c)$ は極小値. 同様に $f^{(n)}(c)<0$ ならば $f(c)$ は極大値.

n が奇数のときは h^n が h の正負によって符号を変えるから, $f(c+h)$ と $f(c)$ の大小関係も変わり, 極値をもたない. □

例 7.2. $f(x)=x+2\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の極値を求めよ.

解 $f'(x)=1+2\cos x, f''(x)=-2\sin x$. 方程式 $f'(x)=0$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ を解くと, $x=\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$.

$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)<0, f''\left(\frac{4}{3}\pi\right)>0$$

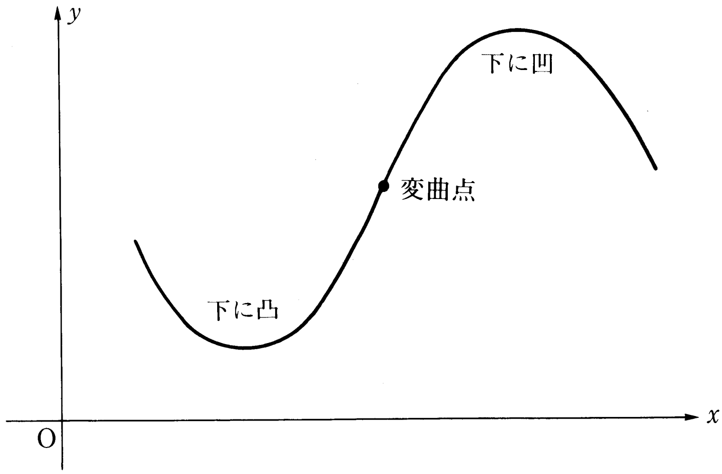
より $x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき極大で極大値は $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}, x=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき極小で極小値は $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.

問 7.1. 次の関数の極値を求めよ.

(1) x^3-x^2　　(2) $x+\dfrac{1}{2x^2}$

(3) $x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$　　(4) $x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき, $x=a$ に対応する曲線 $y=f(x)$ 上の点 P における接線 PT に対し, 曲線が P の十分近くで常に PT の上方にあるとき, この曲線は $x=c$ において **下に凸** (または **上に凹**), 常に PT の下方にあるとき, この曲線は $x=c$ において **下に凹** (または **上に凸**) という. また, 凹凸の変わり目を**変曲点**という.



下に凸・下に凹

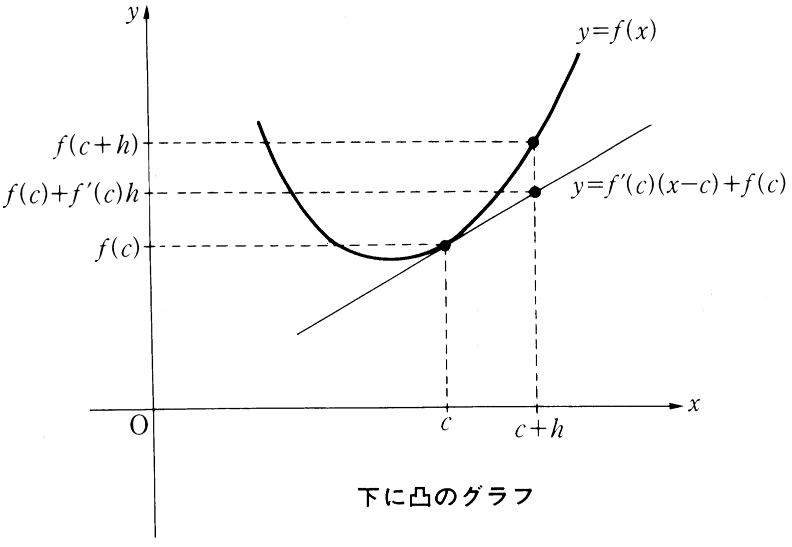
定理 7.4. 関数 $f(x)$ を2回微分可能で $f''(x)$ は連続とする. 曲線 $y=f(x)$ において, $f''(x)>0$ となる区間では下に凸, $f''(x)<0$ となる区間では下に凹.

証明 $f(x)$ は区間 (a,b) において, $f''(x)>0$ とする. 点 $(c,f(c))$ $(a<c<b)$ における接線の方程式は

$$y=f'(c)(x-c)+f(c).$$

よって $x=c+h$ のとき, 曲線が接線の上側にあることと $f(c+h)-f(c)-f'(c)h$ が正であることは同値である. テイラーの定理より

$$f(c+h)-f(c)-f'(c)h=\frac{f''(c+\theta h)}{2!}h^2\ (0<\theta<1).$$



下に凸のグラフ

$f''(x)$ は連続性より $|h|$ が十分小さければ $f''(c+\theta h)>0$ であるから $f(x)$ は $x=c$ で下に凸. 同様に $f''(x)<0$ となる区間の任意の c においては下に凹. □

問 7.2. 次の関数の凹凸を調べ, 変曲点を求めよ.

(1) $y=x^3-x+1$　　(2) $y=\sqrt[3]{x}+x$

(3) $y=e^{-x^2}$　　(4) $y=\frac{3}{2}(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}})$

問 7.3. $m,n>0$ とする. 区間 I で $f''(x)>0$ ならば, 任意の $x_1,x_2\in I$ $(x_1\neq x_2)$ に対し

$$\frac{mf(x_1)+nf(x_2)}{m+n}>f\Big(\frac{mx_1+nx_2}{m+n}\Big)$$

であることを示せ.

第 2 章 練習問題

1. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\sqrt{x^2-1}$　(2) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(3) $x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x$　(4) $\sqrt{x+2\sqrt{x}}$

(5) e^{e^x}　(6) $\log\sqrt{x^2+1}$　(7) $\tan^{-1}(\sin^{-1}x)$　(8) $\log\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

(9) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　(10) $\tan\dfrac{x+1}{x^2}$　(11) $\sin^3 x^2$　(12) $\tan(\sin(\log x))$

2. 次の媒介変数で表示された関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos t} \\ y=\tan t \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=t^3-1 \\ y=t^2+\sin t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=t^2-2t-1 \\ y=e^t \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=\sin t \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x=e^t-1 \\ y=\sin 2t \end{cases}$

3. 次の関数の n 次導関数を求めよ.

(1) e^{-x}　(2) $\sin x$　(3) $\log x$　(4) $\sqrt{x}$　(5) $\dfrac{1}{x-1}$　(6) $(x^2+n)e^x$

(7) $x\log x$　(8) $x\sin x$　(9) $e^x\cos x$　(10) $x^3\log x$　(11) xe^{-2x}　(12) $\dfrac{1}{x(x-1)}$

4. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ について,

(1) $(1-x^2)f'(x)=xf(x)$ を示せ.　(2) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

5. 次の関数のマクローリン級数を 2 次の項まで求めよ.

(1) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　(2) $(x+3)^4$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　(4) $\tan^{-1}x$

(5) $(x-1)^2$　(6) 2^x　(7) $e^x\sin x$　(8) $\log(e^x+1)$

(9) $\dfrac{1}{1-\sin x}$　(10) $e^{\cos x}$　(11) $(e^x-1)^4$　(12) $\tan x$

6. 次の関数のマクローリン級数を求めよ.

(1) $x^2\sin x$　(2) e^{2x}　(3) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(4) $\tan^{-1}x$　(5) 3^x　(6) x^2e^x

(7) e^{-x}　(8) $\dfrac{1}{1+x}$　(9) $\cos x^2$　(10) $x\log(1+x)$　(11) $e^x\sin x$

7. 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{1+x^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)\ (a>0)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1-x^2}}{x^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x\sqrt{x+1}}{x^3}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+x+x^2}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1-(\log 2)x}{x^2}$

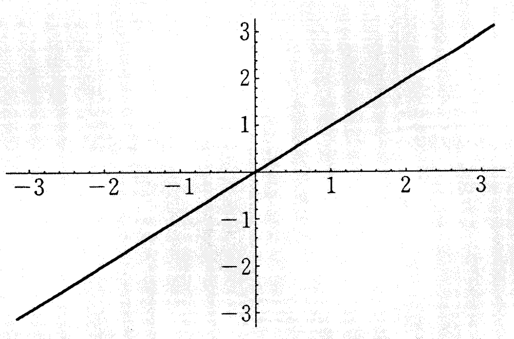
8. 次の関数の極値を求めよ．

(1) $y=(x-4)\sqrt{x}$　　(2) $y=\dfrac{x}{\log x}$　　(3) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$

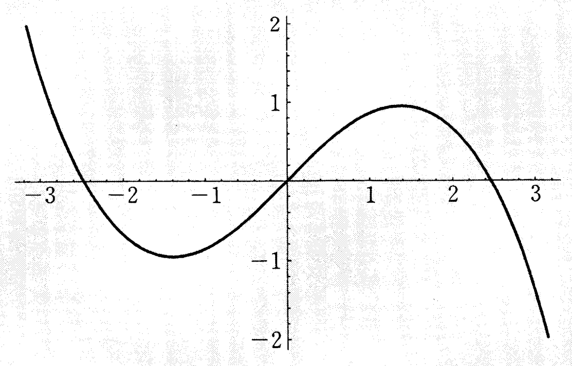
(4) $y=\sin x(1+\cos x)$　　(5) $y=x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$　　(6) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

[グラフで確認してみよう] マクローリン展開を用いることによって, $\sin x$, e^x などの関数が多項式の形で表されることを学んだ．しかし, 実際に同じグラフになるのだろうか？そこで, 次の関数をグラフに書いてみよう．

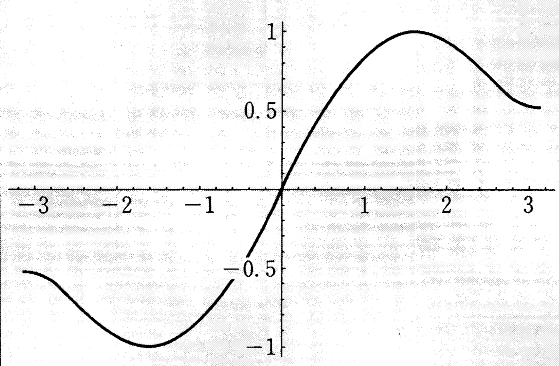
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$



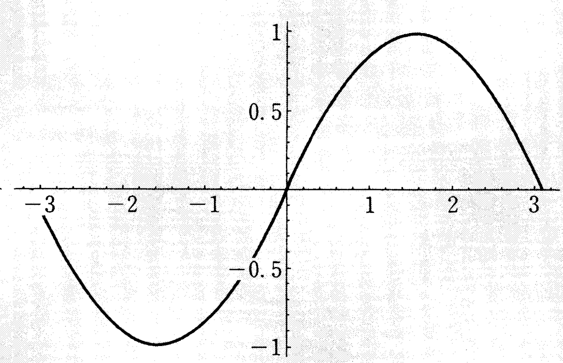
$y=x$



$y=x-\dfrac{x^3}{3!}$



$y=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$



$y=\sin x$

第3章

積分法 1

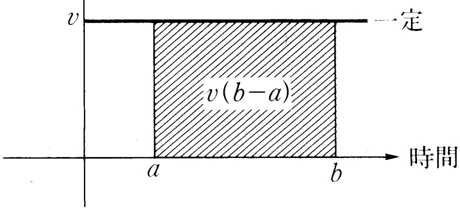
1　不定積分

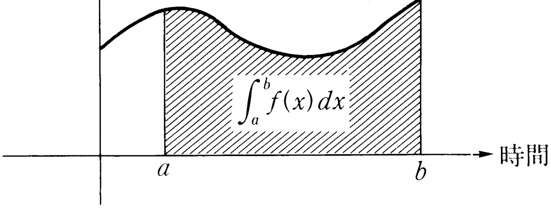
関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分 $f'(a)$ の定義を振り返ると, 次の極限値であった.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{で}\ b \longrightarrow a\ \text{とした.}$$

例えば, ある物体の時刻 x における位置が関数 $y=f(x)$ で与えられているとすれば $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は時刻 a から b までのときの平均の速度である. よって $b \longrightarrow a$ としたときの極限値 $f'(a)$ は, 物体の時刻 a における速度を求めたことになる.

いま, 逆に関数 $y=f(x)$ は時刻 x における速度を表しているとする. このとき, 時刻 a から b までに物体が動いた距離を求めることを考えよう. もし $f(x)=v$ (一定) であれば, 時刻 a から b までの動いた距離は, もちろん $v(b-a)$ であるが, これは, グラフで囲まれた部分の面積である. このことは, 速度が一定の定数関数でない場合にも成り立つことが知られている.





積分とは, 図のように関数で囲まれた部分の面積を求める作業であり, 上記の例の場合 $y=f(x)$ を積分するということは, 物体が時刻 a から b までに動いた距離を求めることに対応している. 高校での学習で $y=f(x) \geqq 0$ の区間 $[a,b]$ での面積は $F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を1つ見つけてきて $F(b)-F(a)$ を求めればよい. したがって, 積分を求めるには微分について, よくわからなければならない. 第2章で, 高校のときとは違う, 複雑な

関数についての微分を学習した．この章では，高校での学習を振り返りながら，そのような関数の不定積分を学習する．

関数 $f(x)$ に対して，

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数** または **不定積分**という．

例 1.1.

(1) x^2, x^2+1 は $2x$ の不定積分である．

(2) $\sin x$, $\sin x + 2$ は $\cos x$ の不定積分である．

関数 $f(x)$ の不定積分は数多く存在するが，次の定理により定数を除いてただ 1 つ定まる．

定理 1.1. $F(x)$, $G(x)$ を $f(x)$ 不定積分とすると

$$G(x) - F(x) = C \quad (\ C \text{ は定数} \ )$$

が成り立つ．

証明　不定積分の定義により　$G'(x) = F'(x) = f(x)$, したがって

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = 0.$$
$$G(x) - F(x) = C \quad (C \quad \text{は定数}). \qquad \square$$

関数　$f(x)$ に対して，その不定積分を $\int f(x)\,dx$ と表す．また $\int \frac{1}{f(x)}dx$ の場合は $\int \frac{dx}{f(x)}$ とすることもある．$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると，定理 1.1 より

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

と表すことができる．このとき，$f(x)$ を被積分関数, C を積分定数といい関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを関数 $f(x)$ を積分するという．以下，積分定数は省略する．

注 1.1.　任意の関数の不定積分は必ずしも存在しないが，連続関数の不定積分は常に存在する．

不定積分の計算において，次の定理が基本的である．

定理 1.2. a, b を定数とするとき

$$\int \{af(x) + bg(x)\}\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

が成り立つ．

問 1.1. 上の定理を証明せよ．

定理 1.2 から，いくつかの基本関数の不定積分がわかれば，それらを組み合わせてより複雑な不定積分が計算できる．まず，基本関数の不定積分の公式を述べる．

不定積分の基本公式

(1) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1)$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|\,x\,|$

(3) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$ (4) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0, a \neq 1)$

(5) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$ (6) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$ (10) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|\,f(x)\,|$

問 1.2. 公式 (7), (8), (9) を証明せよ．

例 1.2.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{3}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{2^2+x^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{x}{2}.$

(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\,\cos x\,|.$

2 置換積分と部分積分

置換積分

x の関数 $f(x)$ において，その変数 $x = g(t)$ が変数 t の関数であるとき次の積分公式が成り立つ．

定理 2.1 (置換積分の公式) ．関数 $f(x)$ が連続，$g(t)$ が微分可能，かつその導関数 $g'(t)$ が連続であるとき，

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

証明 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると，合成関数 $F(g(t))$ について，

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

したがって，

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) = F(x) = \int f(x)\,dx.$$

□

注 2.1. 実際の計算においては，　$x = g(t)$ を微分し，$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ から分母をはらった $dx = g'(t)dt$ を左辺に代入すればよい．

置換積分の公式を利用して次のように不定積分を求めることができる．

例 2.1. 次の不定積分を求めよ．

(1)　$(2x+1)^7$　　(2)　xe^{x^2}　　(3)　$x\sqrt{x^2-1}$　　(4)　$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

解

(1)　$t = 2x+1$ とおくと

$$\int (2x+1)^7\,dx = \int t^7 \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^7\,dt = \frac{1}{16}t^8 = \frac{1}{16}(2x+1)^8.$$

(2)　$t = x^2$ とおくと $dt = 2xdx$ だから

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

(3)　$t = x^2-1$ とおくと $dt = 2xdx$ だから

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}.$$

(4)　$t = \cos x$ とおくと $dt = -\sin x dx$ だから

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}.$$

問 2.1. 次の関数の不定積分を求めよ．

(1)　$x^2e^{x^3}$　　(2)　$\sin 2x\cos 4x$　　(3)　$\dfrac{x^3}{x^2+4}$　　(4)　$\dfrac{e^x}{1+e^x}$

(5)　$\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

部分積分

置換積分の公式とならんで，積分の計算に有力な手段となるのが部分積分の公式である．

定理 2.2 (部分積分の公式)． 関数 $f'(x), g'(x)$ が連続のとき

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

証明　積の微分公式より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

したがって

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

□

例 2.2. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\log x$　(2) $x\cos x$　(3) $\sin^{-1} x$

解

(1) $\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x.$

(2) $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x.$

(3) $\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

$t = 1 - x^2$ とおくと $-2xdx = dt$ だから

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}.$$

したがって

$$\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}.$$

問 2.2. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) xe^x　(2) $x\sin x$　(3) $\tan^{-1} x$　(4) $\log(x^2+1)$

例 2.3. 不定積分 $\int e^x \sin x\,dx$ を求めよ.

解

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \left(e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx\right).$$

したがって

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$

問 2.3. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) x^2e^x　(2) $e^x\cos x$　(3) $x^2\sin x$

例 2.4.

(1) n を 2 以上の自然数としたとき

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

を示せ．
(2) 不定積分 $\int \cos^3 x\,dx$ を求めよ．

解. (1)

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.\end{aligned}$$

したがって，右辺の第 3 項を左辺に移項し，n で割ればよい．
(2)　　(1) で求めた式から，

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x.$$

注 2.2. $\cos x$ の 3 倍角の公式を利用してもよい．

問 2.4. $\int \sin^4 x\,dx$ を例 2.4 と同様のやり方で求めよ．

問 2.5. 次の不定積分の漸化式をつくれ．

(1) $I_n = \int x^n e^{-x}\,dx$　(2) $I_n = \int (\log x)^n\,dx$　(3) $I_n = \int x^n a^x\,dx \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

3　いろいろな関数の積分

有理関数の積分

分数式を積分することは，速さ (速さの 2 乗) に比例する抵抗を受けて落下する物体や，上限を設定した生物の生息数を扱うときなどに現れる．ここで分数式というのは，$P(x)$, $Q(x)$ を多項式として，$\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ という形をした式のことである．

実際に必要なのは，**{ 分子の次数 }** $<$ **{ 分母 の次数 }** の場合である：

{$Q(x)$ の次数} $\geqq$ {$P(x)$ の次数} の場合は，

1. $Q(x) \div P(x)$ を計算して，商 $S(x)$, 余り $R(x)$ を出す;

$$Q(x) = P(x)S(x) + R(x),$$

2. これより

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{P(x)} \qquad \cdots\cdots(*)$$

3. $S(x)$ は多項式ですぐに積分できるし, $R(x)$ の次数 $<$ $P(x)$ の次数になっている.

例 3.1. $\dfrac{x^2-3x+4}{x+1}$ を $(*)$ の形にせよ.

$(x^2-3x+4) \div (x+1)$ を計算すると, 商は $x-4$ で, 余りが 8 だから

$$x^2-3x+4 = (x+1)(x-4)+8.$$

したがって,

$$\frac{x^2-3x+4}{x+1} = x-4+\frac{8}{x+1}.$$

問 3.1. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x+1}dx$ を計算せよ.

複雑な式はいくらでも考えられるが, 現時点で興味あることではないので, ここでは 1 次式 か 2 次式の積に因数分解できる場合に限る. したがって, 次の 3 つが基本形であるのでしっかり覚えておくことが必要である:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}dx = \log|x+a|,$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{a}{2})^2+\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{\alpha}}$ (ただし, $\alpha = b-\dfrac{a^2}{4} > 0$),

(3) $\displaystyle\int \frac{cx+d}{x^2+ax+b}dx.$

(3) については

$$\frac{cx+d}{x^2+ax+b} = \frac{\frac{c}{2}(x^2+ax+b)'}{x^2+ax+b} + \frac{d-\frac{ac}{2}}{x^2+ax+b}$$

と 2 つに分けて積分する. 前半は $\dfrac{c}{2}\log|x^2+ax+b|$ であるし, 後半は (2) の積分となる. たとえば,

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{3x-4}dx &= \frac{2}{3}\log|3x-4|,\\ \int \frac{1}{x^2+2x+4}dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

などが, あまり時間をとらずに計算できることが望ましい.

また, $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+4}dx$ などは次のようにする.

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x^2+4}dx &= \int \frac{x}{x^2+4}dx - 5\int \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+4) - \frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x^2-2x+5}dx &= \int \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+4}dx \\ &= \int \frac{x-1}{(x-1)^2+2^2}dx - 4\int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+5) - 2\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right).\end{aligned}$$

問 3.2. 今説明した手順で積分せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2x+5}{2x+3}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5}{x^2+1}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+5}{x^2+4x+13}dx$

さて, もう少し複雑な式を積分しよう.

例 3.2. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}dx$ は, どのようにしたら計算できるだろうか.

前と同じく, まず

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \left(1 + \frac{4x-1}{x^2-3x+2}\right) dx$$

とする. 次の重要なステップは, **分母を因数分解する** ことである.

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2).$$

さらに重要なステップは $\dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$ を**部分分数に分ける** ことである. これは

$$\frac{4x-1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

という形にすることである. この形になれば積分は簡単である!

たとえば, $x^2-4x+1=(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$ のように, 有理数ではむりだが, 実数の範囲で因数分解できるものに注意する.
一方, $x^2+6x+10$ などは, 実数の範囲で因数分解できないが, $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ で, 積分が $\tan^{-1}$ になるケースであるから, 安心してよい.

部分分数への分け方： $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ は, 次の形の分数式に分けられる.

$$\frac{A}{(ax+b)^n},\quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$$

ここで, $ax+b$, ax^2+bx+c は $P(x)$ の因数である.

例 3.3. 部分分数への分け方は次のようになる.

1. $\dfrac{4x-3}{(5x-4)(3x+7)^3}=\dfrac{A}{5x-4}+\dfrac{B}{(3x+7)^3}+\dfrac{C}{(3x+7)^2}+\dfrac{D}{3x+7}.$

2. $\dfrac{4x^2+1}{(x^2+x+3)^2(x-2)}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+x+3)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+3}+\dfrac{E}{x-2}.$

注意：

分母が 1 次式の巾乗 $\longrightarrow$ 分子は定数：A
分母が 2 次式の巾乗 $\longrightarrow$ 分子は 1 次式： $Ax+B$

係数 $A, B, \cdots$ の決め方：
方法 1. 分母を払い, 両辺の係数を比較する.
方法 2. 分母を払い, x に適当な値を代入する.

例 3.4. $\dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$ を部分分数に分けよ.

(i) まず $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ と因数分解し,

$$\frac{4x-1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

とおく.
(ii) 両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて分母を払う.

$$4x-1=A(x-2)+B(x-1)$$

(iii) 方法 1：右辺を展開すると,

$$4x-1=(A+B)x+(-2A-B)$$

となり, 係数を比較すると

$$4 = A + B,\ -1 = -2A - B.$$

これより

$$A = -3,\ B = 7.$$

したがって

$$\frac{4x-1}{x^2-3x+2} = -\frac{3}{x-1} + \frac{7}{x-2}.$$

方法 2 : $x = 1$ を代入 : $3 = -A \longrightarrow A = -3$
$x = 2$ を代入 : $7 = B \longrightarrow B = 7$

以上から

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-1}{x^2-3x+2}dx &= \int \left(-\frac{3}{x-1} + \frac{7}{x-2}\right) dx \\ &= -3\int \frac{1}{x-1}dx + 7\int \frac{1}{x-2}dx \\ &= -3\log|x-1| + 7\log|x-2|.\end{aligned}$$

例 3.5. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ を求めよ.

解 $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ と因数分解されるので,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

とおく. 両辺に $x^3 - 1$ をかけて

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1).$$

これが恒等式だから, 係数比較して A, B, C を求めると

$$A = \frac{1}{3},\quad B = -\frac{1}{3},\quad C = -\frac{2}{3}$$

だから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-1}\,dx &= \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\log|\,x-1\,| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

問 3.3. 積分せよ.

(1) $\dfrac{3x-1}{2x^2-5x-12}$　　(2) $\dfrac{2}{x^4-1}$　　(3) $\dfrac{x-1}{x^2(x^2-2x+2)}$

三角関数の積分

(1) $I=\displaystyle\int R(\sin x)\cos x\,dx.$

$\sin x=t$ とおくと $dt=\cos x dx$ だから

$$I=\int R(t)\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

(2) $I=\displaystyle\int R(\cos x)\sin x\,dx.$

$\cos x=t$ とおくと $dt=-\sin x dx$ だから

$$I=-\int R(t)\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

(3) $I=\displaystyle\int R(\cos x,\sin x)\,dx.$

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.\\
\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\\
dx &= 2\cos^2\frac{x}{2}dt=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}dt=\frac{2}{1+t^2}dt.
\end{aligned}$$

だから

$$I=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

(4) $J=\displaystyle\int R(\tan x)\,dx$

$\tan x=t$ とおくと

$$dx=\frac{1}{1+\tan^2 x}dt.$$

だから

$$J=\int R(t)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

となり, 有理関数の積分に帰着する.

例 3.6. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\sin^2 x\cos x$ (2) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ (3) $\dfrac{1}{\sin x}$ (4) $\tan^3 x$

解 (1) $\sin x = t$ とおくと, $dt = \cos x dx$ だから

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

(2) $\cos x = t$ とおくと, $dt = -\sin x dx$ だから,

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}.$$

(3) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \log|\, t\,| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

(4) $\tan x = t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\, dx &= \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \int (t - \frac{t}{1+t^2})\, dt \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x).\end{aligned}$$

問 3.4. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1+\cos x+\sin x}$ (2) $\sin^3 x\cos^3 x$ (3) $\dfrac{1}{1-\tan^2 x}$

無理関数の積分

根号を含む無理関数の積分は複雑であるが, 三角関数の積分と同様に適当な置換により, 有理関数の積分か, 既知の場合に帰着させることができる.

(1) $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\, dx \qquad (ad-bc\neq 0)$

$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$ とおくと

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \qquad dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

となり, 有理関数の積分になる.

(2) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \qquad (a>0)$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおくと

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \qquad dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2}dt$$

となり, 有理関数の積分になる.

(3) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx \quad (a < 0, \quad b^2 - 4ac > 0)$
$ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの実数解を $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ とすると

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}} \qquad (\alpha < x < \beta)$$

だから, $\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}} = t$ とおくと (1) の積分になる.

また, 次の 3 つの場合は三角関数の積分に帰着される.

(4) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,dx$ のとき　$x = a\tan t\,(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2})$ とおけばよい.

(5) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$ のとき　$x = \dfrac{a}{\cos t}\,(0 \leqq t < \dfrac{\pi}{2})$ とおけばよい.

(6) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ のとき　$x = a\sin t\,(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2})$ とおけばよい.

例 3.7. 次の不定積分を求めよ.

(1)　$\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$　(2)　$\sqrt{x^2+4}$　(3)　$\sqrt{a^2 - x^2}\quad (a > 0)$

解 (1) $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}} = t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx &= \int \frac{8t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{4t}{t^2+1} + \int \frac{4}{t^2+1}\,dt \\ &= -\frac{4t}{t^2+1} + 4\tan^{-1} t = -\sqrt{4-x^2} + 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x^2+4} = t - x$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+4}\,dx &= \int \frac{t^2+4}{2t}\frac{t^2+4}{2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{t^4 + 8t^2 + 16}{t^3}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 8\log|\,t\,| - \frac{16}{2t^2}\right) = \frac{t^2}{8} + 2\log|\,t\,| - \frac{2}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+4} + 4\log|\,x + \sqrt{x^2+4}\,|).\end{aligned}$$

(3) $x = a\sin t \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{\cos 2t+1}{2}\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2}+t\right) = \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right).\end{aligned}$$

問 3.5. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$　(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$　(3) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$　(4) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

第 3 章　練習問題

1. 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $x(2x+1)^8$　(2) $\sin(3x+1)$　(3) $\dfrac{(\log x)^2}{x}$

(4) $\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}$　(5) $x\log x$　(6) $x\tan^{-1}x$

(7) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$　(8) $\dfrac{1}{x^4+1}$　(9) $\dfrac{1}{x^2-1}$

(10) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$　(11) $\dfrac{x+3}{x^2+x+4}$　(12) $\dfrac{\sin x}{2+\tan^2 x}$

(13) $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$　(14) $\sin(\log x)$　(15) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

(16) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$　(17) $\dfrac{\sqrt{1+\log x}}{x}$　(18) $\sqrt{4x-x^2}$

2. 次の等式を証明せよ.

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$ とするとき

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

(2)

$$\int f'(x)\{f(x)\}^a\,dx = \begin{cases} \dfrac{\{f(x)\}^{a+1}}{a+1} & (a \neq -1 \text{ のとき}) \\ \log|\,f(x)\,| & (a = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

注 (1),(2) は公式としても利用する.

3. 次の漸化式を証明せよ.

(1) $I(m,n) = \displaystyle\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ とおくと

$$I(m,n) = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}I(m+2,n-2) \qquad (m+n \neq 0)$$

(2) $I_n = \displaystyle\int \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$ とおくと

$$(n-1)(I_n - I_{n-1}) = \sin 2(n-1)x \qquad (n \geqq 2)$$

第4章

積分法 2

1　定積分

本節では閉区間で定義された有界な関数の定積分について述べる．

定積分の定義

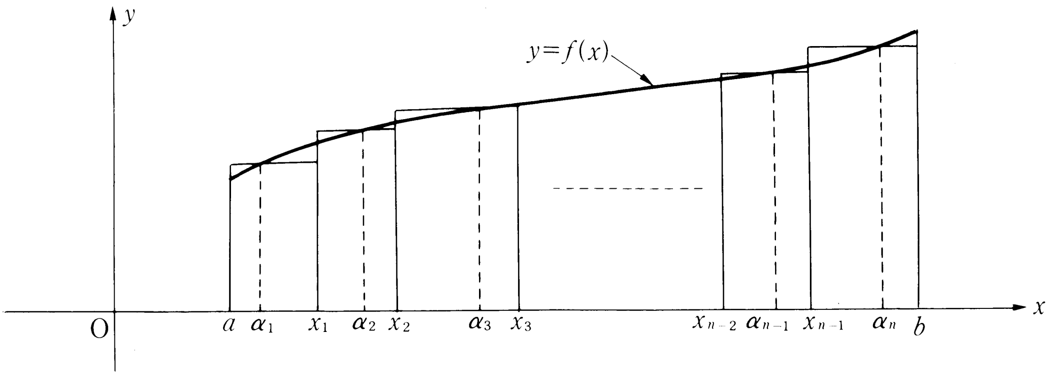
関数 $y = f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ の積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とは $f(x) \geqq 0$ のときは，閉区間 $[a, b]$ とグラフで囲まれた部分の面積を求めることである．もし $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ が見つかれば $F(b) - F(a)$ と計算すればよい．しかし，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の最初の定義は次のようになる．閉区間 $[a, b]$ から $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ を任意に選び，その区間を n 個の小区間に分割する．次に，新しくできた区間 $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b]$ から任意に点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を選び，和

$$S_n = f(\alpha_1)(x_1 - a) + f(\alpha_2)(x_2 - x_1) + f(\alpha_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\alpha_n)(b - x_{n-1})$$

を考える．$x_0 = a,\ x_n = b,\ x_k - x_{k-1} = \delta_k$ とすると，この和は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k$$

と書くことができる．これは，図形的には，次のページの図の長方形を全部合わせた面積を表している．



今, 区分点の数 n を増して $\delta_k \to 0$ とする．もし, 和 S_n が x_k, α_k の選び方によらず一定の値に収束するならば, この極限値を,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

で表し, a から b までの $f(x)$ の**定積分**という．また, この極限値が存在するとき, $f(x)$ は $[a,b]$ で**積分可能**であるという．

便宜上, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ と定めておく．

ここでは証明しないが, $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であれば, $f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能であることがダルブーによって示されている．

例 1.1.　$[0,1]$ で定義された次の関数は積分可能でないことを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ は有理数} \\ 1 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

解　$[0,1]$ を分割した小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から点 α_k を選ぶとき, α_k を有理数にすれば, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k = 0$．$\alpha_k$ を無理数にとれば, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_k = 1$ であるから, S_n は一定値に収束しない．よって, 積分可能でない．

定積分の性質

次に, 定積分の性質に関する定理を示す．いずれも定積分の定義と極限値の性質から容易に導かれる．

定理 1.1. $[a,b]$ で $f(x), g(x)$ が積分可能なとき,

(1) $\alpha f(x)+\beta g(x)$ も積分可能で　(α, β は定数)

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{(線形性)}$$

(2) $f(x) \geqq g(x)$ ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$　(単調性)

(3) $f(x)$ が $[a,c], [c,b]$ で積分可能なとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{(区間に関する加法性)}$$

上式は, a, b, c の大小を問わず成り立つことがわかる.

(4) $|f(x)|$ も積分可能で $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(5) $[a,b]$ で $m \leqq f(x) \leqq M, m, M$ は定数とする. このとき,

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

中間値の定理と (5) を用いると, 次の平均値の定理が証明できる.

定理 1.2 (積分に関する平均値の定理)．　$f(x)$ が $[a,b]$ で連続なとき, 区間 (a,b) 内のある α に対し,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\alpha)$$

微積分学の基本定理

ある閉区間で $f(x)$ が積分可能のとき, その区間内の一定点を a, 任意の点を x とすると, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は x の関数である. これを $f(x)$ の積分関数といい, $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ と書く. C を任意の定数とするとき, $F(x) = F_a(x) + C$ とおく.

定理 1.3.　区間 $[a,b]$ で $f(x)$ が連続ならば, $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は x について微分可能（したがって, 連続）で

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

すなわち, $F(x) = F_a(x) + C$ は $f(x)$ の原始関数である.

証明　平均値の定理より,

$$F(x+h) - F(x) = F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(\alpha), \quad \alpha \in [x, x+h]$$

$f(x)$ は連続であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

すなわち,

$$F'(x)=f(x). \qquad \square$$

この定理によって, 本章のはじめに述べた「連続関数には原始関数が存在する」ことが証明された. また,

$$F(b)-F(a)=F_a(b)-F_a(a)=\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^a f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$$

であるから

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

となることがわかり, 定理 1.3 と組み合わせると次の定理が得られる.

定理 1.4 (微積分学の基本定理) . $[a,b]$ で $f(x)$ が連続で, $F'(x)=f(x)$ のとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

このとき, 右辺を $[F(x)]_a^b$ と書く.

この定理によって連続関数の定積分を求めるには不定積分を求めればよいことになる.

例 1.2. $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ を求めよ.

解 $F'(x)=x^2$ より $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+c$ であるから,

$$\int_1^2 x^2\,dx=F(2)-F(1)=\left(\frac{2^3}{3}+c\right)-\left(\frac{1^3}{3}+c\right)=\frac{7}{3}$$

c は消えてしまうから, 書かなくてもよい.

問 1.1. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

例 1.3. 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \sin(t^4)\,dt}{x^5}$$

解　ロピタルの定理と定理 1.3 を用いて,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \sin(t^4)\,dt}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^4)\,dt}{\displaystyle\frac{d}{dx}x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^4)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3\cos(x^4)}{20x^3}=\frac{1}{5}$$

問 1.2. $f(x)$ を連続関数とするとき, 次の x の関数を微分せよ.

(1) $\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^{x+1} xf(t)\,dt$

置換積分と部分積分

不定積分を求めるときのテクニックを定積分の計算に使うことができる.

定理 1.5 (置換積分法).　$[a,b]$ で $x=\varphi(t)$ と $\varphi'(t)$ とが連続で, $x=\varphi(t)$ の値域において $f(x)$ が連続であるとき, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ とすれば,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

定理 1.6 (部分積分法).　$[a,b]$ で $f'(x), g'(x)$ が連続のとき,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

例 1.4. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

解　(1) $x=\sin t$ とおくと

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\sin^{-1}x^2=t$ とおくと, $x=0$ のとき $t=0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $t=\dfrac{\pi}{6}$ で,

$$dt=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

であるから, 求める積分は,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt=\frac{1}{4}\left[t^2\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi^2}{144}$$

次の直観的に明らかな事実も置換積分を用いて証明される.

例 1.5. $f(x)$ は連続であるとする．置換積分を用いて，次の関係が成立することを示せ．

(1) $f(x)$ が奇関数，すなわち，$f(-x)=-f(x)$ のとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

(2) $f(x)$ が偶関数，すなわち，$f(-x)=f(x)$ のとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

解　(1) のみについて示す．(2) も同様である．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ここで，$x=-t$ とおくと $dx=-\,dt$ であるから，

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(-t)(-\,dt)$$

一方，$f(-t)=-f(t)$ なので，右辺の積分は，

$$\int_{a}^{0} f(t)\,dt=-\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

に等しいので，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=0$$

となる．

問 1.3. 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}(3x-1)^2\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{x}{9+x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x-2}{x^2+x+1}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x(\log x)^4}$　　(5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$　$(a>0, b>0)$

例 1.6. 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\log(x+2)\,dx$

解　ともに，部分積分を使って計算できる．

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^x\,dx=[xe^x]_0^1-\int_{0}^{1} e^x\,dx=e-(e-1)=1.$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} x^2\log(x+2)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\log(x+2)\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\log 3-\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\log 3-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-8\log(x+2)\right]_0^1\\ &= 3\log 3-\frac{10}{9}-\frac{8}{3}\log 2.\end{aligned}$$

次に, 定積分で重要な公式を部分積分を使って導こう.

例 1.7. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ を示し, I_n を求めよ (n は 0 または自然数).

解 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$$

また, 第3章の例 2.4 (1) と同様の方法から

$$\int \sin^n dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

を得ることができるので,

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= \left[-\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx \\ &= \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2). \end{aligned}$$

$I_0 = \dfrac{\pi}{2}, I_1 = 1$ であるから,

$$n \text{ が 2 以上の偶数ならば} \quad I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n(n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ が 3 以上の奇数ならば} \quad I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{n(n-2)\cdots 5 \cdot 3}$$

注 1.1. 前半のより一般的な結果については問 1.6 の (1) を見よ.

問 1.4. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{3\pi} \sin^4 \frac{x}{3}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2}\,dx$

問 1.5. $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x$ であることを使って, 次の式 (ウォリスの公式) を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right\}^2 = \pi$$

定積分に関するさまざまなことを以下に述べよう．

不定積分の計算が難しくても，定積分は簡単に計算できる場合もある．

例 1.8. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ を求めよ．

解　$x=\pi-t$ とおくと，

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

ゆえに，

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \frac{\pi}{2}\Big[-\tan^{-1}(\cos t)\Big]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 1.9. $f(x)$ は連続であるとする．すべての a について，$\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{2\pi} f(\sin x)dx$ を示せ．

解 $t=x-2\pi$ とおくと，$dt=dx$ であるので，

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(\sin x)dx = \int_0^a f(\sin(t+2\pi))dt.$$

ここで，$\sin(t+2\pi)=\sin t$ であるので，

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(\sin x)dx = \int_0^a f(\sin(t+2\pi))dt = -\int_a^0 f(\sin t)dt.$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_a^{2\pi+a} f(\sin x)dx &= \int_a^0 f(\sin x)dx + \int_0^{2\pi} f(\sin x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(\sin x)dx\\ &= \int_a^0 f(\sin x)dx + \int_0^{2\pi} f(\sin x)dx - \int_a^0 f(\sin t)dt\\ &= \int_0^{2\pi} f(\sin x)dx.\end{aligned}$$

問 1.6. $f(x)$ は連続であるとする．置換積分を用いて，次の関係が成立することを示せ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)\,dx$

問 1.7. m を任意の実数とするとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x}\,dx$ の値を求めよ．

次の例と問はフーリエ級数の理論を展開するときに使われる.

例 1.10. m, n を自然数とするとき, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$ を求めよ.

解 加法定理より, $\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}$ であるから,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx\right\}$$
$$= \int_0^{\pi} \cos(m+n)x\, dx + \int_0^{\pi} \cos(m-n)x\, dx = \int_0^{\pi} \cos(m-n)x\, dx$$

ゆえに,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

問 1.8. m, n を自然数とするとき, 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx$

例 1.11. m, n を自然数とするとき, $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx$ を求めよ.

解 部分積分を用いて,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx &= \left[-x^m \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}\, dx \\
&= \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}\, dx \\
&= \frac{m}{n+1}\frac{m-1}{n+2}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^{n+2}\, dx \\
&= \cdots \\
&= \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\int_0^1 (1-x)^{n+m}\, dx \\
&= \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\left[\frac{-(1-x)^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\cdot\frac{1}{n+m+1} \\
&= \frac{n!m!}{(n+m+1)!}
\end{aligned}$$

問 1.9. m, n を自然数とするとき, 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$ (2) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\, dx$

例 1.12. 次の式を証明せよ. ただし, n は 3 以上の自然数である.

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

解 $0 < x < \dfrac{1}{2}$ において, $1 < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

より問題の不等式は証明される.

問 1.10. 次の式を証明せよ. ただし, n は自然数である.

$$\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx < \frac{1}{n+1}$$

区分求積法

定積分を使って, 級数の値を計算できる場合もある.

$[a, b]$ で $f(x)$ が連続だとしよう. $[a, b]$ を n 等分し α_k を各小区間の右端の点とすれば,

$\alpha_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $\delta_k = \dfrac{b-a}{n}$ である. $f(x)$ は積分可能であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\delta_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\, dx$$

が得られる.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\, dx$$

特に, $a = 0$, $b = 1$ とすると,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

例 1.13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right\}$ を計算せよ.

解 上に述べたことを使い,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2$$

このような級数の求め方を**区分求積法**という.

問 1.11. 次の極限値を区分求積法で求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right\}$$

2　広義積分

これまでは定積分を有限区間における有界な関数に限って扱ってきたが, これだけでは実際には不便なことが起こるので, 定積分の定義を拡張して, 積分区間が無限に延びている場合や, $[a,b]$ 内のいくつかの点で $f(x)$ が定義されていなかったり, 有界でないような場合も考えることにする. このような領域での積分は, 広義積分, あるいは, 異常積分とよばれ, 極限値によって次のように定義される.

例 2.1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ.

解　積分区間が無限に延びていて, 任意の数 a に対して, $[0,a]$ で積分可能な場合である. 次のように計算する.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_0^a = \lim_{a\to\infty}\tan^{-1}a = \frac{\pi}{2}.$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ なども同様に定められる.

例 2.2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ を求めよ.

解　$x\to+0$ のとき, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to\infty$ で, $0<a\leqq 1$ なる任意の数 a に対して, $[a,1]$ で積分可能な場合である.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2$$

例 2.3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を求めよ.

解　$x\to 1-0$ のとき, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\to\infty$ で, $0\leqq a<1$ なる任意の数 a に対して, $[0,a]$ で積分可能な場合である.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1-0}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1-0}\left[\sin^{-1}x\right]_0^a = \lim_{a\to 1-0}\sin^{-1}a = \frac{\pi}{2}$$

例 2.4. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ を求めよ.

解 $x \to 0$ のとき, $\dfrac{1}{x} \to \infty$ で, $-1 \leqq a < 0 < b \leqq 1$ を満たす任意の a, b について, $[-1, a]$ と $[b, 1]$ で積分可能である.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x}$$

とし,

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} = \lim_{a\to-0}\int_{-1}^{a}\frac{dx}{x} = \lim_{a\to-0}[\log|x|]_{-1}^{a} = \lim_{a\to-0}\log|a| = -\infty$$

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+0}\int_{b}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+0}[\log|x|]_{b}^{1} = -\lim_{b\to+0}\log b = \infty$$

となるので, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ は存在しない (積分不可能).

注 2.1. a, b を独立に 0 に近づけるので, $\log|a| - \log b \to 0$ とはならない.

広義積分が存在するとき, $f(x)$ は（広義）積分可能である, または（広義）積分が収束するという. (例 2.1, 2.2, 2.3.)

例 2.4 の点 0 について考える. $c < 0 < d$ を 0 の近くにとると, 区間 $[c, d]$ の部分閉区間 $[c', d']$ が 0 を含まなければ, $\dfrac{1}{x}$ は $[c', d']$ で狭い意味で積分可能であるが, 0 を含めば, 狭い意味で積分可能でない. このようなとき, 点 0 は**特異点** であるという.

ここでは, 厳密な定義は述べずに, 具体的な例をあげて広義積分の定め方を示したが, 実用上これで十分であろう.

また, 広義積分においても, 収束性に注意して置換積分や部分積分等, 通常の積分の計算方法を用いることができる.

問 2.1. 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} x^{\alpha}\,dx \quad (\alpha > -1)$　(3) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$

(4) $\displaystyle\int_{e}^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^2}$　(5) $\displaystyle\int_{0}^{1}\log x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$　(8) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$　(9) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^4+4}$

ガンマ関数とベータ関数

広義積分で定義される 2 つの関数を紹介する. これらは, 重積分の章で述べる $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値と合わせて, いろいろな定積分の値を求めるのに有効である.

$s > 0$ のとき, $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ は収束することが知られている. そこで,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

とおくと, 区間 $s > 0$ において 1 つの関数が定義される. この関数を Euler の**ガンマ関数** (**Γ 関数**) という.

例 2.5. $\Gamma(s)$ に対して, 次の関係式が成り立つことを示せ.
(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
(2) n を自然数とするとき, $\Gamma(n) = (n-1)!$

解 (1) $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx = \Big[-e^{-x}x^s\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx = s\Gamma(s)$

(2) (1) より

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\Gamma(1)$$

ここで,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = 1$$

よって,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

注 2.2. $\Gamma(0.5) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ において, $\sqrt{x} = t$ とおくと, $\Gamma(0.5) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ が得られる. この値は $\sqrt{\pi}$ であることが p.156 で示されるが, 次の問には必要はない.

問 2.2. 次の値を求めよ.
(1) $\dfrac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$ (2) $\dfrac{\Gamma(2.5)}{\Gamma(0.5)}$ (3) $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}$ (4) $\dfrac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$

s が大きくなると, $\Gamma(s)$ の計算は非常に困難になるが, 次の関係式

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s}\,s^s e^{-s} e^{\frac{\theta}{12(s+1)}} \quad (0 < \theta < 1)$$

が使われる. 大きな s に対しては $e^{\frac{\theta}{12(s+1)}}$ は 1 に近く省略できる. また, この式から整数 n に対して,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$$

ということが読み取れる. "$\sim$" は, 大きな n に対してほぼ等しいという意味である. この式は $n!$ が 十分大きな n に対して, どのくらいの程度で大きくなるかを示しており, **スターリングの公式**という.

問 2.3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ を求めよ．

$p>0,\ q>0$ のとき，

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束することが知られている．$B(p,q)$ を**ベータ関数** (**β 関数**) といい，次の関係が知られている．この式の証明は第 7 章の例 3.6 で示す．

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

例 2.6. 次の等式を証明せよ．

(1) $B(p,q)=B(q,p)$　　(2) $B(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$

解　(1) は $x=1-y$, (2) は $x=\sin^2\theta$ とおいて置換積分せよ．

問 2.4. Γ 関数と β 関数を使って，次の積分の値を求めよ．(n は自然数で，$m>-1$)

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta\,d\theta$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx$

3　定積分の応用

面積

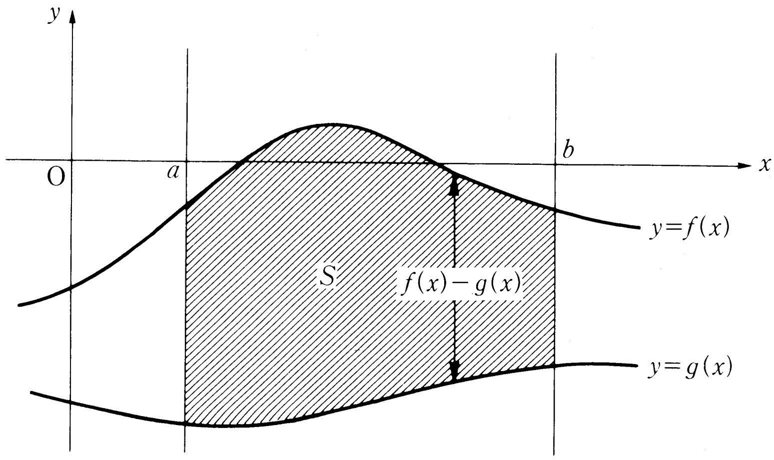
$[a,b]$ において $f(x)$ は有界，連続で，$f(x)\geqq 0$ であるとする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が定まる．この値を，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a, x=b$ および x 軸とで囲まれた図形の面積 S とすることは，定積分の定義を考えれば自然な考えであろう．すなわち，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

である．

Point. この事実は知っている人も多いだろうが，高校では $f(x)$ は連続だと仮定して，面積に対応する関数 $S(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ の微分が $f(x)$ と等しくなると説明されたはずである．定積分の定義と，細い長方形の和で面積を近似していく考え方にたてば，連続でなくても面積を計算できる場合がある．また，質量・エネルギーなど様々な量を微小な部分の和で近似

していく定積分の考え方は理工学で重要である.



定理 3.1. $[a,b]$ で連続な2つの関数 $f(x), g(x)$ があって, $f(x) \geqq g(x)$ であるとき, 2つの曲線 $y=f(x), y=g(x)$ と2直線 $x=a, x=b$ とによって囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

円の面積を計算してみよう.

例 3.1. 円 $x^2+y^2=a^2$ の面積を求めよ. $(a>0)$

解 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ であるから,

$$S=4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}a\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta=4a^2\frac{\pi}{4}=\pi a^2$$

注 3.1. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の面積は πab であることが, まったく同様な計算で示されるので確かめてみよ.

問 3.1. 次の面積を求めよ.

(1) 曲線 $y=x(x-1)$ と x 軸との間の部分

(2) 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸と y 軸とで囲まれる部分

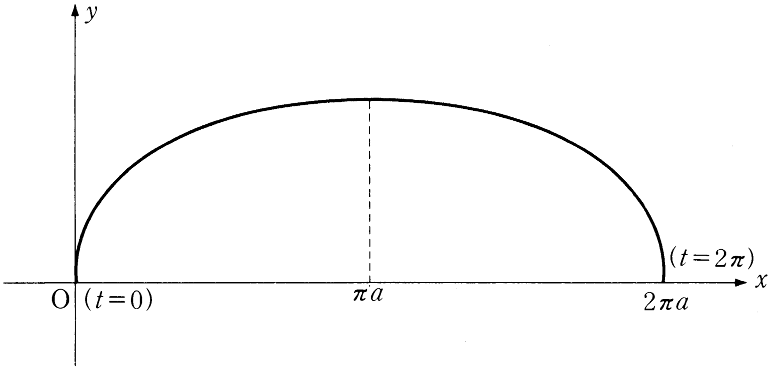
問 3.2. 2つの放物線 $y^2=4px, x^2=4py$ で囲まれる部分の面積を求めよ. $(p>0)$

問 3.3. 曲線 $y^2=x(x-a^2)^2$ の囲む部分の面積を求めよ. $(a\neq 0)$

曲線がパラメータで表されているときは, 置換積分の考え方で処理できる.

例 3.2. サイクロイド $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqq t\leqq 2\pi$ と x 軸の囲む面積を求めよ.

解　この曲線は下図のようになり，$t=0$ のとき $x=0,\ t=2\pi$ のとき $x=2\pi a$ である．



$x'(t)=a(1-\cos t)$ より，

$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

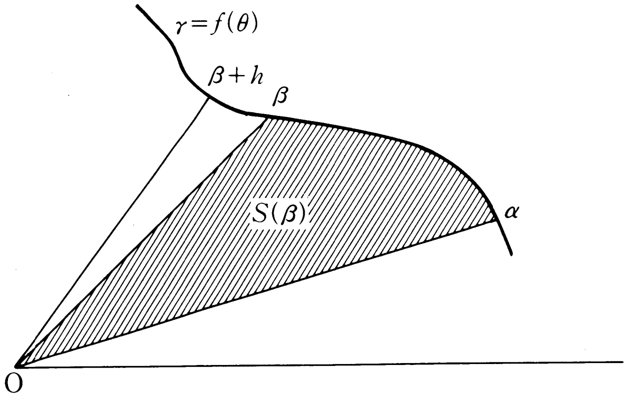
$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0,\ \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$ に注意して

$$S=3\pi a^2$$

を得る．

問 3.4. 曲線 $x=t^3,\ y=t^2-4\quad(0\leqq t\leqq 2)$ と両座標軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

次に，極座標によって方程式 $r=f(\theta)$ で表される曲線と，極を通り偏角が α,β なる 2 直線によって囲まれる図形の面積 S を考えよう．



上の図で，2 直線 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ と曲線 $r=f(\theta)$ によって囲まれる図形の面積は α を固定すれば β によって決まるので，これを $S(\beta)$ とおく．閉区間 $[\beta,\beta+h]$ における $f(\theta)$ の最大値，最小値をそれぞれ M,m とすると，

$$\frac{1}{2}m^2h\leqq S(\beta+h)-S(\beta)\leqq\frac{1}{2}M^2h$$

したがって,

$$\frac{1}{2}m^2 \leqq \frac{S(\beta+h)-S(\beta)}{h} \leqq \frac{1}{2}M^2$$

ここで, $h \to 0$ とすると, $m, M \to f(\beta)$ であるから,

$$S'(\beta) = \frac{1}{2}f(\beta)^2$$

よって, 求める面積 $S(\beta)$ は

$$S(\beta) = S(\beta) - S(\alpha) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$$

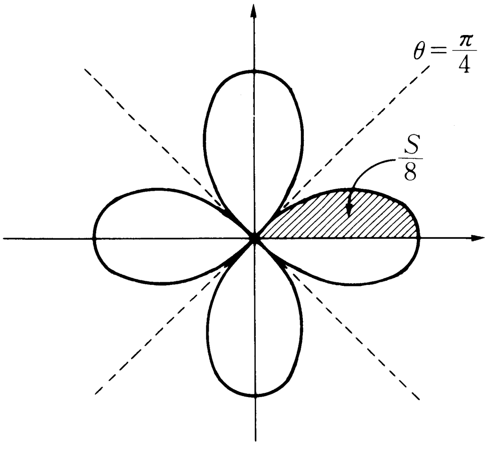
定理 3.2. $r = f(\theta)$ で表される曲線と, 極を通り偏角が α, β なる 2 直線によって囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$$

例 3.3. 曲線 $r = |a\cos 2\theta|$ の囲む部分の面積を求めよ. $(a > 0)$

解 $[0, \frac{\pi}{4}]$ にある図形の面積の 8 倍を求めればよいから,

$$S = 8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)\,d\theta = 2a^2\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}a^2.$$



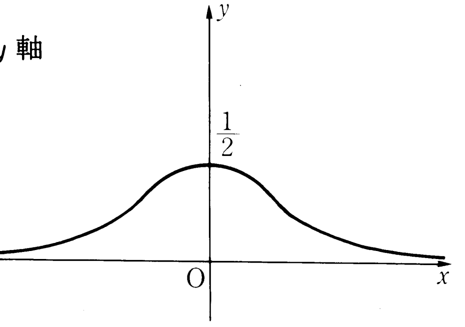
問 3.5. 円 $x^2 + y^2 = a^2$ の極方程式は $r = a, \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であることを用いて, 円の面積を計算せよ.

問 3.6. 曲線 $r = a|\sin 3\theta|$ の囲む面積を求めよ. $(a > 0)$

問 3.7. レムニスケート $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ の囲む面積を求めよ.

無限に延びている図形に対しても, 広義積分を使えば, 面積に当たるものを定められる.

例 3.4. 曲線 $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ と x 軸との間の面積を求めよ.



解 図のように, この曲線は x 軸を漸近線にもち, y 軸に対して対称である. 求める面積 S は,

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \\
&= 2\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx.
\end{aligned}
$$

$e^x = t,\ b = e^a$ とおくと, $e^x\,dx = dt$ でこの積分は,

$$
2\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} t\right]_1^b = 2\lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.
$$

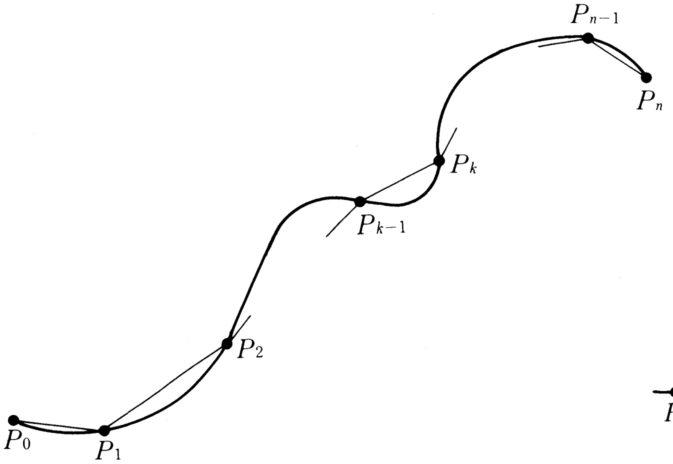
問 3.8. 次の図形の面積を求めよ.

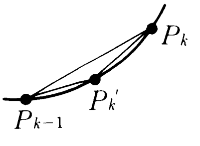
(1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x^2}$ と x 軸の $x \geqq 1$ の部分, および直線 $x = 1$ とで囲まれた図形.

(2) 曲線 $y = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ と x 軸との間の部分.

曲線の長さ

閉区間 $[a, b]$ における曲線 $y = f(x)$ の長さを考えよう. 図のように, $P_0(a, f(a))$ と $P_n(b, f(b))$ の間に, 順に区分点 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ をとる. 曲線の点 P_{k-1} と点 P_k の間の部分を線分 $P_{k-1}P_k$ でおきかえ, それらをつなげた折れ線で曲線を近似してみよう. いいかえれば, 折れ線の長さの総和を考えるのである. もし, さらに区分点を追加すれば, 明らかにこの和は大きくなる. そこで, 曲線のあらゆる分割に対する折れ線の長さの上限を, この曲線の長さとするのである.





注 3.2. 以下の曲線の長さについての定理で仮定されている条件は，この上限が存在するための十分条件である．

$f(x)$ は $[a,b]$ で定義された関数で，$f'(x)$ は連続であるとする．$[a,b]$ における曲線 $y=f(x)$ の長さは，定積分によって計算することができる．

$[a,b]$ を n 個に分割し，区分点を $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$, $x_0 = a, x_n = b$ とする．各 x_k に応じて，曲線上にも区分点 $P_k\,(x_k, f(x_k))$ がとれる．曲線の点 P_{k-1} と点 P_k の間の部分を線分 $P_{k-1}P_k$ でおきかえ，それらをつなげた折れ線で曲線を近似してみよう．2 点 P_{k-1}, P_k の距離は，

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2}$$

平均値の定理より，$\alpha_k \in (x_{k-1}, x_k)$ で

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\alpha_k)(x_k - x_{k-1})$$

を満たすものが存在する．このとき，

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + (f'(\alpha_k))^2}(x_k - x_{k-1})$$

である．分割を限りなく細かくするとき，$\delta_k \to 0$ で，右辺の極限は定積分の定義から，

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

となる．実際，次の定理が成り立つ．

定理 3.3. 閉区間 $[a,b]$ で関数 $f(x)$ が定義されていて，$[a,b]$ で $f'(x)$ が連続なとき，$[a,b]$ における曲線 $y=f(x)$ の長さ L は，

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

例 3.5. 密度が一様な綱が，両端を地面から同じ高さに固定されてつるされているとき，この綱の形状は懸垂線 (カテナリー) とよばれ，次の方程式

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

で表されることが知られている (p.32 参照)．ここで，a は正の定数である．この曲線上の $x=0$ に対応する点から $x=b$ に対応する点までの曲線の長さを求めよ．ただし，$0<b$ とする．

解　$y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ であるから，

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

である．よって，求める曲線の長さ L は，

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^b \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{1}{2}\left[ae^{\frac{x}{a}} - ae^{-\frac{x}{a}}\right]_0^b = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right)$$

問 3.9. 次の曲線の長さを求めよ．

(1) 曲線 $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$ の $0 \leqq x \leqq 8$ の部分

(2) 曲線 $3y^2 = x(x-1)^2$ の輪線部

一般に曲線がパラメータを使って表されているときには, 次のことが成り立つ．

> **定理 3.4.** 曲線 C がパラメータ t を使って
>
> $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \leqq t \leqq b$$
>
> と表されているとき, $\varphi'(t), \psi'(t)$ が $[a, b]$ で連続ならば, C の長さ L は,
>
> $$L = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$
>
> で与えられる．

例 3.6. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$ の全長 L は次の式で表されることを示せ．

$$L = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + e^2\sin^2 t}\, dt, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

解　楕円のパラメータ表示 $x = a\cos t, y = b\sin t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ を利用してみよう．
$x'(t) = -a\sin t, y'(t) = b\cos t$ より,

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}$$

$a^2 - b^2 = b^2e^2$ を代入すると, 上の式は $\sqrt{b^2e^2\sin^2 t + b^2}$ となる．
したがって楕円の全長 L は,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + e^2\sin^2 t}\, dt$$

である．

問 3.10. 次の曲線の長さを求めよ．ただし a は正の定数である．
(1) $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の部分
(2) サイクロイド $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

定理 3.4 の特別な場合として次の定理が得られる．

定理 3.5. 曲線 C が極座標を使って,

$$r = f(\theta), \quad \alpha \leqq \theta \leqq \beta$$

と表され, $f'(\theta)$ が連続ならば, C の長さ L は,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$$

で与えられる.

証明　$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$, $y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$ であるから, 曲線 C がパラメータ θ を使って表されている. 定理3.4 より,

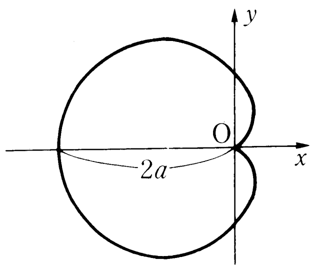
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta$$

$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$, $y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$ であるから,

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2$$

となり, 定理が証明される.　□

例 3.7. カージオイド $r = a(1 - \cos\theta)$ の全長を求めよ.



解　$r'(\theta) = a\sin\theta$ であるから,

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= a^2\left\{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right\} \\ &= 2a^2(1-\cos\theta) = 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ゆえに,

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 4a\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi = 8a$$

問 3.11. 曲線 $r = a\theta$ の $0 \leqq \theta \leqq \alpha$ の部分の長さを求めよ. a は正の定数である.

問 3.12. レムニスケート $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ $(a > 0)$ の全長は次の式で表されることを示せ.

$$L = 4\sqrt{2}a\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

第4章　練習問題

1. 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{x^2-4}{x^2+4}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^5e^{-x^3}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^6 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(3\sin x+4\cos x)^2}$　(6) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$　(8) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$　(9) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin^2 x dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\tan x)dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cos^2 x}{1+\cos^2 x}dx$　(12) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$

2. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$　(2) $\displaystyle\int_0^{2a}\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$　$(a>0)$

(3) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$　$(a>0)$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^n e^{-x}\,dx$　(n は自然数)　(6) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $\displaystyle\int_1^x\frac{t}{1+t^2}dt$　(2) $\displaystyle\int_2^{3x+1}e^t dt$　(3) $\displaystyle\int_1^{e^x}\log t dt$　(4) $\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt$

4. 自然数 n に対して, $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$ とするとき, $I_n=I_{n-1}$ を示し, これを用いて I_n の値を求めよ.

5. 定積分を利用して次の不等式を示せ.

(1) $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}dx<2-\sqrt{4-\pi}$

(2) $\displaystyle\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx<\frac{\pi}{6}$

(3) $n\geqq 2$ のとき, $\displaystyle\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$

(4) $\displaystyle 2(\sqrt{n+1}-1)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

6. Γ 関数と β 関数に関する公式を用いて次の値を求めよ.

(1) $\Gamma(5)$　(2) $\displaystyle\frac{\Gamma(4.1)}{\Gamma(1.1)}$　(3) $B\left(\dfrac{3}{2},2\right)$　(4) $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

(5) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x dx$　(7) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$

7. 2つの楕円 $x^2+4y^2=1,\ 4x^2+y^2=1$ の囲む部分の面積を求めよ.

8. 放物線 $y^2=4px$ と, その焦点を通り傾きが m の直線との囲む部分の面積を求め, かつその面積が最小となるときの直線の方程式を求めよ.

9. アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$ の囲む面積, およびその長さを次のパラメータ表示を使って求めよ.

$$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t \quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

10. 曲線 $x=t^2,\ y=t-t^3$ の囲む部分の面積を求めよ.

11. 曲線 $r=a(1-\sin\theta)$ で囲まれた図形の面積を求めよ. ($a>0$ とする. この曲線は例 3.7 のカージオイドと同じ形をしている.)

12. 曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ とその漸近線, および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ. ($a\neq b$)

13. 放物線 $y=x^2$ の $0\leqq x\leqq 1$ の部分の長さを求めよ.

14. 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の全長を求めよ.

15. 曲線 $r=e^{\theta}$ の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを求めよ.

16. 追跡線 $x+\sqrt{a^2-y^2}=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\ (a>0)$ の2点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ の間の長さを求めよ.

17. 次の級数を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

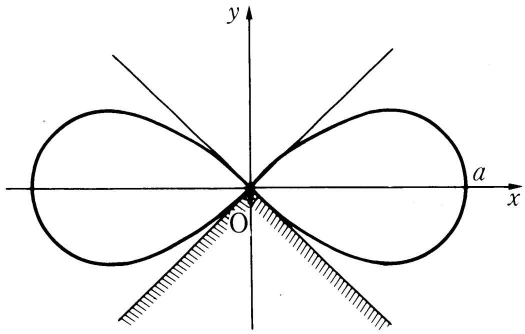
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\left(\sin\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{2\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+n\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$

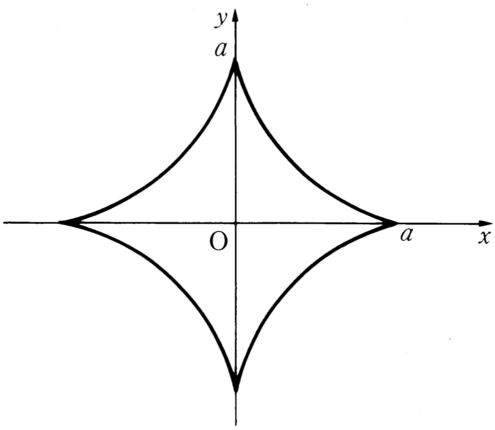
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\log\frac{n+1}{n}+\frac{1}{n+2}\log\frac{n+2}{n}+\cdots+\frac{1}{n+n}\log\frac{n+n}{n}\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)$

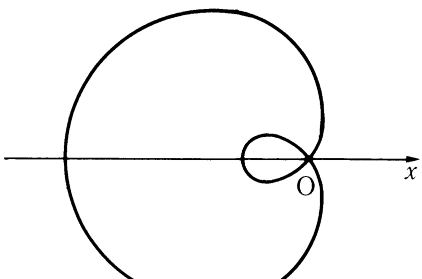
平面曲線の図



レムニスケート $(r^2=a^2\cos 2\theta)$



アステロイド $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0))$



リマソン $(r=b-a\cos\theta\,(a>b>0))$

第5章

微分方程式

この章では，微分方程式とは何か？について述べる．微分方程式についての多くの図書の形式はとらず，ここでは「微分方程式はどのようにして得られるのか」を自然界の現象に重点をおき解説する．このため，文章による説明が長くなるが，このようにすることにより，より多くの学生が, 微分方程式の重要性を認識できるものと考える．

1　微分方程式について

例 1.1 (人口問題)．私達はよく，日本の人口の増加率は年 1.4 % だとかいう．これは, ある時点での人口が 1 億人だとしたら, 1 年後には $1 \times (1+0.014) = 1$ 億 140 万人になるということだ. 世界規模での人口 (増加) 問題は, 現在もっとも緊急な課題の一つだが, それは, “何年後には世界の人口がこれだけになる” という予測の上に立っている．どのようにしたら, そのような予想が立てられるのだろうか．

適当に時間を設定して, 時刻 t のときの人口を $y(t)$ とすると, 時間が Δt だけ経過したときの人口の増加率は，次の式で表せる．

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

人口は減少するかもしれないが, その場合は負の数になっている．

上の増加率を一人あたりに直すと,

$$a(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)\Delta t}$$

になる．話を簡単にするために, どの時点でも, それから Δt 経過する間の増加率が一定の値 a だとする．そうすると, Δt だけ経過した後の人口は

$$y(t+\Delta t) = y(t) + ay(t)\Delta t = (1 + a\Delta t)y(t)$$

ということになる．そこで，$t=0$ のときの人口を A とすると，Δt だけ時間が経過するごとの人口は

$$\begin{aligned}
y(\Delta t) &= (1+a\Delta t)A \\
y(2\Delta t) &= (1+a\Delta t)y(t+\Delta t) = (1+a\Delta t)^2 A \\
y(3\Delta t) &= (1+a\Delta t)y(t+2\Delta t) = (1+a\Delta t)^3 A \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

このように，時刻 $n\Delta t$ では

$$y(n\Delta t) = (1+a\Delta t)^n A$$

になる．ここで $\log(1+a\Delta t) = b$ とすると，$1+a\Delta t = e^b$ だから，

$$y(n\Delta t) = e^{bn} A$$

である．

ところで，人口やバクテリアの個体数などは，ある区切られた時間間隔で変化するというよりも，刻一刻変化していくと考える方が自然である．そこで，前に与えた Δt 内での平均の増加率 $a(t)$ の代わりに，$\Delta t \to 0$ とした極限，瞬間の変化率を考えてみる．それを k と書くと

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)\Delta t} \\
&= \frac{1}{y(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{y(t)} \frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

という式が現れる．逆に，この式を満たす t の関数として，時刻 t における人口が定まると考えられる．

例 1.1 のような方程式は **微分方程式** とよばれる．未知の関数 $f(x)$ を見つけるための方程式で，その未知関数の導関数 $f'(x)$ が現れる方程式のことを，**微分方程式**という (二階導関数 $f''(x)$ や，もっと階数の高い導関数がでてくる場合もある)．

たとえば，

(1) 関数 $g(x)$ が与えられていれば，微分方程式 $y' = g(x)$ は $\int g(x)dx$ で満たされる．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$ は，落下する物体の式 $y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$ で満たされる．

Newton が微積分を発見して以来, 人類は, 微分方程式を作って, それを解くことにより, さまざまな現象を説明したり, 未来を予測して来た. 応用面で微分方程式がなぜ基本的かというと, 関数 $y(t)$ を直接知ることができない場合が多いからだ. 物理や経済の基本法則を数学的に書き直して, $y(t)$ の変化率に関する情報を得て, それを使って $y(t)$ を見つけなければならない. 上の例の微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$ は単に, "地表近くの重力は一定の加速度を生む" ということである.

人口が連続的に k の割合で増加する場合の基本法則は, "**どんな時でも人口は, 時間に対して, その時点の人口に k をかけたものに等しい割合で変化する**" ということである. 例えば, $k = 4\% = 0.04$ で, ある国の人口が 1 億人だとしたら, 最初は年に 400 万人の割合で増えていく; けれども, 少しして人口が 1 億 100 万人になったときには, 年に 404 万人の割合で増加していることになる. これは, 銀行に預金したり, ローンを組んだりすると, 利息が利息を生むのと似ている. 太字の部分の法則は次のように数式で表すことができる:

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

つまり, t 年目の人口を表す関数 $y(t)$ は, この関数の現在の値に k をかけたものに等しい割合で増加する.

2 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = ky$

この微分方程式を解いて, y を t で表した式を求める. これだけでなく, 他にも多くの方程式に使える便利な方法で, "**変数分離**" というものがある. これは, y を含んだものはすべて方程式の一方の辺に集め, t を含むものは全部他の辺に集めてしまうことを意味する. このときに, dy と dt は代数的な量であるように扱われる.

例 2.1 (微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = ky$ の解法) .
1 st step: 方程式の両辺に dt をかけ, 両辺を y で割る:

$$\frac{1}{y}\, dy = k\, dt$$

になる.
2 nd step: 両辺に積分記号 $\int$ をつける:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int k\, dt$$

になる.

3 rd step: 両辺の不定積分を計算する:

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \log|y| + C_1, \\ \text{右辺} &= kt + C_2. \end{aligned}$$

積分定数の C_1 を右辺に移項して C_2 からひいて, $C = C_2 - C_1$ とする：

$$\log|y| = kt + C$$

となる.

最終 step: y について解くために, 両辺の指数巾を考える：

$$e^{\log|y|} = e^{kt+C}.$$

$e^{\log|y|} = |y|$ だから, y についての式が得られる：

$$y(t) = \pm e^{kt+C} = \pm e^C e^{kt}.$$

方程式はこれで解けたが, 人口問題を考えれば, 全部がすんだわけではない. まだ, e^{kt} の前の定数 e^C を決めなければならない. これには, 最初の時点の情報を使うことができる. この問題では, 最初の時点の情報は $t = 0$ のとき $y(0) = A$ だった. 等式 $y(t) = \pm e^C e^{kt}$ に $t = 0$ を代入して：

$$A = y(0) = e^C e^0 = e^C.$$

だから, 次のように y を決定することができた：

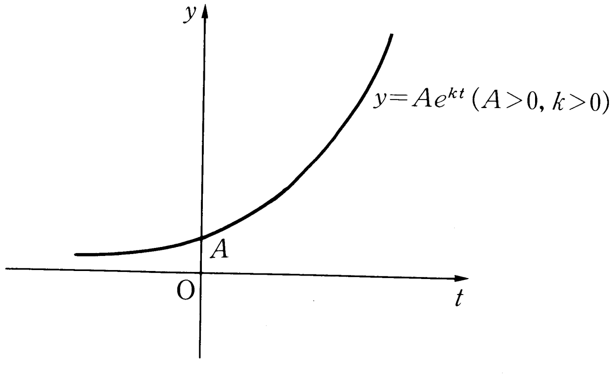
$$y(t) = Ae^{kt}.$$

問 2.1. 次の微分方程式を, 例 2.1 の手順にしたがって解け.

(1) $\dfrac{dy}{dt} = y$ ($t = 0$ のとき, $y = 1$), (2) $\dfrac{dy}{dt} = 3y$ ($t = 0$ のとき, $y = -2$).

3 指数関数的成長と減少

$y = Ae^{kt}$ の形をした関数は **指数関数的成長** とよばれる. そのグラフは下のような形をしている.



例 3.1 (2倍になるのにかかる時間). 時刻 t での人口は Ae^{kt} だとする. 人口が 2倍になるのには, どれだけ時間がかかるだろうか.

2倍になるのにかかる時間を T とすると:

$$Ae^{k(t+T)} = 2Ae^{kt}$$

という等式が成り立つ. 両辺を Ae^{kt} で割り, 対数をとると:

$$kT = \log 2,$$

となるので

$$T = \frac{1}{k}\log 2.$$

注意. 2倍になるのにかかる時間 T は, どの時点から測るかにはよらないし, 最初の人口 A にも無関係なことに注目しよう. **T は増加率 k だけによって決まる**. たとえば, 増加率 4 % では, 2倍になるのにかかる時間は

$$\frac{\log 2}{0.04} = 17.32867\cdots(年).$$

問 3.1. 3倍になるのにかかる時間や, 一般に n 倍になるのにかかる時間について考えてみよ.

問 3.2. 最近の世界人口は, 38 年で 2 倍になるスピードで増加している. 年間の増加率 (k の値) を計算せよ.

これまでのことから, 増加率がその時点の値に比例する場合 (つまり $dy/dt = ky$ の場合) には, 指数関数 $y(t) = y_0e^{kt}$ が得られ, k は現在の値に対する増加率の比例定数で, y_0 は関数の初期値であることがわかった.

例 3.2. ある国の人口が 30 年間で2倍になるとする. 増加率が住民の数に比例すると仮定した場合, 人口が3倍になるには何年かかるか.

解 $y(t) = Ae^{kt}$ とおけて, 30 年間で 2 倍になることから,

$$e^{30k} = 2.$$

これより

$$k = \frac{1}{30}\log 2.$$

T 年後に 3 倍になるとすると,

$$e^{kT} = 3.$$

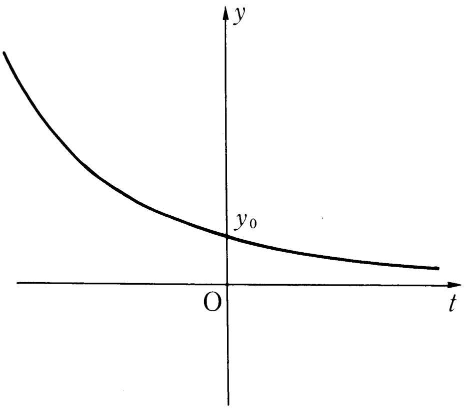
したがって,

$$T = \frac{1}{k}\log 3 = \frac{30\log 3}{\log 2} \fallingdotseq 47.55.$$

約 48 年で 3 倍になる.

問 3.3. ウイスキーやビールの原料となるモルトの増加率は, その時点での存在量に比例する．最初 2 グラムだったのが, 2 日後には 3 グラムに増加した．10 日後には何グラムになるか．

今度は, 現在の値に比例して減少する関数 $y(t)$ を考えてみる．比例定数を $-k$ とすれば, $\dfrac{dy}{dt} = -ky$. 数学的には, 何も変わりはなく, ただ k が $-k$ になっただけで, $t=0$ のとき, $y = y_0$ とすれば関数 $y = y_0e^{-kt}$ が得られる．けれども, y_0e^{-kt} のグラフは y_0e^{kt} のグラフとは非常に違って見える．それは, t が増加していくときに, 急速に減少して 0 に近付いていくからである．



問 3.4. 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dt} = -y \quad (t=0\text{ のとき}, \ y=100)$,　(2) $\dfrac{dy}{dt} = -2y \quad (t=0\text{ のとき}, \ y=10)$

例 3.3 (半減期)．指数関数的に減少する関数 $y(t) = y_0e^{-kt}$ には, 半減期というものがある．これは現在の値が半分の値に減少するのにかかる時間である．半減期 T を求めてみよ．

2 倍になる時間を求めたときと同じように, 次の等式が成り立つ：

$$y_0e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2}y_0e^{-kt}.$$

両辺を y_0e^{-kt} で割って, 対数をとると

$$-kT = \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

となるので

$$T = \frac{\log 2}{k}.$$

指数関数的に増大する関数が 2 倍になるのにかかる時間と, まったく同じである．

例 3.4 (放射性崩壊)．未来のある日, 地球を訪れた宇宙人が目にしたのは, はるか前に起きたカタストロフにより生物が住めなくなった惑星の姿であった．優れた科学力で, 彼らはそのときに放出された放射性プルトニウム 239 の量を決定した．また, 残存しているプルトニウム 239 の量は, その 1/500 であることもわかった．プルトニウム 239 の半減期は 24400 年として, 地球壊滅は何年前のことだったかを決定せよ．

この問題では, 最初に k を決定する :

$$kT = \log 2$$

を用いて,

$$k = \frac{\log 2}{24400}.$$

次に

$$y(t) = y_0 e^{-kt} = \frac{1}{500} y_0$$

から,

$$e^{-kt} = \frac{1}{500}$$

を得る. この対数をとれば,

$$-kt = \log \frac{1}{500} = -\log 500.$$

ゆえに

$$t = \frac{24400 \log 500}{\log 2} \fallingdotseq 218800.$$

例 3.4 はSFの世界だが, あなたは "発掘されたミイラは何千年前のものだ" というニュースを聞いたことがあるにちがいない. 今まで学んだことから, どうしてそんなことがわかるのか, 想像がつくのではないか.

次の例の測定法を開発した W. Libby は1960年にノーベル化学賞を受けた.

例 3.5 (年代測定) . 生きている木の中の放射性炭素の崩壊速度は15.30 (dpm) である. ツタンカーメン王の墓の椅子の足に含まれる放射性炭素の崩壊速度を測ったら, 10.14 (dpm) だった. 半減期を 5,600 年とすると, ツタンカーメンはどのくらい前に生きていたか.

注. dpm とは, 1分間に放射性物質が出している放射線の数である.

解 生物が死ぬと, 空気中の炭素を取り込まなくなるので, 生物の体内にあった放射性炭素は, 方程式

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

にしたがって減少する. ツタンカーメンの時代が T 年前だとすると, 放射性炭素の崩壊する割合は, 存在する量に比例するので,

$$\frac{10.14}{15.30} = \frac{y(T)}{y(0)} = \frac{Ae^{-kT}}{Ae^0} = e^{-kT}.$$

したがって

$$-kT = \log\left(\frac{10.14}{15.30}\right).$$

一方, 半減期が 5600 年だから

$$5600 = \frac{\log 2}{k}.$$

これより

$$k = \frac{\log 2}{5600}.$$

ゆえに

$$T = -\frac{5600}{\log 2}\log\left(\frac{10.14}{15.30}\right) \doteqdot 3330.$$

問 3.5. 例 3.5 の放射性炭素を用いて, 次の実例の年代を推定せよ．これらは, 1950 年に発見され測定されたものである．

(a) ハンムラビ王の治世のバビロンの家の梁 : 9.52 (dpm)

(b) ネヴァダの Gypsum 洞窟内の地下 2 m から出土した, 大ナマケモノの糞 : 4.17 (dpm)

(c) ネヴァダの Leonard Rock Shelter で見つかった木の投げ槍 : 6.42 (dpm)

4　微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = k(y-a)$

次に, もう少し複雑な微分方程式を解いてみる．これまでは, $y' = \pm ky$ という形をしていたが, 今度は $y' = \pm k(y-a)$ という形の方程式である (a は定数)．やはりこれも, **変数分離**によって解くことができる．

$$\frac{dy}{dt} = k(y-a)$$

の両辺に dt をかけ, $y-a$ で割ったものを積分する．

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y-a} &= k\,dt \\
\int \frac{dy}{y-a} &= \int k\,dt \\
\log|y-a| + C_1 &= kt + C_2 \\
\log|y-a| &= kt + C \quad (C = C_2 - C_1) \\
|y-a| &= e^{kt+C} = e^C e^{kt} \\
y-a &= \pm e^C e^{kt}.
\end{aligned}$$

定数 e^C を決めるために, 初期条件 $t=0$ のとき, $y=y_0$ だとする．そうすれば, $t=0$ を代入して

$$y_0 - a = (\pm e^C)e^0 = \pm e^C.$$

したがって

$$y - a = (y_0 - a)e^{kt}.$$

微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = k(y-a)$ は $y = (y_0 - a)e^{kt} + a$ という解をもつ.

もちろん, 次のことも確かめられる:

微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -k(y-a)$ は $y = (y_0 - a)e^{-kt} + a$ という解をもつ.

問 4.1. 上の手順で, 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -k(y-a)$ を解け, ただし, $t = 0$ のとき $y = y_0$ とする.

問 4.2. 次の微分方程式を解け.
(1) $\dfrac{dy}{dt} = 3(y-1)$ ($t = 0$ のとき, $y = 2$), (2) $\dfrac{dy}{dt} = -2(y+1)$ ($t = 0$ のとき, $y = 0$).

例 4.1 (ニュートンの法則; 物体の冷却). ここにいうニュートンの法則とは次の内容である:

ある環境に物体が置かれると, 物体の冷却する割合は, 環境と物体の温度差に比例する.

時刻 t での物体の温度を $y(t)$, 最初の温度 ($t = 0$ のときの温度) を y_0, 環境の温度を a とする. ニュートンの法則は, 次のような微分方程式に直せる.

$$\frac{dy}{dt} = -k(y-a).$$

この式で, k は環境と物体の性質によって決まってくる正の比例定数である. **k の前に $-$ が必要**なのは, $y(t) > a$ ならば $\dfrac{dy}{dt}$ はマイナスで, $y(t) < a$ ならば $\dfrac{dy}{dt}$ はプラスだからである.

この方程式の解は $y(t) = a + (y_0 - a)e^{-kt}$ であることを, 私達はすでに知っている. 時間が経過すると, つまり, t が大きくなると, e^{-kt} は急速に小さくなっていくから, $y(t)$ は a に近づく. これは, "物体の温度は周囲の温度にいくらでも近くなっていく" という私達の経験に合致する. (ここでは, 周囲の温度 a は, 物体によって温められたり冷やされたりもせず, 一定のままだと仮定してる. エアコンの効いた広い部屋に, 熱いスープを置いた場合などが当てはまる.)

例 4.2. 93°C のコーヒーを, 室温が 18°C に保たれた部屋に置いた. 2 分後には, コーヒーは 68°C にまで冷めた. t 分後のコーヒーの温度を表す式を求めよ.

解 私達にわかっているのは $y_0 = 93$ と $a = 18$ ということだが, k がいくつかはわかっていない. けれども, $y(t)$ が次の形をした式だとはわかっている：

$$y(t) = a + (y_0 - a)e^{-kt} = 18 + 75e^{-kt}.$$

さらに $y(2) = 68$ という情報が使えて

$$\begin{aligned} 68 &= 18 + 75e^{-2k} \\ 50 &= 75e^{-2k} \\ \log\frac{50}{75} &= -2k \\ k &= -\frac{1}{2}\log\frac{50}{75} = \frac{1}{2}\log 1.5 = 0.203. \end{aligned}$$

これから, $y(t) = 18 + 75e^{-0.203t}$ である.

この例で得られた式は, $y(t) = 18 + 75\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{2}}$ とも書くことができる.

問 4.3. 鉄の球を 110° C に熱して 10° C の空気中に放置した. 1 時間後には, 球の温度は 60° C になった. 30° C にまで下がるには, それからさらにどれだけ時間がかかるか.

問 4.4. 気温が 17° C のときに, お湯が 97° C から 57° C まで 10 分間で冷えるとすると, 40 分後の温度は何度か.

例 4.3 (落下物体と空気抵抗) . 落下する物体の鉛直方向の運動は, 重力と空気抵抗の 2 つから影響を受ける. 地表近くでは, 重力は一定の加速度 g を引き起こす. 空気抵抗は, 物体の空力学的性質とスピードに左右される. 一般的に, 物体のスピードが大きい程空気の分子から受ける抵抗は大きくなる. ここでは, 空気抵抗は物体の速度に比例すると仮定する. その比例定数を k として, 物体の質量を m, 速度を v とすると, ニュートンの運動法則の式は次のようになる (加速度は速度の時間微分 $\dfrac{dv}{dt}$ であることに注意せよ).

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

つまり,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right).$$

これから,

$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

ただし, 物体の初速度 ($t = 0$ のときの物体の速さ) を v_0 としている.

問 4.5. 上の式で, 時間 t が大きくなっていくと, 物体の落下速度 v はどんな値に近づいていくかを考えよ.

問 4.6. 質量 m の物体が地表から上方に向かって, 初速度 v_0 で投げ上げられた. この物体の受ける力は, 地球による一定の重力と, 速度に比例する空気抵抗 (比例定数は k とする) だけだとする. 物体の最高到達点の, 地表からの高さは

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \log\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$$

であることを示せ. 抵抗を 0 に近づけていくとき, この数字はどうなるか調べよ.

例 4.4 (パラシュート降下). 体重と装備あわせて 120 kg のパラシュート隊員が偵察機から降下して, 10 秒後にパラシュートが開いたが, それは着地する僅か 2 秒前だった. それまでの自由落下中は, $k = 24$ の空気抵抗を受け, パラシュートが開いた後は $k = 336$ だったとする. 12 秒後に地面に降りたとき, 彼は怪我をしなかったかどうか考えてみよう. 偵察機から降りるとき, 彼は静かにドアから踏み出したとする.

解 最初の 10 秒間 ; $0 \leqq t \leqq 10$:

重力加速度は $g = 9.8$ として, $m = 120$, $v_0 = 0$, $k = 24$ を例 4.3 で得られた式に代入すれば

$$v(t) = 49\left(1 - e^{-0.2t}\right).$$

パラシュートが開いたときの速度は

$$v(10) = 49\left(1 - e^{-2}\right) \fallingdotseq 42.37 \text{ (m/sec)}.$$

その後の速度; $10 \leqq t \leqq 12$:

v_0 を 42.37, t を $t - 10$ に置き換えて, $k = 336$ とすると

$$v(t) = 3.5 + (38.87)e^{-2.8(t-10)}.$$

彼が着地したときの速度は

$$v(12) = 3.5 + 38.87e^{-5.6} \fallingdotseq 3.5 + 0.14 = 3.54 \text{(m/sec)}.$$

熟練した降下隊員は, 掠り傷ひとつ負わなかっただろう.

問 4.7. (1) 落下速度 $v(t)$ のグラフを書いてみよ.

(2) パラシュートが開いた高度, 偵察機の飛行高度を計算せよ. これは, 単なる積分の復習である.

(3) パラシュートが開いたときに隊員が受けるショックを考えてみよ. これは, 何を計算すればよいのか.

問 4.8. 例 4.1 と例 4.3 の微分方程式は定数の解; $y(t) = c$ をもつ. それぞれの場合に c の値は何か. また, この特別な解は, 現実にはどんな状況に対応しているのか考えてみよ.

注意. これまでの例で, 話を単純にするための仮定をいくつかしてきた. だから, 私達が得た結果は, 完全に正確には, 現実を表してはいない. しかし, このような **モデル** を考えなければ, どうして有益な情報を得ることができるだろうか. 人間の直観が誤りやすいのは, 物体の運動についてのガリレオ以前の考えや, 時間と空間が別なものだというアインシュタイン以前の考えをみてもわかる. 人間がプログラムを書き, コンピュータが高速処理をすることで, さまざまな技術が私達の生活を豊かにするために使われている. 探査機を太陽系外に送ることまでできるのだ.

5 変数分離形微分方程式

こんどは, もう少し複雑だが, やはり変数分離で解ける方程式を考える.

例 5.1. 点 $(1,2)$ を通り, 次の微分方程式を満たす曲線を求めよ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^4}.$$

まず, 変数を分離する:

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^4}.$$

両辺を積分して, 積分定数を右辺にまとめる:

$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+C.$$

ここで C を決めるために, 捜している曲線は点 $(1,2)$ を通る という "初期条件" を使う. そこで;

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1^3}+C.$$

$$C=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

最後に, 両辺を -1 倍 して, 逆数をとれば, 曲線の式がわかる :

$$y=\frac{1}{\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{6}}=\frac{6x^3}{x^3+2}.$$

問 5.1. 点 $(1,0)$ を通り, 次の微分方程式を満たす曲線を求めよ:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

あなたが見つけた曲線と比べて, 方程式の図形的な意味を考えよ.

問 5.2. 次の微分方程式の解のなかで, 点 $(1,1)$ を通る曲線を求めよ.

(1) $x^3\dfrac{dy}{dx} = -y^2$, (2) $\dfrac{dy}{dx} = -2xy$,

(3) $\dfrac{dy}{dx}\sin(\pi y) = x^2$, (4) $\sqrt{2-x^2}\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{2-y^2} = 0$.

6 モデルの修正

最初に考えた人口のモデルは, 1798 年にイギリスのマルサスという経済学者が用いたものだ. 当時の増加率は, 現代より格段に高く, アメリカでは実に $k \fallingdotseq 0.3$ という統計が残っている. マルサスは, 人口増加に比べて食糧生産の増加率は低いので, このままででは将来食糧不足で人類は危機に瀕するだろうと警告したのである.

問 6.1. マルサスモデルで計算すると, 2000 年のアメリカの人口は 1800 年の何倍になっているか.

1800 年のアメリカの人口は約 530 万人であった. 40 年足らずで, 現在の世界人口をオーヴァーしてしまう. 現実には, 人口や生物個体数などは無制限に増え続けることはなく, あるところまで増えると, 必ず抑制する要因が働く. バクテリアのようなものでも, 限られた環境では栄養や酸素が不足して増殖がストップする. もしそうでなかったら, 大変なことになっているだろう.

例 6.1 (人口のロジスティックモデル) . これは, 増加率が一定ではなく $\left(\dfrac{dy}{dt} \neq ky\right)$, 人口が増加していくにつれて, 増加率が減少するモデルである. 右辺に $1-\dfrac{y}{M}$ という項を入れて :

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1-\frac{y}{M}\right)$$

という式を採用する. 現実には, M はこれ以上は増えることができない最大限の人口を意味する. つまり, **人口増加率は, 現在の人口と, 想定される最大値と現在の人口の差との積に比例する**. これは, 1837 年にオランダの数理生物学者ヴェアフルストが, 人口過密の要因を考えて提出したもので, ヴェアフルストモデルともいう. これから求める方程式の解のグラフをロジスティック曲線という.

まず, 変数を分離して積分する :

$$\int \frac{M\,dy}{y(M-y)} = \int k\,dt.$$

左辺の被積分関数を部分分数に分ける :

$$\frac{M}{y(M-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}.$$

これから,

$$\log|y| - \log|M-y| = \log\left(\frac{y}{M-y}\right) = kt + C.$$

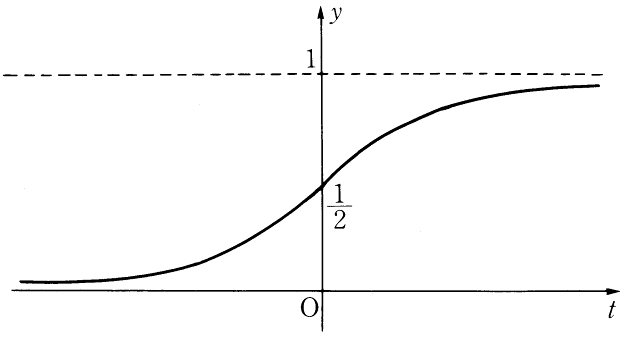
したがって,

$$\frac{y}{M-y} = e^{kt+C}.$$

これを y について解くと,

$$\frac{M-y}{y} = \frac{M}{y} - 1 = e^{-kt}e^{-C}$$

$$y = \frac{M}{1+e^{-C}e^{-kt}}.$$



右のグラフは $M=1$, $C=0$, $k=1$ のときを書いたものである.

問 6.2. 最近日本人により, マダガスカル島に日本産のクワガタが持ち込まれた. クワガタの数はロジスティック方程式に従うと仮定する. 島に生息できる最大数は 100 万匹で, 現在は 5 万匹が生息している. ちょうど 1 年前には 2 万匹であった. 時刻 t (年) におけるクワガタの数を表す式を求めよ. また, 95 万匹になるのには, 何年かかるか.

問 6.3. 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dt} = y(1-y)$,　　(2) $(1-t^2)\dfrac{dy}{dt} = y$.

7　調和振動

最後に簡単な振動を表す方程式について述べる.

例 7.1 (ばねの振動) . ばねの先に質量 m の物体がついている. 時刻 t におけるばねの伸びを $y(t)$ とする. 重力や摩擦, 空気抵抗などはすべて無視して, 物体にはばねの弾性力しか働かないとする. 次の基本的な法則を使う:

ばねの力は, ばねの伸びた長さに比例する.

物体の加速度は力に比例するので, $y''(t)$ は $y(t)$ に比例することになる. ばねが伸びると, 引き戻される方向にばねの力が働き, 縮まるとその逆向きに力が働く. だから, $y''(t)$ と $y(t)$ の比例定数は負の数なので $-k$ とする. そこで, 物体の位置を表す関数 $y(t)$ は次の微分方程式を満たすことになる:

$$y'' = -ky.$$

これは, 2 階微分を含んでいるので, **二階微分方程式** とよばれる. 一般的な扱いは, もっと進んだ勉強になるが, ここではちょっとした工夫で変数分離形に直してみよう. この方程式は特別に簡単な形をしているからである. まず, $-ky$ を左辺に移す：

$$y'' + ky = 0.$$

ここで, y' をかけてみると：

$$2y'y'' + 2kyy' = 0.$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\left((y')^2 + ky^2\right) = 2y'y'' + 2kyy'$$

だから, 方程式 $y'' + ky = 0$ は $\dfrac{d}{dt}\left((y')^2 + ky^2\right) = 0$, つまり

$$(y')^2 + ky^2 = c \text{ (定数)}.$$

時刻 $t = 0$ では物体はつりあいの位置にあり $(y(0) = 0)$, 速度は v_0 だったとすると, $c = v_0^2$ で, 方程式は次のようになる：

$$(y')^2 + ky^2 = v_0^2.$$

これから, 変数分離形の方程式が得られる：

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{v_0^2 - ky^2}.$$

変数を分離して積分する：

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - ky^2}} = \int dt.$$

積分 (微分) の公式を思い出して

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{v_0}y\right) = t + C.$$

私達は $y(0) = 0$ と仮定して, $\sin^{-1}(0) = 0$ だから, $C = 0$ となる. 結局

$$y(t) = \frac{v_0}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

ここで, $\omega = \sqrt{k}$ は角速度 (1 秒間に進む角) である.

このように, 物体は周期 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ のサインカーブでいったりきたりする. このような運動を **調和振動** という.

問 7.1. $y(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$ が, 微分方程式 $y'' = -ky$ を満たすことを, 実際に微分してみて確かめよ.

問 7.2. (1) 例 7.1 での初期条件を，時刻 $t = 0$ で $v_0 = 0$ だが，$y(0) = y_0 \neq 0$ としたら，どうなるか．

(2) 一般に，y_0 も v_0 も 0 でないとしたらどうか．

問 7.3. 次の微分方程式を解け．

(1) $y'' = -2y, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 0,$　　(2) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 7,\ y'(0) = 3.$

速度に比例する空気抵抗を考えにいれると，落下する物体を考えたときのように，指数関数的に減少する振動になることが示せて，**減衰振動** とよばれる．

以上，変数分離形の微分方程式で表せる現象の例のいくつかを調べてきた．最後にもう一度，どうやって方程式を解いたらよいのかを復習する．

微分方程式が (必要なら変形して)，

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

という形のとき，変数分離形といい，次のようにすれば解ける．

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

と，変数 x, y をそれぞれ一方の辺に集めて積分する．

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

あとは不定積分を計算するだけである．工学に現れる関数は，それほど複雑でないものが多いから，基本的な積分公式と，簡単な置換積分と部分積分が，きちんとできるようになっていればよい．

第 5 章　練習問題

1. 次の微分方程式を解け．

(1) $x^4y' + y^4 = 0$　　(2) $xyy' = y + 1$

(3) $xy' = (1 + x^2)\tan y$　　(4) $y' = 3x^2y$

(5) $y' + y\tan x = 0$　　(6) $(1 - 2x^2)y' = y$

(7) $(1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0$　　(8) $y\log y dx - xdy = 0.$

2. 次の方程式の解のうちで，指定された点を通る曲線を求めよ．

(1) $y' = e^{2x-3y}$, $(0, 0)$　　(2) $e^{-y}dy + (1 + x^2)dx = 0$, $(0, 0)$

(3) $2\sin 2x\cos 3y dx - 3\cos 2x\sin 3y dy = 0$, $\left(\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{12}\right)$　　(4) $xyy' = (x - 1)(y - 1)$, $(1, 0)$.

3. ある鉱山町の人口は, それ自身に比例した割合で増加することが知られている. 1999 年には 1997 年の 2 倍になり, 2000 年には 10,000 人になった. 1997 年の人口は何人だったか.

4. ラジウムの半減期は 1,600 年である. 2,400 年後には最初の何 % が残っているか？ 8,000 年後にはどうか？

5. 半減期が 20 日の放射性物質が初めの 1 % に減るには何日以上かかるか？

6. ウラン 238 が 時刻 t_1, t_2 にそれぞれ x_1, x_2 だけ存在したとする. 半減期は

$$\frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log(x_1/x_2)}$$

であることを示せ.

7. お茶を 0° C に保たれた冷蔵庫に入れた. 15 分後のお茶の温度は 30° C で, 30 分後には 15° C になった. 最初の温度は何度だったか. 最初に, 頭の中で考え, 次に微分方程式を使ってあなたの考えが正しいかどうか確かめよ.

8. パーティーのためにプディングを作り, 午後 6 時に冷蔵庫に入れた. 冷蔵庫の温度は 4°C に保たれている. プディングは 7°C になると固まる. 冷蔵庫に入れたとき, プディングの温度は 69°C であった. 最初のお客さんが午後 7 時に来たときには, 30°C に冷えていた. デザートを出せる時刻は, 早くてもいつか.

9. 検死官の解剖室はある理由で 5 ℃の温度に保たれている. ある朝早く, 検死解剖を行っていた検死官本人が殺され, 被害者の死体が盗まれた. 午前１０時に検死官の助手が, 検死官の遺体を発見したとき, 体温は 23 ℃だった. 正午には体温は 18.5 ℃に下がった. 検死官の生存中の体温は 37 ℃だったと仮定して, 死亡時刻を割り出しなさい.

10. ランベルトの吸収の法則 によれば, 半透明の物質の薄い層に入射した光が物質に吸収される割合は, 層の厚さに比例する. 海面に垂直に入射した太陽光が, 10 mの深さで入射時の半分の強さになった. $\frac{1}{16}$ になるときの深さは何 m か？ まず, 答えを考えた後に, 微分方程式を立てて, あなたの答えを検討せよ.

11. 芦ノ湖の水面に垂直に入射したサーチライトの光が 15 m の深さで $\frac{1}{3}$ の明るさになった. 30 m と 60 m の深さではどうか？ 50 m ではどうなるか？

12. 例 4.3 で空気抵抗は速度の 2 乗に比例するとする. $t = 0$ のとき $v = 0$ として, 終速度を計算せよ.

13. 燃料がなくなったとき, クルーザーは 60 (km/h) のスピードで動いていて, マリーナまでは 2.5 km あった. 水の抵抗は速度に比例するとし, 1 km 進んだときのスピードは 30 (km/h) に落ちていたとする. マリーナにたどりつけるか？

14. 前問で, 抵抗は速度の 2 乗に比例するとする.

1. 速度に比例する場合と比較して, まず予想を立て,

2. 微分方程式を作って, あなたの予想を検討せよ.

[その他の微分方程式] これまで学習した微分方程式は，いずれも変数分離形であった．ところが，微分方程式は他にも幾つかのタイプがあり，それらは上級学年で学習することになる．ここでは，変数分離形以外のタイプの微分方程式を紹介しよう．

[同次形] $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ となるタイプの微分方程式を同次形という．

例． $(3x^2 + y^2)y' = 2xy$ は，両辺 xy で割ることによって同次形であることがわかる．実際

$$\left(3\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x}\right)y' = 2$$

となるので同次形であることが確認できるだろう．

解法． 同次形の解法は $u = \dfrac{y}{x}$ と置くことによって変数分離形に書き直すことができる．

[一階線形微分方程式] 二つの関数 $P(x), Q(x)$ を使って $y' + P(x)y = Q(x)$ となるタイプの微分方程式を一階線形微分方程式という．

例． $y' + y\cos x = \cos x \sin x$ は一階線形微分方程式になる．

解法． 一階線形微分方程式は，両辺に $e^{\int P(x)dx}$ をかけて，部分積分の公式を適用すれば解くことができる．

[定数係数高階線形微分方程式] n 個の定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ と関数 $Q(x)$ を使って

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = Q(x)$$

のタイプの微分方程式を定数係数高階線形微分方程式という．

例． $y'' + 4y' + 3y = \sin x$ は定数係数二階線形微分方程式になる．

解法． このタイプの微分方程式の解法には，次の多項式

$$t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_n t$$

の因数分解（と部分分数分解）が決定的な役割を果たしている．

他にも様々なタイプの微分方程式が知られている．そして，多くの微分方程式は様々な物理現象や経済の動きなどを説明することができる．しかしながら，全ての自然現象が解明されていないように，全ての微分方程式が解かれているわけではない．その中には解答が存在しないような微分方程式もある．現代では解析学を研究している多くの数学者は，微分方程式の解き方を研究しているとも言えるであろう．また，最近ではコンピューターを用いることによって従来の手法では解けなかった微分方程式の解も近似的に求めることができるようになってきている．

第6章

偏微分法

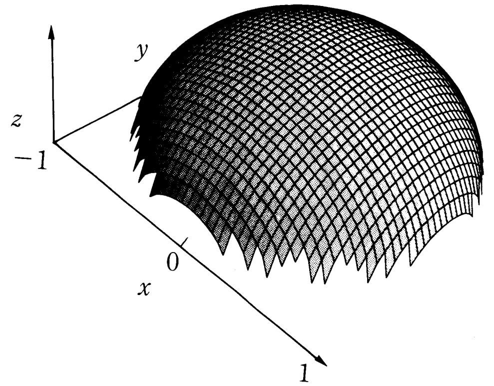
前章までで，1変数関数の微分と積分について学習したが，1変数関数 $y = f(x)$ では表せる曲面は限られたものだけになる（回転面など）．空間の曲面などは，2変数以上の関数が必要となる．そこで，この章では2変数関数の微分について述べる．同様に n 変数関数の微分についても述べなければならないが，本書では，扱わないことにする．

1　2変数関数の極限

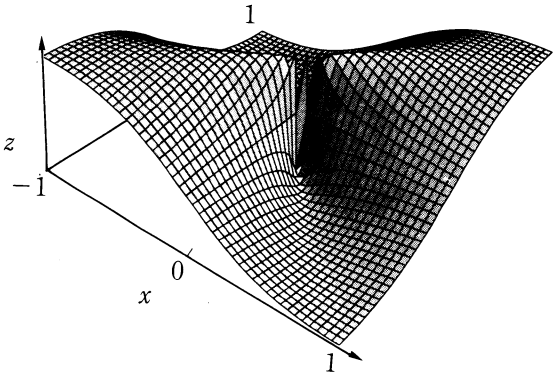
$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし,M を平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x,y); x,y \in \mathbf{R}\}$ の部分集合とする．M の各元 (x,y) に対して値 z が一意的に決まるとき，z は M 上で定義された**2変数関数**といい，$\boldsymbol{z = f(x,y)}$ で表す．M を $z = f(x,y)$ の **定義域** という．1変数関数の場合と同様に，具体的な形で与えられた関数については，その形が意味をもつ範囲を定義域とするのがふつうである．

例 1.1. (1) $z = x + y + 1$　　(定義域は平面全体)

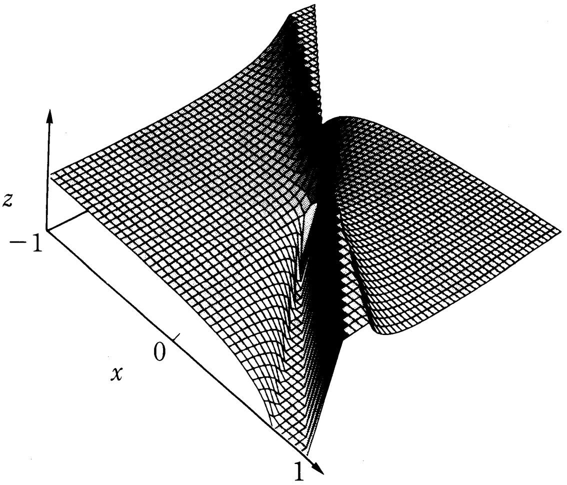
(2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$　　(定義域は単位円の周と内部)



(3) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$　（定義域は平面から $(0,0)$ を除いた部分）



(4) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$　（定義域は平面から直線 $x + y = 0$ を除いた部分）



1変数関数 $y = f(x)$ のグラフは平面上の曲線であるが，2変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは空間 $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbf{R}\}$ の中の曲面になる．例えば例 1.1 (1) のグラフは空間の中の平面であり,(2) のグラフは単位球面の上半分である．

点 $P(a, b)$ と正の数 ε に対して，平面の部分集合

$$U_\varepsilon(P) = \{(x, y)\ ;\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon\}$$

を P の **ε-近傍** とよぶ．$U_\varepsilon(P)$ は P を中心とする半径 ε の円の内部である．ある正の数 ε に対する ε-近傍を以後単に**近傍**とよぶことにする．

関数 $z = f(x, y)$ は点 $P(a, b)$ のある近傍で定義されているとする．点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近づくとき $(x, y) \to (a, b)$ と書き，そのとき $f(x, y)$ が一定値 l に限りなく近づけば，$f(x, y)$ の点 P における極限値は l であるといい

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l \quad \text{または} \quad f(x, y) \to l \quad ((x, y) \to (a, b))$$

と書く．

(x,y) を (a,b) に限りなく近づけるとき, 近づける方向によって $f(x,y)$ の近づく値が異なる場合は, 極限値は存在しないと考える.

定理 1.1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=m$ のとき,

(1) $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)+g(x,y))=l+m$

(2) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y)=lm$, 特に $\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y)=cl$ (c は定数)

(3) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{l}{m}$ (ただし, $m\neq 0$)

例 1.2. 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ (2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

解 (1) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{(x+y)(x-y)}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x-y)=2$

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とおく. (x,y) を極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ で表す. このとき

$$|\, f(x,y) \,| = r \,|\, \sin\theta\cos\theta \,| \leqq r$$

であり, $(x,y)\to(0,0)$ のとき $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ であるから, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

(3) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ とおく. 点 (x,y) が直線 $y=mx$ 上にあるとき

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}\ .$$

よって (x,y) が直線 $y=mx$ に沿って $(0,0)$ に近づくとき, m の値により異なる値に近づくから $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない. □

$f(x,y)$ は点 (a,b) のある近傍で定義されていて

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つとき, $f(x,y)$ は点 (a,b) で連続であるという. 集合 M の各点で連続であるとき, M で連続であるという.

1 変数関数の場合と同様に, 2 変数の連続関数の定数倍, 和, 積, 商, 合成関数も連続関数になる. また, 次の定理も同様に成り立つ.

定理 1.2. 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で連続で, $f(a,b) \neq 0$ ならば, (a,b) のある近傍内で $f(x,y)$ は常に $f(a,b)$ と同符号である.

集合 M を平面の部分集合とする. M が原点を中心とした十分大きな円に含まれるとき, M は有界であるという. また M の任意の点 (x,y) に対し, (x,y) のある近傍が M に含まれるとき, M を**開集合**とよび, 開集合の補集合を**閉集合**とよぶ.

定理 1.3. 有界な閉集合 M で定義された連続関数 $f(x,y)$ は M で最大値と最小値をもつ.

問 1.1.　次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x+y+1}{x^2-y^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy+(x-y)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}$

問 1.2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

2　偏導関数

2変数関数 $z = f(x,y)$ の変数 y を固定して定数と考えたとき, $f(x,y)$ は x についての1変数関数と考えられる. このように考えたとき, $f(x,y)$ が x について微分可能, すなわち極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

が存在するとき, $z = f(x,y)$ は点 (x,y) において x について**偏微分可能**といい, 上の極限を点 (x,y) における x についての**偏微分係数**という. また, 上の極限を x と y の関数とみるときには, x についての**偏導関数**とよび,

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \quad f_x(x,y), \quad f_x, \quad z_x$$

などで表す.

y についても同様に, 偏微分可能, 偏微分係数, 偏導関数 ($\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x.y)$, $f_y(x,y)$, f_y, z_y などで表す) を考える.

x (または y) について偏導関数を求めることを x (または y) で**偏微分**するという.

偏導関数は本質的には1変数関数の導関数であるから, x, y の一方を定数と考えて他方の変数について1変数関数の微分の公式を適用すればよい.

例 2.1. 次の関数を x および y について偏微分せよ.

(1) $z = x^4 y + xy^2$ (2) $z = \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^4 y) + \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) = 4x^3 y + y^2$, 同様に $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^4 + 2xy$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2} . \square$$

問 2.1. 次の関数を x および y について偏微分せよ.

(1) $z = 3x^2 y + 5x^2 y^3$ (2) $z = e^{xy}$ (3) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(4) $z = \sin^{-1}\dfrac{x}{y}$ (5) $z = \log_y x$ (6) $z = x^y$

1変数関数では微分可能であれば連続であったが，2変数関数では x, y について偏微分可能であっても連続とは限らない.

問 2.2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ は点 $(0,0)$ において x, y について偏微分可能であるが，点 $(0,0)$ で連続でないことを示せ.

関数 $z = f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ がさらに x, y について偏微分可能なとき，その偏導関数を z の**第2次偏導関数**といい，次のように書く.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = z_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x,y) = z_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y) = z_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = z_{yy}$$

第 n 次偏導関数も同様に定義される.

例 2.2. $z = x^3 + 3x^2 y + 2y^3$ の第2次偏導関数を求めよ.

解 $z_x = 3x^2 + 6xy$, $z_y = 3x^2 + 6y^2$ をさらに偏微分して，
$z_{xx} = 6x + 6y$, $z_{xy} = 6x$, $z_{yx} = 6x$, $z_{yy} = 12y$. $\square$

問 2.3. 次の関数の第2次偏導関数を求めよ．

(1) $\sin 3x \cos 4y$　(2) $\log(x^2 + y^4)$　(3) e^{x^2+2y}

(4) $e^{-x} \sin y$　(5) $\sin \dfrac{y}{x}$　(6) $\sin^{-1} \dfrac{y}{x}$

問 2.4. $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ のとき $z_{xx} + z_{yy} = 0$ を示せ．

関数 $f(x, y)$ に対して，一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ であるが，次の結果が知られている．

定理 2.1. f_{xy}, f_{yx} がともに連続ならば $f_{xy} = f_{yx}$.

証明 点 (a, b) において

$$U = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

$$\varphi(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$$

とおけば

$$U = \varphi(a + h) - \varphi(a) \tag{1}$$

$\varphi(x)$ に平均値の定理を適用すると

$$U = \varphi(a + h) - \varphi(a) = h\varphi'(c) \tag{2}$$

となるような c が a と $a + h$ の間に存在する．

さらに $\varphi'(c) = f_x(c, b + k) - f_x(c, b)$ であるから f_x に平均値の定理を適用すると

$$\varphi'(c) = f_x(c, b + k) - f_x(c, b) = k f_{xy}(c, d) \tag{3}$$

となるような d が b と $b + k$ の間に存在する．

(1),(2),(3) より

$$f_{xy}(c, d) = \frac{U}{hk} \tag{4}$$

(4) の式で $(h, k) \to (0, 0)$ とすれば f_{xy} の連続性より

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{U}{hk}$$

x と y を交換して同様に考えると

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{U}{hk}. \quad \square$$

3 全微分

2変数関数の偏微分可能性は, 一方の変数を定数と考えることにより本質的には1変数関数の微分可能性にすぎなかった. ここでは $z=f(x,y)$ の2変数関数としての微分可能性（全微分可能性）を考える.

1変数関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは, $y=f(x)$ で決まる曲線上の点 $(a,f(a))$ で接線が引けることであった. このことより2変数関数 $z=f(x,y)$ の微分可能性を, $z=f(x,y)$ で決まる曲面上の点 $(a,b,f(a,b))$ で接平面がつくれることであると定義する.

点 $(a,b,f(a,b))$ を通る平面は

$$z=f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b) \quad (\alpha,\beta\text{は定数})$$

と書け, これが $z=f(x,y)$ で決まる曲面に接している場合, z の値の差

$$g(x,y)=f(x,y)-\{f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)\}$$

が $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ に対して無視できることより

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

を満たす.

これらのことより, 関数 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) において**全微分可能**であるとは

$$f(x,y)=f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)+g(x,y) \qquad (1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0 \qquad (2)$$

を満たすように定数 α,β が定められることと定義する.

定理 3.1. $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能ならば, $f(x,y)$ はこの点で連続であり, かつ x,y について偏微分可能で, $\alpha=f_x(a,b),\beta=f_y(a,b)$ である.

証明 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能ならば, (2) より $\lim_{(x,y)\to(a,b)}g(x,y)=0$ であるから (1) より $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$ が成立する. これは $f(x,y)$ が (a,b) で連続なことを示す.

次に (1) の式で $x=a+h, y=b$ とすると

$$f(a+h,b)-f(a,b)=\alpha h+g(a+h,b)$$

であり, また (2) の極限において (x,y) を直線 $y=b$ に沿って (a,b) に近づける場合を考えることにより

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h,b)}{h}=0$$

であるから

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\alpha + \frac{g(a+h,b)}{h}\right\} = \alpha$$

が得られる. $\beta = f_y(a,b)$ も同様に得られる. □

定理 3.1 より $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能なとき, 曲面上の点 $(a,b,f(a,b))$ での接平面は

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる. ここで

$$dz = z - f(a,b), \qquad dx = x-a, \qquad dy = y-b$$

とおくと

$$dz = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

となり, これを $z=f(x,y)$ の点 (a,b) における**全微分**という.

問 3.1. 次の曲面の点 P における接平面の方程式を求めよ.

(1) $z=xy$ $\quad P(1,1,1)$ (2) $z=x^2+y^2$ $\quad P(3,4,25)$

(3) $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ $\quad P(a,b,2)$ (4) $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ $\quad P(1,1,\frac{\pi}{4})$

定理 3.1 より全微分可能であれば偏微分可能であるが, 一般に逆は成立しない. しかし次の結果が知られている.

定理 3.2. $f(x,y)$ が点 (a,b) のある近傍で x,y について偏微分可能であり, f_x, f_y がともに (a,b) で連続ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能である.

4 合成関数の微分法

定理 4.1. $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能とする. $x=x(t), y=y(t)$ が $t=c$ で微分可能で $a=x(c), b=y(c)$ ならば, 合成関数 $z=f(x(t),y(t))$ も $t=c$ で微分可能で

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

証明 $\varphi(t) = \dfrac{f(x(t),y(t))-f(a,b)}{t-c}$ とおく. $f(x(t),y(t))$ の $t=c$ での微分係数を求めるには $\lim_{t\to c}\varphi(t)$ を計算すればよい.

$z=f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であることより

$$f(x,y)-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+g(x,y) \qquad (1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0 \qquad (2)$$

を満たしているから, (1) の式より

$$\varphi(t)=\frac{f_x(a,b)(x(t)-a)+f_y(a,b)(y(t)-b)+g(x(t),y(t))}{t-c}.$$

ここで $t\to c$ のとき

$$\frac{x(t)-a}{t-c}=\frac{x(t)-x(c)}{t-c}\to x'(c), \qquad \frac{y(t)-b}{t-c}=\frac{y(t)-y(c)}{t-c}\to y'(c)$$

であり, さらに $t\to c$ のとき $(x,y)\to(a,b)$ であることに注意すれば (2) より

$$\left|\frac{g(x(t),y(t))}{t-c}\right|=\frac{|\,g(x,y)\,|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\sqrt{\left(\frac{x-a}{t-c}\right)^2+\left(\frac{y-b}{t-c}\right)^2}\to 0$$

であるから

$$\frac{dz}{dt}(c)=f_x(a,b)x'(c)+f_y(a,b)y'(c). \ \square$$

$x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ がともに 2 変数 u,v の関数であるとき $z=f(x,y)$ との合成関数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ を u または v について偏微分することは, 本質的には 1 変数関数を微分することと同じであるから定理 4.1 より次の定理を得る.

定理 4.2. $z=f(x,y)$ は点 (a,b) で全微分可能とする. $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ が点 (c,d) で偏微分可能で, $a=\varphi(c,d), b=\psi(c,d)$ ならば, 合成関数 $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ も (c,d) で偏微分可能で

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

例 **4.1.** $z=e^{x-2y},\ x=\sin t,\ y=t^3$ のとき $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ.

解 $z_x=e^{x-2y},\ z_y=-2e^{x-2y},\ \dfrac{dx}{dt}=\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=3t^2$ より
$\dfrac{dz}{dt}=e^{x-2y}\cos t-2e^{x-2y}3t^2=e^{x-2y}(\cos t-6t^2)$. $\square$

例 4.2. $z = x^2 \log y,\ x = \dfrac{u}{v},\ y = 3u - v$ のとき $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \log y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{y},\ \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{v},\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{u}{v^2},\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = 3,\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = -1$ より

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{2x}{v}\right)\log y + \frac{3x^2}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\left(\frac{2xu}{v^2}\right)\log y - \frac{x^2}{y}\ .\ \square$$

問 4.1. 次の関数 z について $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(1) $z = x^2 - y^2,\quad x = \cos t,\ y = \sin t$

(2) $z = e^{x-y},\quad x = t,\ y = \dfrac{1}{t}$

(3) $z = \sin^{-1} xy,\quad x = 1 - t,\ y = 1 + t$

問 4.2. 次の関数 z について $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

(1) $z = 2x^2 + xy - y^2,\quad x = 2u - v,\ y = u + v$

(2) $z = x^2 + y^2,\quad x = u^2 - v^2,\ y = 2uv$

(3) $z = e^{xy},\quad x = \log\sqrt{u^2 + v^2},\ y = \tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

例 4.3. $z = f(x, y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき次を示せ．

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} r\cos\theta$$

よって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

(2) 簡単の為, $f(x,y)$ は定理 2.1 の条件を満たすとして証明する.
$\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r}\right)\sin\theta\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\dfrac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial x}(-r\cos\theta)\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)(r\cos\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(-r\sin\theta)\\&=r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta-2r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+r^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta-r\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta-r\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}. \quad \square$$

問 4.3. $z=f(x,y)$, $x=u+v$, $y=u-v$ のとき $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を示せ.

問 4.4. $z=f(x,y)$, $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$, $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ.

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

5 テイラーの定理

第2章におけるテイラーの定理は2次元以上の場合に拡張できる. ここでは2次元の場合について考える.

関数 $f(x,y)$ が x について**連続偏微分可能**とは f_x が存在し連続であること, 単に**連続偏微分可能**といえば, すべての変数について（この場合 x, y について）連続偏微分可能なことをいう. 定理 3.2 より, 連続偏微分可能な関数は全微分可能である. さらに f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が存在して連続ならば, f は2回連続微分可能であるという. 同様にして n 回連続微分可能性を定義する.

いま $z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ を含む開集合で定義された n 回連続偏微分可能な関数とするとき, $f(a+h,b+k)$ を h, k について展開することを考える. 以下では簡単のために, $h\dfrac{\partial f}{\partial x}+k\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f$ と書くことにする. また,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f, \quad n \geqq 2$$

が定義されたとして

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f\right\}$$

と定義する. 例えば, $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{2}f$ は

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= h\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f+k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{aligned}$$

となる.

問 5.1. $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n}z=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r h^{n-r}k^r\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$ を示せ.

以下において, $\left[\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f\right]_{(x,y)=(a,b)}$ を $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a,b)$ と略記する.

定理 5.1 (テイラーの定理) . $z=f(x,y)$ が点 (a,b) を含む開集合で定義された n 回連続偏微分可能な関数とするとき, $|h|$, $|k|$ が十分小さい h, k に対して次の式を満足する θ が存在する.

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{r}f(a,b)+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a+\theta h,b+\theta k), \quad 0<\theta<1$$

証明 $h,\ k$ が十分小さければ, 2 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分上の点 $(a+th,b+tk)$, $(0\leqq t\leqq 1)$ で, 1 変数 t の関数

$$z=f(x,y)=f(a+ht,b+kt)=\phi(t)$$

が考えられる. $\dfrac{d}{dt}(a+th)=h,\ \dfrac{d}{dt}(b+tk)=k$ であるから,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= f_x(a+th,y+bk)h+f_y(a+th,b+tk)k\\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+th,b+tk)\end{aligned}$$

となる. さらに t で微分を繰り返すと,

$$\phi^{(m)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+th,b+tk),\quad m=2,\cdots,n$$

となることがわかる. 1 変数におけるマクローリンの定理により

$$\phi(t)=\phi(0)+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{t^r}{r!}\phi^{(r)}(0)+\frac{t^n}{n!}\phi^{(n)}(\theta t),\quad 0<\theta<1$$

であるから, これを代入して $t=1$ とおけばよい. □

最後の項 R_n を 1 変数のときと同様**ラグランジュの剰余項**という

定理 5.1 において $(a,b)=(0,0)$, $h=x$, $k=y$ とおくと, 次の系を得る.

系 5.2 (マクローリンの定理) . $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ を含む開集合で定義された n 回連続偏微分可能な関数とするとき, (x,y) が十分原点に近ければ次の式を満足する θ が存在する.

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(0,0)+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x,\theta y),\quad 0<\theta<1$$

なお, 系 5.2 において $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^r f(0,0)$ は定理 5.1 と同様に計算する.

例 5.1. 関数 $f(x,y)=x^2-2xy-3y^2+8y-3$ を点 $(1,1)$ でテイラーの定理によって展開せよ.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-2y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2x-6y+8$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$$

となる．また，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2$,　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-2$,　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6$ となり，第3次以上の偏導関数は0になる．よって，テイラー展開の式は

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ & +\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)(x-1)(y-1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2\right\}+0 \\ = {} & 1+(x-1)^2-2(x-1)(y-1)-3(y-1)^2. \end{aligned}$$

例 5.2. $f(x,y)=e^y\log(1+x)$ をマクローリンの定理によって3次の項まで求めよ．

解　$\dfrac{\partial^r f}{\partial x^k\partial y^{r-k}}=\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}=e^y\cdot\{\log(1+x)\}^{(k)}$ に注意して

$$\begin{aligned} & f(0,0)=\frac{\partial^r f}{\partial y^r}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=1, \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)=-1,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=2 \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} f(0,0) \quad + & \quad \sum_{r=1}^{3}\frac{1}{r!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(0,0) \\ = & \quad 0+1x+0y+\frac{1}{2}\left(-1x^2+2\cdot 1xy+0y^2\right) \\ & \quad +\frac{1}{6}\left(2x^3+3\cdot(-1)x^2y+3\cdot 1xy^2+0y^3\right) \\ = & \quad x-\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 \end{aligned}$$

問 5.2. 例 5.2 において θ を用い，4次のラグランジュの剰余項 R_4 を求めよ．

例 5.3. $f(x,y)=e^{x-y}$ をマクローリンの定理によって展開せよ．

解　$\dfrac{\partial^r f}{\partial x^{r-k}\partial y^k}(0,0)=(-1)^k$ より

$$1+(x-y)+\frac{1}{2}(x-y)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}+\frac{1}{n!}(x-y)^n e^{\theta(x-y)}$$

問 5.3. 関数 $\sqrt{2-x+y}$ をマクローリンの定理を $n=3$ に適用して展開せよ．

問 5.4. $f(x,y)$ の n 次の偏導関数がすべて恒等的に0であるならば，$f(x,y)$ は x, y の多項式でその次数は高くても $n-1$ であることを証明せよ．

6　陰関数

x, y の関係式 $f(x,y)=0$ において，x, y は独立に任意の値をとることはできない．x の値に対して，$f(x,y)=0$ が成立するような y の値を対応させることができれば，その対応によって１つの関数が定まる．これを $f(x,y)=0$ によって定まる**陰関数**という．

定理 6.1 (陰関数定理)． $f(x,y)$ を (a,b) を含む開集合で定義された連続偏微分可能な関数とする．点 (a,b) において $f(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ ならば，$x=a$ を含む適当な開区間で次の性質をもつ関数 $y=\phi(x)$ がただ１つ定まる．
(1) $b=\phi(a)$
(2) $f(x,\phi(x))=0$
(3) $\phi(x)$ は C^1 級（１回連続微分可能）で，$\dfrac{dy}{dx}=\phi'(x)=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$

$f_y(a,b)=0$ であっても $f_x(a,b)\neq 0$ であれば，$f(x,y)=0$ は $y=b$ を含む開区間上で $x=\psi(y)$ の形で表され，$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{f_y}{f_x}$ となる．曲線 $f(x,y)=0$ 上の点で $f_x=f_y=0$ となる点を**特異点**という．特異点ではない曲線 $f(x,y)=0$ 上の点のまわりでは，曲線は $y=\phi(x)$ か $x=\psi(y)$ のかたちに１とおりに表され，接線が１本だけ引ける．

陰関数を具体的に表現することは一般的にはできないが，例 6.1 のように簡単に見つかる場合もある．

例 6.1. $f(x,y)=4x^2+y^2-8x-4y+3=0$ とする．このとき，点 $(0,1)$ における陰関数 $\phi(x)$ を求めよ．

解　$f(x,y)=4(x-1)^2+(y-2)^2-5=0$ より，

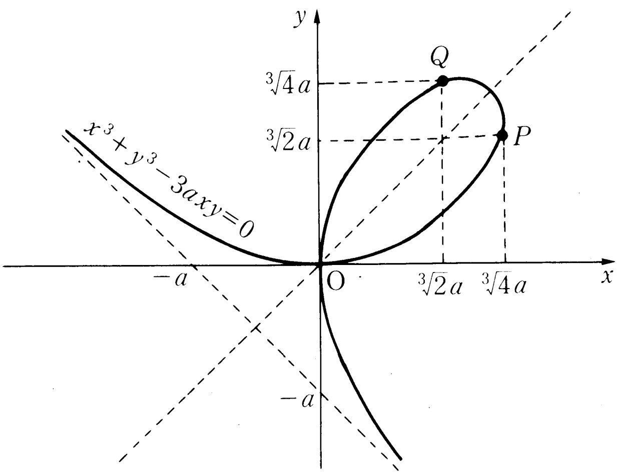
$$y-2=\pm\sqrt{5-4(x-1)^2}$$

である．よって点 $(0,1)$ における陰関数は

$$\phi(x)=2-\sqrt{5-4(x-1)^2}\quad\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

となる．

例 6.2. $f(x,y)=x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ によって定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dx}{dy}$ を求めよ（この曲線をデカルトの葉状曲線という）．



解　$f_x(x,y) = 3x^2-3ay$，$f_y(x,y) = 3y^2-3ax$ であるから，$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ となる．よって，原点 $(0,0)$ は特異点となり，曲線は原点において図のように自分自身と交わる．また，曲線上で $f_y(x,y) = 0$ となる点 $P\left(\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a\right)$ では y は x の関数として表すことはできない（このとき $\dfrac{dx}{dy} = 0$）．同様に $f_x(x,y) = 0$ となる点 $Q\left(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a\right)$ では x は y の関数として表すことはできない（このとき $\dfrac{dy}{dx} = 0$）．これ以外の曲線上の点で $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dx}{dy}$ は次のように求まる．

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2-ay}{y^2-ax}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y^2-ax}{x^2-ay}$$

問 6.1. $x^3+x^2-y^2=0$ より定まる陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dx}{dy}$ を求めよ．

例 6.3. $f(x,y)$ が2回連続偏微分可能であるとき，$f(x,y)=0$ で定められる関数 $y=\phi(x)$ の第2次導関数を求めよ．

解

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) = -\frac{\dfrac{d}{dx}(f_x)\cdot f_y - f_x\cdot\dfrac{d}{dx}(f_y)}{f_y^2} \\ &= -\frac{(f_{xx}+f_{xy}y')f_y - f_x(f_{xy}+f_{yy}y')}{f_y^2} \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}\end{aligned}$$

問 6.2. $x^2+3xy+y^2-1=0$ に対して，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

定理6.1は, 高次元の場合へ拡張できる．例えば3次元の場合は次のように拡張される．

定理 6.2. $f(x,y,z)$ を3次元空間上の点 (a,b,c) を含む開集合で定義された連続偏微分可能な関数とする．点 (a,b,c) において $f=0$ かつ $f_z \neq 0$ ならば，xy-平面上 (a,b) を含む適当な開集合で定義された，次の性質をもつ関数 $z=\phi(x,y)$ がただ1つ定まる．
(1) $c=\phi(a,b)$
(2) $f(x,y,\phi(x,y))=0$
(3) $z=\phi(x,y)$ は連続偏微分可能で $\phi_x = -\dfrac{f_x}{f_z}$，　$\phi_y = -\dfrac{f_y}{f_z}$

定理 6.3. 3次元空間上の点 (a,b,c) を含む開集合で定義された2つの関数 $f(x,y,z)$ および $g(x,y,z)$ が連続偏微分可能とする．点 (a,b,c) において

$$f=0,\quad g=0,\quad J=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$$

であるとき，x-軸上 $x=a$ を含む適当な開区間で定義された，次の性質をもつ関数 $y=\phi_1(x)$，$z=\phi_2(x)$ がただ1組定まる．
(1) $b=\phi_1(a)$，$c=\phi_2(a)$
(2) $f(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=0$，$g(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=0$
(3) $y=\phi_1(x)$，$z=\phi_2(x)$ は連続微分可能である．
ここで J は**ヤコビアン**とよばれる．

$\phi_1'(x)$，$\phi_2'(x)$ を求めるには（2）の2つの式をそれぞれ x で微分して

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\phi_1}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\phi_2}{dx}=0,\qquad \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d\phi_1}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{d\phi_2}{dx}=0$$

から求めれば次のようになる．その際，条件 $J\neq 0$ は，この2つの連立方程式から $\phi_1'(x)$ および $\phi_2'(x)$ がただ1とおりに定まるための条件である．

$$\phi_1'(x)=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}\Big/J,\quad \phi_2'(x)=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}\Big/J$$

問 6.3. $a(x-l)^2+b(y-m)^2+c(z-n)^2-d=0$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ．

問 6.4. $x^2+y^2+z^2-1=0$，$lx+my+nz-1=0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ．

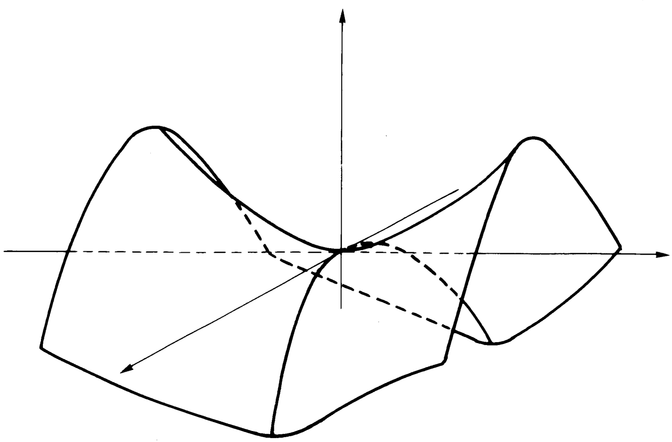
7 極大・極小

関数 $z=f(x,y)$ において，点 (a,b) の近くの任意の点 (x,y) $(\neq(a,b))$ に対し $f(x,y)<f(a,b)$ $(f(x,y)>f(a,b))$ が成り立つならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で **極大**（**極小**）であるといい，$f(a,b)$ を **極大値**（**極小値**）という．極大値と極小値をあわせて **極値** という．

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるための必要条件は $f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$ である．また $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで全微分可能であれば，この条件は $df(a,b)=0$ と書ける．

例 7.1. $f(x,y)=x^2+y^2$ において，$f_x(a,b)=2a=0, f_y(a,b)=2b=0$ から $a=b=0$．$f(0,0)=0$ かつ $(0,0)$ 以外の点 (x,y) では $f(x,y)>0$ より関数 $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極小で，極小値 0 をとる．

例 7.2. $f(x,y) = -x^2 + y^2$ は $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ であるが，下図より $(0,0)$ では極値をもたない．



$f(x,y) = -x^2 + y^2$ のグラフ

定理 7.1. 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで 2 回連続偏微分可能で，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする．$\Delta = \{f_{xy}(a,b)\}^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ とおいたとき，

(1) $\Delta < 0$ で $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大

(2) $\Delta < 0$ で $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小

(3) $\Delta > 0$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない

(4) $\Delta = 0$ ならば，極値をとるともとらないとも判定できない．

証明 テイラーの定理において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とおくと

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2 f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)\}.$$

ここで

$$A = f_{xx}(a,b), B = f_{xy}(a,b), C = f_{yy}(a,b),$$

さらに

$$f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) = A + \varepsilon_1$$
$$f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) = B + \varepsilon_2$$
$$f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) = C + \varepsilon_3$$

とおけば，

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 h^2 + 2\varepsilon_2 hk + \varepsilon_3 k^2).$$

ここで，$(h,k) \to (0,0)$ のとき $\varepsilon_i \to 0$ $(i=1,2,3)$ だから $|h|,|k|$ が十分小さい範囲では $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ の正負の符号は $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ の符号と一致する．

(1) $\Delta = B^2-AC<0, A>0$ のとき $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ を h の2次式とみるとその判別式は

$$B^2k^2-ACk^2=k^2(B^2-AC)<0$$

であるから $Ah^2+2Bhk+Ck^2>0$. したがって $f(a+h,b+k)>f(a,b)$ となって $f(a,b)$ は極小値

(2) $\Delta<0, A<0$ のときも同様にして $f(a,b)$ は極大値

(3) $\Delta>0$ のときは h,k のとり方により $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ の符号は正にも負にもなるから，$f(a,b)$ は極値をもたない．

(4) $\Delta=0$ のときはこれだけでは $f(a,b)$ は極値をとるかどうかわからない．　□

例 7.3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4x-2y$ の極値を求めよ．

解 $f_x=2x+y-4=0, f_y=x+2y-2=0$ より $df(2,0)=0$. よって点 $(2,0)$ が極値をとりえる．$f_{xx}(2,0)=2, f_{xy}(2,0)=1, f_{yy}(2,0)=2$ であるから $\Delta<0, f_{xx}(2,0)>0$ となり，極小値 $f(2,0)=-4$ をとる．

問 7.1. 次の関数の極値を求めよ．

(1) $x^2-xy+y^2-2x+3y+1$　　(2) $e^x(x^2-y^2)$

(3) $x^3-6xy+y^3$　　(4) $xy(x^2+y^2-1)$

問 7.2. 半径1の円に内接する三角形で面積最大なものを求めよ．

変数 x,y がある条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで変化するとき，関数 $f(x,y)$ の極値を求める問題を考える．

定理 7.2. 関数 $\varphi(x,y), f(x,y)$ は連続偏微分可能とし，$z=f(x,y)$ は $\varphi(x,y)=0$ という条件のもとに (a,b) で極値をとるとする．このとき，もし $\varphi_x(a,b)\neq 0$ または $\varphi_y(a,b)\neq 0$ ならば

$$f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=0, f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0$$

となる定数 λ が存在する．

証明 $\varphi_y(a,b)\neq 0$ のときは，陰関数の定理より $\varphi(x,y)=0$ を満たす y が x の関数とみられるから z は x の関数となる．よって $z=f(x,y)$ が極値をとる点 (a,b) では

$$\frac{dz}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}=0.$$

また $\varphi(x,y)=0$ の両辺を x で微分すると $\varphi_x dx+\varphi_y dy=0$. したがって $\varphi_y(a,b)\neq 0$ であるから $f_x(a,b)\varphi_y(a,b)=f_y(a,b)\varphi_x(a,b)$. よって

$$\lambda=\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}.$$

とおけばよい．$\varphi_x(a,b)\neq 0$ のときは，同様にして $\lambda=\dfrac{f_x(a,b)}{\varphi_x(a,b)}$ とおけばよい．　□

定理 7.3 (ラグランジュの未定乗数法)． 連続偏微分可能な関数 $\varphi(x,y), f(x,y)$ に対し

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)\ (\lambda\text{は助変数})$$

とおく．条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで $z=f(x,y)$ が極値をとる点では，$\varphi(x,y)=0$ が特異点をもたなければ

$$F_x(x,y,\lambda)=0, F_y(x,y,\lambda)=0, F_\lambda(x,y,\lambda)=0$$

が成り立つ．助変数 λ は**ラグランジュの乗数**とよばれている．

証明 定理 7.2 より明らか．　□

例 7.4. 点 (x,y) が条件 $x^3-3xy+y^3=0$ のもとで変化するとき x^2+y^2 の極値を求めよ．

解 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^3-3xy+y^3)$ とおくと

$$F_x=2x-3\lambda(x^2-y), F_y=2y-3\lambda(y^2-x), F_\lambda=-\varphi.$$

ただし，$\varphi(x,y)=x^3-3xy+y^3$ で $\varphi_x(x,y)=3x^2-3y, \varphi_y(x,y)=-3x+3y^2$.

$F_x=F_y=0$ より ($x^2\neq y$ として) λ を消去すると

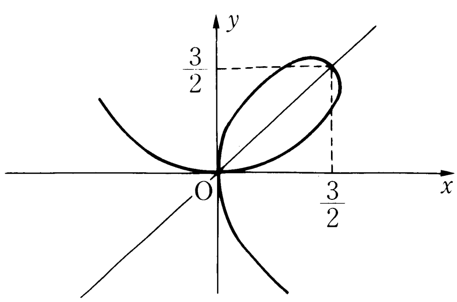
$$(x-y)(x+y+xy)=0.$$

$x=y$ と $\varphi=0$ より $x=y=\dfrac{3}{2}$ を得る ($\lambda=\dfrac{2x}{3(x^2-y)}$ より $(x,y)\neq(0,0)$).

また，$x+y+xy=0$ および $\varphi=0$ より

$$(x+y)(x^2-xy+y^2+3)=0.$$

ここで $x^2-xy+y^2+3=\left(x-\dfrac{1}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2+3>0$ であるから $x+y=0$. よって $x=y=0$ を得るが λ の定義に反する．したがって $F_x=F_y=F_\lambda=0$ を満たす点 (x,y) は $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ であり，$f(x,y)=x^2+y^2$ の極値の候補はこの点となる．一方 $\varphi(x,y)=0$ のグラフより $f(x,y)$ の値は原点 $(0,0)$ から点 (x,y) までの距離の平方であるから $f\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$ は極大値である．また，グラフより点 $(0,0)$ で $f(x,y)$ は最小値（極小値）0 をとる．

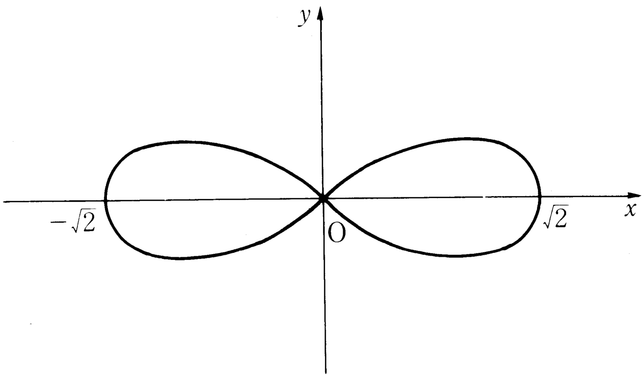


$\varphi(x,y)=0$ のグラフ

問 7.3. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で次の関数の極値を求めよ.

(1) $x + y$ (2) xy

問 7.4. 条件 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ の下で $x^2 + y^2$ の極値を求めよ.



$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$のグラフ

第6章 練習問題

1. 次の各関数について $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (2) $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\cos\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (4) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

(5) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (6) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

2. 次の関数の第2次偏導関数を求めよ.

(1) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (2) $z = \log(x^2 + xy + y^2)$ (3) $z = \dfrac{e^{xy}}{e^x + e^y}$

(4) $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ (5) $z = x^3 - x^2 y$ (6) $z = xy^2 \cos x$

3. $z = e^{\sin x \cos y}$, $x = uv$, $y = u + v$ のとき偏導関数 z_u, z_v を求めよ.

4. 次に示す一対の関数について, 次の関係式が成り立つことを確認せよ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

(1) $u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3$

(2) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

(3) $u = \cos x \cosh y, \quad v = -\sin x \sinh y$

(4) $u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y$

ここで, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とする. (p. 32 参照)

5. 次の関数をマクローリンの定理を $n = 3$ の場合に適用せよ.

(1) $e^x \sin y$ (2) $\dfrac{1}{1-2x+3y}$ (3) $\sqrt{1+x-y^2}$

6. 0でない任意の実数 t に対して $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ を満たすとき, f を k **次の同次関数**という. k 次の同次関数 f が n 回連続微分可能であるとき, 次のことを示せ.

(1) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = kf$

(2) $\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^n f(x, y) = k(k-1)\cdots(k-n+1)f(x, y)$

7. 関係式 $x^2 - xy + y^2 = a^2$ において y が x の関数となるのはどのような区間か. また, そのとき y', y'' を求めよ.

8. $\log(x^2+y^2) = 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ から y', y'' を求めよ.

9. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 2ax$ から $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ.

10. 関係式 $z^3 - 3xz + y^3 = 0$ にたいして $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{y^2(z^2+x)}{(z^2-x)^3}$ を示せ.

11. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$ (2) $z = x^4 + y^3 - 4(x+y) + 1$

(3) $z = x^4 + y^4 - 10x^2 + 16xy - 10y^2$ (4) $z = x^2 + xy + y^2 - \dfrac{3(x+y)}{xy}$

(5) $z = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ (6) $z = x^2y - y^2x - x + y$

(7) $z = (4 - 3x^2 - y^2)(y - x)$ (8) $z = (y - 2x + x^2)(y - 4x + 3x^2)$

(9) $z = (1 - x^2 - y^2)^2$ (10) $z = x^4 - 2x^2y + 4x^2 - 4xy + 2y^2$

12. $x^2 + y^2 = 1$ のとき $x^4 + y^4$ の極値を求めよ.

第7章

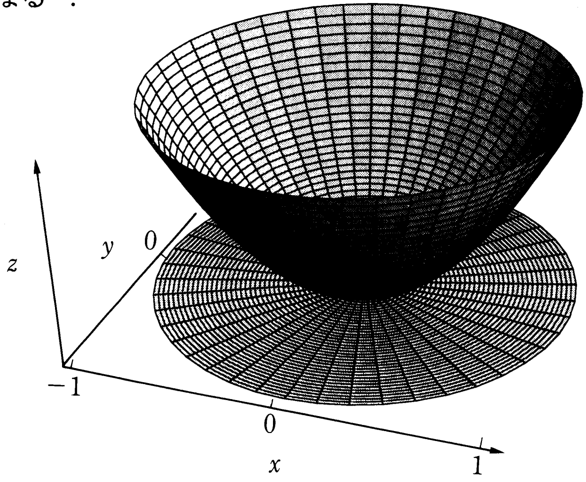
重積分

1　重積分について

1変数関数 $y = f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は区間 $[a,b]$ 上の面積を求める作業であった．同じように2変数関数 $z = f(x,y)$ の積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

は平面の領域 D 上の体積を求める作業になる．例えば $f(x,y) = x^2 + y^2$, 領域 $D = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \}$ （単位円盤）の場合, 重積分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は下の図の陰の部分の体積を求めることになる[1]．



この章では主に2変数関数の積分を述べるが, 一般の n 変数関数の積分は2変数関数の積分から類推することができる．

[1]重積分と1変数の積分の違いは, 重積分には不定積分はないことである．したがって, 重積分においては領域 D の指定のない $\iint f(x,y)\,dxdy$ はあり得ない．

まず, 領域 D が座標軸に平行な閉長方形であるときの積分については, 閉長方形

$$D = \{(x, y) :\ a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$

に対して区間 $[a, b]$, $[c, d]$ を次のように分割する:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b.$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d.$$

この分割によってできる閉長方形

$$D_{ij} = \{(x, y) | x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

全体を D の**分割**といい, Δ で表す. さらに, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ の最大値を $|\Delta|$ で表す. D で定義された関数 $f(x, y)$ に対して, 閉長方形 D_{ij} のおのおのから代表点 (ξ_{ij}, η_{ij}) $(x_{i-1} \leqq \xi_{ij} \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq \eta_{ij} \leqq y_j)$ を取り出し,

$$V(\Delta) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

を考える. $f(x, y) \geqq 0$ であれば, $f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ は底面が長方形 D_{ij} で, 高さが $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ の直方体の体積であり, $V(\Delta)$ はそれらの直方体の体積の和である. $V(\Delta)$ が分割 Δ や代表点 (ξ_{ij}, η_{ij}) の取り方によらず, $|\Delta| \to 0$ のとき一定の値に近づくならば, この極限値を

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

と書き, D における $f(x, y)$ の**積分** または **2 重積分** という. このとき, $f(x, y)$ は D で**積分可能**であるという. したがって

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

と書ける. 領域 D が普通の領域（境界がなめらかな曲線がつながったものとなっている）のとき $f(x, y)$ が連続であれば, $f(x, y)$ は D で積分可能であることが知られている.

積分の定義から次の定理が成立することがわかる.

定理 1.1. $f(x, y)$, $g(x, y)$ が D で積分可能であるとき, ただし α, β は定数とする,

(1) $\displaystyle\iint_D \{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\}\, dxdy = \alpha \iint_D f(x, y)\, dxdy + \beta \iint_D g(x, y)\, dxdy.$

(2) D で $f(x, y) \leqq g(x, y)$ ならば, $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dy \leqq \iint_D g(x, y)\, dxdy,$

(3) $f(x, y)g(x, y)$ は D で積分可能である.

Point: (3) は $f(x, y), g(x, y)$ が連続ならば $f(x, y)g(x, y)$ も連続となるので, そのような条件で考えもよい.

最初に, 領域 D が $D=[a,b]\times[c,d]$ の長方形のときに積分を求める (どのように計算すればよいのかを述べる). 重積分の定義

$$\sum_{\substack{1\leqq i\leqq m\\1\leqq j\leqq n}} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$$

を $\displaystyle\sum_j\sum_i f(x_i,y_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ と考えて $\displaystyle\sum_j\left\{\sum_i f(x_i,y_j)(x_i-x_{i-1})\right\}(y_j-y_{j-1})$ として, $\{\quad\}$ の中の分割を細かくし $f(x,y_j)$ を x の関数とみて, 極限をとれば $\{\quad\}$ は変数 x の関数 $f(x,y_j)$ の積分であるから $\displaystyle\int_a^b f(x,y_j)dx$ となる. したがって

$$\sum_j\left(\int_a^b f(x,y_j)dx\right)(y_j-y_{j-1})$$

となるので, 次は $\displaystyle\int_a^b f(x,y_j)dx$ を y の関数とみると, 分割を細かくして, 極限をとると

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

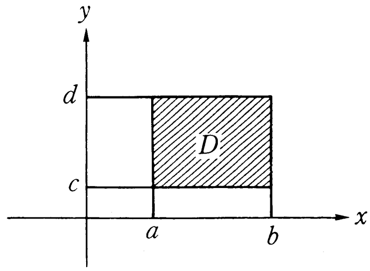
となる. 逆に進めれば $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ となるので, 次の定理を得る.

定理 1.2. $D=[a,b]\times[c,d]$ のとき

$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

$\displaystyle\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy$ のような積分を**累次積分**[2] といい, $\displaystyle\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$ と表す.

Point: 領域 D が長方形 $D=[a,b]\times[c,d]$ のときは, どちらからでもいいが, 例えばまず y を定数と見て $f(x,y)$ を x の1変数関数と見る. そこで, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ $(=g(y))$ を求める. これは y の式になるから, これを y の関数とみて, 定積分 $\displaystyle\int_c^d g(y)dy$ を計算すればよい. 順序を逆にしても同じ値になる.



積分領域が必ずしも閉長方形領域でないときでも, それが普通の領域であれば, 次のようにして積分を計算することができる.

[2]逐次積分とも言うこともある.

定理 1.3. (1) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を $a \leqq x \leqq b$ で $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$ なる連続関数とする．積分領域 $D = \{(x,y) | a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$ で $f(x,y)$ が連続のとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

(2) $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ を $c \leqq y \leqq d$ で $\psi_1(y) \leqq \psi_2(y)$ なる連続関数とする．積分領域 $D = \{(x,y) | c \leqq y \leqq d, \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$ で $f(x,y)$ が連続のとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

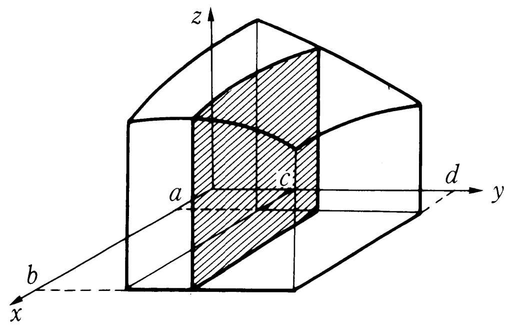
上の定理から，次のことがいえる．

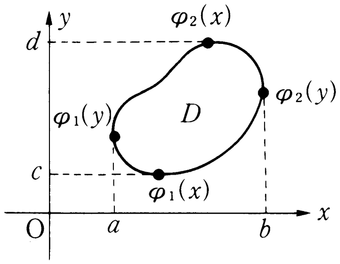
系 1.4 (積分順序の変更)． 積分領域 D が

$$D = \{(x,y) | a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\} = \{(x,y) | c \leqq y \leqq d, \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

と 2 通りに表されるとき，次のように積分順序を変更することができる．

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$





以下の例のように 2 重積分を利用して累次積分の積分順序を変えれば計算が簡単になることがある．また 2 重積分を累次積分を行って計算するとき積分の順序に注意すれば簡単になることがある．

例 1.1. $\displaystyle\int_0^\pi dx \int_0^1 y\cos xy\,dy$ を求めよ．

解 $D : 0 \leqq x \leqq \pi, 0 \leqq y \leqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}\int_0^\pi dx \int_0^1 y\cos xy dy &= \iint_D y\cos xy\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^\pi y\cos xy dx \\ &= \int_0^1 [\sin xy]_0^\pi\,dy = \int_0^1 \sin \pi y dy = \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi y\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}. \ \square\end{aligned}$$

例 1.2. $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$ を求めよ.

解 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\} = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ より,

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2} dy = \int_0^1 \left[ye^{-x^2}\right]_0^x dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-t}}{2} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{2}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{2} = \frac{e-1}{2e}. \ \square\end{aligned}$$

重心: xy-平面上に質点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_n(x_n,y_n)$ があるとし, 各 P_i の質量は m_i であるとする. この質点系の重心, つまりこの質点系が釣り合う点の座標 (x,y) は

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

で与えられることが知られている.

xy-平面の領域 D を薄い板と考え, その重心を調べる. D に密度 $\rho(x,y)$ で質量が分布しているとき, すなわち (x,y) を含む微小な面積 ΔS の部分の質量が $\rho(x,y)\Delta S$ であるとき, D の重心は次のように考えられる.

D を微少な領域 $D_1, D_2, \ldots, D_n$ に分割し, 各 D_i の面積を S_i, また各 D_i より任意に点 $P_i(x_i,y_i)$ を取る. 各 D_i の質量は $\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$ であり, この質量が点 $P_i(x_i,y_i)$ に集中しているとする. このとき質点系 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots P_n(x_n,y_n)$ の重心の座標 (X,Y) は

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n \rho(x_i,y_i)\Delta S_i x_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i,y_i)\Delta S_i}, \qquad Y = \frac{\sum_{i=1}^n \rho(x_i,y_i)\Delta S_i y_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i,y_i)\Delta S_i}$$

で与えられる. D の重心 (X_0, Y_0) は D の分割 Δ を細かくしていったときの X, Y の極限と考えられる. 2 重積分の定義より,

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i,y_i)\Delta S_i x_i = \iint_D \rho(x,y) x \, dxdy, \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i,y_i)\Delta S_i y_i = \iint_D \rho(x,y) y \, dxdy,$$
$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i,y_i)\Delta S_i = \iint_D \rho(x,y) \, dxdy$$

であるから,

$$X_0 = \frac{\iint_D \rho(x,y) x \, dxdy}{\iint_D \rho(x,y) \, dxdy}, \qquad Y_0 = \frac{\iint_D \rho(x,y) y \, dxdy}{\iint_D \rho(x,y) \, dxdy}$$

である. 特に密度が一様であるとき $\rho(x,y)$ は定数なので, D の重心 (X_0, Y_0) は次のようになる.

$$X_0 = \frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy}, \qquad Y_0 = \frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy}.$$

例 1.3. 領域 $D: x^2 \leqq y \leqq 1$ を密度が一様な薄い板と考えたとき, その重心を求めよ.

解 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} x\,dy = \int_{-1}^{1} x(1-x^2)\,dx = 0.$

$\displaystyle\iint_D y\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} y\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)\,dx = \frac{4}{5}.$

また $\displaystyle\iint_D dxdy$ は D の面積であるから, $\displaystyle\iint_D dxdy = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{4}{3}.$

よって重心は $\left(0, \dfrac{3}{5}\right)$. □

問 1.1. 次の 2 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x^2$

(3) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x$

(4) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq 1$

(5) $\displaystyle\iint_D (1-x-y)\,dxdy \quad D: 0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq 1$

(6) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \quad D: 0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq 1$

問 1.2. 次の 2 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D y^2\,dxdy \quad D: 0 \leqq y \leqq 1, \sqrt{y} \leqq x \leqq 2-y$

(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+3y)\,dxdy \quad D: 0 \leqq y \leqq 1, y^2 \leqq x \leqq y$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy \quad D: 1 \leqq x \leqq 2, 1 \leqq y \leqq x^2$

(4) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy \quad D: 0 \leqq y, x^2+y^2 \leqq 1$

(5) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \quad D: 0 \leqq x, 0 \leqq y, x^2+y^2 \leqq 1$

(6) $\displaystyle\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy \quad D: 0 \leqq y \leqq x \leqq 1$

問 1.3. $f(x)$, $g(y)$ がそれぞれ $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ で連続なとき,

$$\iint_D f(x)g(y)\,dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

となることを示せ. ただし, $D : a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$.

問 1.4. 次の累次積分の順序を交換せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ (2) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

(3) $\displaystyle\int_0^a dx \int_x^{2x} f(x,y)dy \quad (a > 0)$ (4) $\displaystyle\int_a^b dx \int_a^{x} f(x,y)dy \quad (b > a > 0)$

問 1.5. 領域 $D : x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y$ を密度が一様な薄い板と考えたとき, その重心を求めよ.

2 広義積分

重積分の定義より積分可能な関数は有界であり, 積分領域も有界であった. この節では積分の定義を拡張して有界でない関数や, 積分領域が有界でない場合にも適用できるようにする.

領域 D に含まれる面積確定な有界領域の増加列 $\{S_n\}$:

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots \subseteq D$$

で, D に含まれる任意の有界領域 A に対して, n を十分大きくとれば $A \subseteq S_n$ とできるとき $\{S_n\}$ を D の**近似増加列**という. 以後, 積分領域 D は近似増加列がとれるとし, また, 被積分関数は近似増加列の各有界領域上では積分可能とする.

$f(x,y)$ を領域 D 上の関数[3] , $\{S_n\}$ を D の近似増加列とする. 数列

$$I(S_n) = \iint_{S_n} f(x,y)\,dxdy$$

が近似増加列 $\{S_n\}$ の取り方によらず一定の極限値をもつとき, その極限値を D における $f(x,y)$ の**広義積分** という. すなわち

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)\,dxdy$$

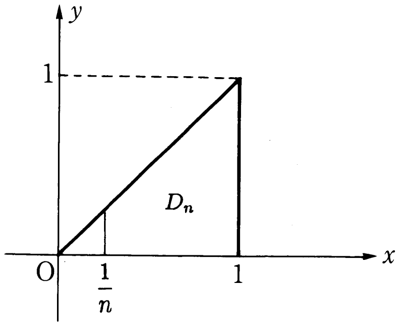
である. 積分領域 D の 1 つの近似増加列 $\{S_n\}$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} |f(x,y)|\,dxdy < \infty$ ならば数列 $\{I(S_n)\}$ が極限値をもち, 他の近似増加列についても同じ極限値をもつことが知られている.

[3]ある面積 0 の D の部分集合 E 上で $f(x,y)$ の値が定義されていないようなものも許容する. この場合には D の有界集合として E の点を含まないものだけを考えることにする.

例 2.1. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$ を求めよ.

解 $D_n: \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x$ として

$I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を求める.



$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\log(y+\sqrt{x^2+y^2})\right]_0^x dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \log(1+\sqrt{2}\,)dx = \left(1-\frac{1}{n}\right)\log(1+\sqrt{2}\,). \end{aligned}$$

$\{D_n\}$ は D の近似増加列であるから,

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = \log(1+\sqrt{2}). \quad \square$$

例 2.2. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy \quad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y$ を求めよ.

解 $D_n: 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n$ とする.

$$\iint_{D_n} \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy = \int_0^n dx \int_0^n \frac{1}{(x+y+1)^4}dy = \int_0^n \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+y+1)^3}\right]_0^n dx$$

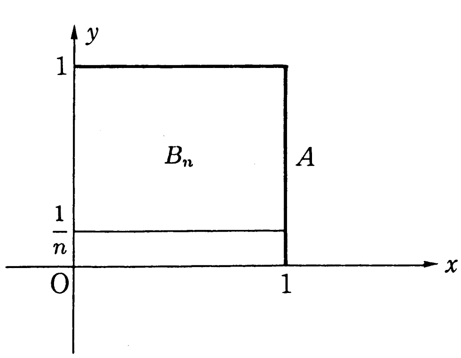
$$= \frac{1}{3}\int_0^n \left\{\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+n+1)^3}\right\}dx = \frac{1}{3}\frac{(-1)}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+n+1)^2}\right]_0^n$$

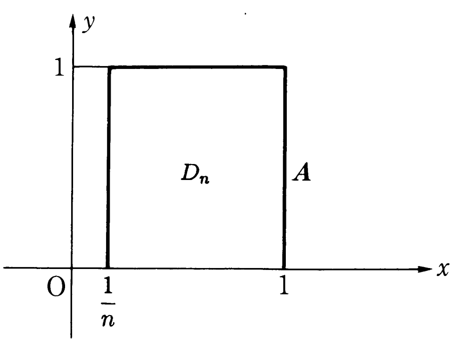
$$= \frac{1}{6}\left\{1 + \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{2}{(n+1)^2}\right\} \to \frac{1}{6} \quad (n\to\infty).$$

よって, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy = \frac{1}{6}$. $\square$

例 2.3. $D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ のとき, $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ は存在しないことを示せ.

解 $B_n: 0 \leqq x \leqq 1, \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1,\ D_n: \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$ とする. $\{B_n\}$ と $\{D_n\}$ は D の近似増加列である.





$\lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} f(x,y)\,dxdy$ と $\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ を求めて, 値を比べてみる.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\iint_{B_n} f(x,y)\,dxdy &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_0^1 dy\\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{-1}{1+y^2}dy=-\left[\tan^{-1}y\right]_{\frac{1}{n}}^{1}\\ &= -\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{n}\to-\frac{\pi}{4}\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

同様に $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 dx\\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\tan^{-1}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}\\ &= \frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{n}\to\frac{\pi}{4}\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

近似増加列の取り方によって極限値が異なるので, $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は存在しない. □

Point: この例は累次積分が無条件に積分の順序を交換できないことをも示している. また, 累次積分ができても必ずしも 2 重積分が可能ではないことも示している.

問 2.1. 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}\quad D:0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}dxdy\quad D:0\leqq x\leqq 1, x\leqq y\leqq 1$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy\quad D:0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq x$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2}\sin\frac{\pi y}{2}dxdy\quad D:0\leqq x\leqq y^2, 0\leqq y\leqq 1$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x-y^2}}\quad D:0\leqq x\leqq a, y^2\leqq x$

3 変数変換

この節では 2 変数関数の積分の変数変換の公式について述べる. 示したいのは次の定理である.

定理 3.1. uv-平面から xy-平面への関数が

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

であり，$uv-$ 平面の領域 E と $xy-$ 平面の領域 D が 1 対 1 に対応しているとする．また，$x(u,v)$，$y(u,v)$ は u,v に関して偏微分可能で，偏導関数は連続とし，$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ とする．このとき，D 上で積分可能な関数 $f(x,y)$ に対して

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f\left(x(u,v), y(u,v)\right)|J|dudv$$

が成り立つ．

証明の概略 まず，平面の原点を O とし，2 点 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,b_2)$ に対して 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって作られる平行四辺形の面積は

$$|a_1b_2 - a_2b_1|$$

であることに注意する．重積分 $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ とは，次の和の極限であった．微小な領域 $D(x,y)$ に，領域 D を分割して，

$$\sum_{D(x,y)} f(x,y)\mu(D(x,y)),$$

とする．このときの $\mu(D(x,y))$ は，領域 $D(x,y)$ の面積である．一つの微小な領域 $D(x,y)$ は領域 E の中の微小な長方形 $E(u,v) = [u, u+h] \times [v, v+k]$ による，写像 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ による像であるとする．3 点 A, B, C を $\mathrm{A}(x(u,v), y(u,v))$，$\mathrm{B}(x(u+h,v), y(u+h,v))$，$\mathrm{C}(x(u,v+k), y(u,v+k))$ とする．2 変数関数のテイラー展開により

$$\begin{cases} x(u+h,v) \fallingdotseq x(u,v) + h\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} = x + h\dfrac{\partial x}{\partial u} \\ y(u+h,v) \fallingdotseq y(u,v) + h\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} = y + h\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ x(u,v+k) \fallingdotseq x(u,v) + k\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} = x + k\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ y(u,v+k) \fallingdotseq y(u,v) + k\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} = y + k\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

であるから $\mathrm{B}\left(x + h\dfrac{\partial x}{\partial u}, y + h\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)$，$\mathrm{C}\left(x + k\dfrac{\partial x}{\partial v}, x + k\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)$ と考えてよい．また，微小な領域 $D(x,y)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ によって作られる平行四辺形と考えてよいので，面積 $\mu(D(x,y))$ は，上の注意から

$$\mu(D(x,y)) = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right|\cdot hk = |J|\mu(E(u,v)).$$

したがって, 次の等式を得る.

$$\sum_{D(x,y)} f(x,y)\mu(D(x,y)) = \sum_{E(u,v)} f(x(u,v),y(u,v))|J|\mu(E(u,v)).$$

E の分割 $E(u,v)$ を細かくすれば, 自動的に, その像 $D(x,y)$ によって D が細かく分割されるので, 上記の等式の左辺は $\int\int_D f(x,y)dxdy$ に, 右辺は $\int\int_E f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$ に収束する. 以上で定理は示された. □

ここに出てきた $J = \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}$ は **ヤコビアン** といわれ, 行列式を用いて表すと記憶しやすい. 他にも次のように書き表される.

$$J \;=\; \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \;=\; \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Point: J 自身の定義は行列式を用いていることより, $|J|$ は J の絶対値であって, 行列式ではない.

変数変換で, 最も重要なものが, 極座標変換である. このときの J は r であることを暗記しておかなければならない. $r \geqq 0$ であるので, この場合は絶対値をとる必要がない.

系 3.2. xy-平面の領域 D を極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

したとき, 対応する $r\theta$-平面の領域が E であるとする, このとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$$

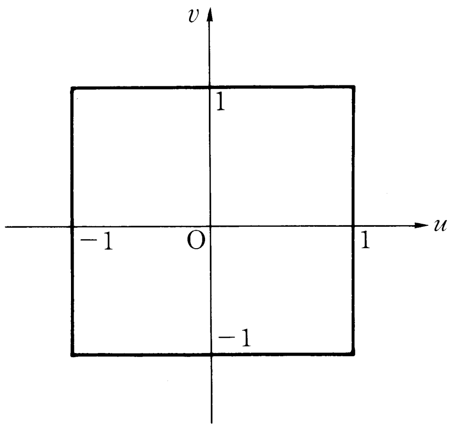
証明 xy-平面の点 $(x,y) \neq (0,0)$ に対して, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad (0 < r,\ \alpha \leqq \theta < 2\pi + \alpha)$ となる r,θ は一つしか定まらないから $r\theta$-平面の点と xy-平面の点の対応 : $(r,\theta) \to (x,y)$ は 1 対 1 対応である. また,

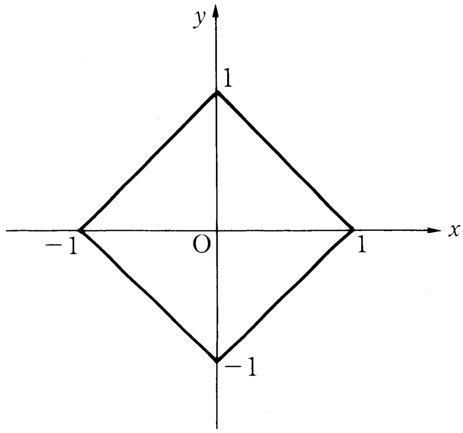
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \geqq 0$$

であるので定理 3.1 より等式が成立する. □

例 3.1. $\iint_D \sqrt{x+y+1}\,dxdy \quad D: -1 \leqq x+y \leqq 1, -1 \leqq x-y \leqq 1$ を求めよ．

解　$x+y=u,\ x-y=v$ とすると，D は $E: -1 \leqq u \leqq 1, -1 \leqq v \leqq 1$ に対応する．





$$x = \frac{1}{2}(u+v),\ y = \frac{1}{2}(u-v),\ J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x+y+1}\,dxdy &= \iint_E \sqrt{u+1}|J|dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dv \int_{-1}^{1} \sqrt{u+1}du \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} dv\right)\left(\int_{-1}^{1} \sqrt{u+1}du\right) = \frac{1}{2}2\ \Box\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \quad \Box \end{aligned}$$

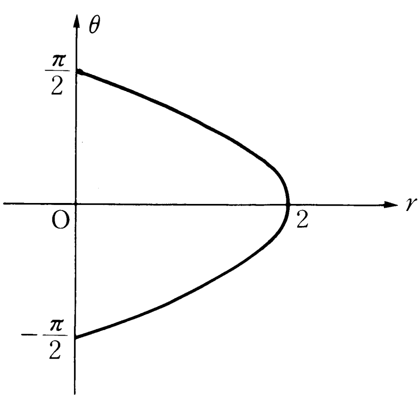
例 3.2. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq 1$ を求めよ．

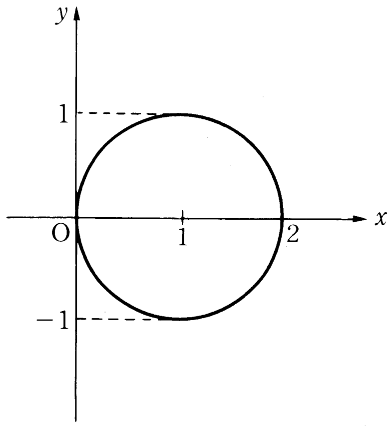
解　極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ で領域 $x^2+y^2 \leqq 1$ は領域 $E: r \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi$ に対応しているから，

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E r^2\,drd\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2dr\right) = \frac{2}{3}\pi \quad \Box$$

例 3.3. $\displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq 2x$ を求めよ.

解 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると，領域 D は θ の取り得る値の範囲が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることはすぐわかる．r の取り得る値の範囲は θ によって変化して，図から $0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$ であることがわかる．したがって (r,θ) の領域 E は $E: -\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta$ である.





よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy &= \iint_E \sqrt{4-r^2}\,r\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}\,r\,dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin^3\theta|)d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}. \quad \square
\end{aligned}$$

例 3.4. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}dxdy \quad D: 0 \leqq x, 0 \leqq y$ を求めよ.

解 $\begin{cases} x+y+1=u \\ y=v \end{cases}$ とすると，$\begin{cases} x=u-v-1 \\ y=v \end{cases}$ であるから，

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u-v-1 \geqq 0 \\ v \geqq 0 \end{cases} \iff 0 \leqq v \leqq u-1, \quad J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

よって $E: 0 \leqq v \leqq u-1$ とすると，

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^4}\,dxdy &= \iint_E \frac{1}{u^4}dudv = \lim_{n\to\infty}\int_1^n du \int_0^{u-1} \frac{1}{u^4}dv \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{u-1}{u^4}du = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\right]_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}. \quad \square
\end{aligned}$$

例 3.5. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ.

解 重積分の定義を考えれば, $D = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0\}$ とすると,

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

であるので, この重積分を求めればよいことがわかる. 領域 D は有界ではないので, 有界な正方形領域 $D(n) = \{(x,y) \mid 0 \leqq x, y \leqq \frac{n}{\sqrt{2}}\}$ (n は自然数) で近似する. 原点を中心とする半径 $\dfrac{n}{\sqrt{2}}$ と半径 n の円の第一象限の領域を, それぞれ $A(n)$ と $B(n)$ とおく. このとき $A(n) \subset D(n) \subset B(n)$ であり, 積分関数は $e^{-(x^2+y^2)} \geqq 0$ であるので,

$$\iint_{A(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqq \iint_{D(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqq \iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

である. 極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をすれば, 領域 $A(n)$ と $B(n)$ では θ はともに $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり r は $0 \leqq r \leqq \dfrac{n}{\sqrt{2}}$ と $0 \leqq r \leqq n$ であるので, 対応する $r\theta$-平面の領域 $E(n), F(n)$ は $E(n) : 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq \dfrac{n}{\sqrt{2}}$ と $F(n) : 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq n$ である. よって

$$\begin{aligned}\iint_{A(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \iint_{E(n)} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{n}{\sqrt{2}}} re^{-r^2}drd\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\frac{n}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-\frac{n^2}{2}}\right).\end{aligned}$$

同様に

$$\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2})$$

を得る. ここで $n \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{B(n)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

となる. 従って

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

であるから $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を得る. □

Point: 上の積分は，1変数関数の積分であるが，このように2変数関数の重積分として考えて求めるとよいことに，注意してほしい．また，この積分値はいろいろな場面に登場するので，しっかり覚えておくこと．

例 3.6. ガンマ関数とベータ関数は関係式 $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を満たすことを示せ．

解 ガンマ関数 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$ において $x=t^2$ と変数変換すると，

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}\,dt.$$

またベータ関数 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p>0, q>0)$ において $x=\cos^2\theta$ と変数変換すると，

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta$$

であることに注意する．このとき，

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy\right)\\
&= 4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dxdy \quad D: 0 \leqq x, 0 \leqq y.
\end{aligned}$$

ここで $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}
(\text{上式}) &= 4\iint_E e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,drd\theta \quad E: 0 \leqq r, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\\
&= \left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\right)\\
&= \Gamma(p+q)B(p,q). \quad \square
\end{aligned}$$

問 3.1. 次の積分を求めよ．

(1) $\iint_D (x+y)\sin(x-y)\,dxdy \quad D: 0 \leqq x+y \leqq \pi, 0 \leqq x-y \leqq \pi$

(2) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq a^2 \quad (a>0)$

(3) $\iint_D x^2\,dxdy \quad D: 0 \leqq x, x^2+y^2 \leqq 1$

(4) $\iint_D y\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq ax, y \geqq 0 \quad (a>0)$

(5) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqq ax \quad (a>0)$

4　3 重積分

今まで 2 変数関数の積分について述べたが, 3 変数以上の関数の積分についても同様な議論ができる．特に 3 変数関数について述べる．

各辺が座標軸に平行な直方体 $D = \{(x,y,z)|a_1 \leqq x \leqq a_2, b_1 \leqq y \leqq b_2, c_1 \leqq z \leqq c_2\}$ において定義された関数 $f(x,y,z)$ の積分 $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ の定義は次の通りである．

D の分割

$$\Delta : \begin{cases} a_1 = x_0 < x_1 \cdots < x_\ell = a_2 \\ b_1 = y_0 < y_1 \cdots < y_m = b_2 \\ c_1 = z_0 < z_1 \cdots < z_n = c_2 \end{cases}$$

に対して, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ とおき, i,j,k を動かしたときの最大の値を $|\Delta|$ とする．直方体 $D_{ijk} = \{(x,y,z)|x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq y \leqq y_i,$ $z_{k-1} \leqq z \leqq z_k\}$ の各々から代表点 $(\xi_{ijk}, \varphi_{ijk}, \zeta_{ijk})$ を選び,

$$V(\Delta) = \sum_{i,j,k} f(\xi_{ijk}, \varphi_{ijk}, \zeta_{ijk})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

を考える．これが, $|\Delta| \to 0$ のとき, 分割 Δ および代表点の取り方によらず一定の値に近づくならば, その極限値を

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

と書き, D における $f(x,y,z)$ の**積分**または**3 重積分**という．このとき, $f(x,y,z)$ は D で**積分可能**であるという．すなわち,

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i,j,k} f(\xi_{ijk}, \varphi_{ijk}, \zeta_{ijk})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

である．

3 重積分の計算については, 次の定理を利用すればよい．

定理 4.1. (1) 関数 $f(x,y,z)$ は直方体 $D=\{(x,y,z)|a_1 \leqq x \leqq a_2,\ b_1 \leqq y \leqq b_2,\ c_1 \leqq z \leqq c_2\}$ 上で連続ならば,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

(ただし, 積分順序は変えることができる).

(2) 関数 $f(x,y,z)$ が領域
$D=\{(x,y,z)|a_1 \leqq x \leqq a_2,\ \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x),\ \psi_1(x,y) \leqq z \leqq \psi_2(x,y)\}$
上で連続ならば,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

ただし, $\phi_1(x), \phi_2(x), \psi_1(x,y), \psi_2(x,y)$ は連続関数である.

変数変換についても２重積分と同様に, 次の定理が知られている.

定理 4.2. E, D がそれぞれ uvw-空間, xyz-空間における領域で, 関数 $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$ で１対１に対応し, $|J| \neq 0$ とする. 関数 $f(x,y,z)$ が D 上で積分可能ならば,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f\left(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\right)|J|\, dudvdw.$$

ただし, $x=\varphi(u,v,w)$,$y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$ は偏微分可能で, 各偏導関数は連続であるとする. また,

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix}$$

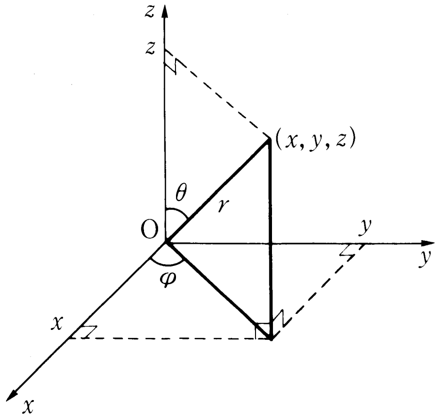
である.

よく利用する変数変換は直交座標から極座標への変換である.

系 4.3. 極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$ で $r\theta\varphi$-空間の領域 E が D と１対１に対応しているならば, D 上で積分可能な関数 $f(x,y,z)$ に対して,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi.$$

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi \end{cases}$$



例 4.1. $\iiint_D xy^2e^z dxdydz \quad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq z \leqq 3$ を求めよ．

解

$$\begin{aligned}\iiint_D xy^2e^z\,dxdydz &= \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^2 dy\int_0^3 y^2e^zdz\right) = \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^2 y^2dy\right)\left(\int_0^3 e^zdz\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{8}{3}(e^3-1) = \frac{4}{3}(e^3-1). \ \square\end{aligned}$$

例 4.2. $\iiint_D x^2\,dxdydz \quad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ を求めよ．

解 D は中心が $(0,0,0)$ で半径が1の球の内部で $0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z$ を満たす部分であるから，$D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, 0 \leqq z \leqq \sqrt{1-x^2-y^2}$ と書ける．

$$\begin{aligned}\iiint_D x^2\,dxdydz &= \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2dz \\ &= \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{1-x^2-y^2}dy \\ &= \int_0^1 x^2\frac{\pi}{4}(1-x^2)dx \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{\pi}{30}\ \square\end{aligned}$$

例 4.3. $D: x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$ $(a>0)$ のとき，$\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^\ell dxdydz$ を求めよ．

解　D から D 内の z-軸の部分を除いた領域を D_1 とすると，極座標変換で D_1 は $E: 0 < r \leqq a, 0 < \theta < \pi, 0 \leqq \varphi < 2\pi$ と対応している．

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^\ell\, dxdydz &= \iiint_{D_1} (x^2+y^2+z^2)^\ell\, dxdydz = \iiint_E r^{2\ell} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^a r^{2\ell+2} dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \frac{4\pi a^{2\ell+3}}{2\ell+3}\end{aligned}$$

$\ell = 0$ の場合は半径 a の球の体積 $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ である．□

重心：平面の場合と同様の考察により，空間内の領域 D に密度 $\rho(x,y,z)$ で質量が分布しているとき，すなわち (x,y,z) を含む微小な体積 ΔV の部分の質量が $\rho(x,y,z)\,\Delta V$ であるとき D の重心 (X_0, Y_0, Z_0) は

$$X_0 = \frac{\iiint_D x\rho(x,y,z)\, dxdydz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\, dxdydz},\quad Y_0 = \frac{\iiint_D y\rho(x,y,z)\, dxdydz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\, dxdydz},$$

$$Z_0 = \frac{\iiint_D z\rho(x,y,z)\, dxdydz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\, dxdydz}$$

で与えられる．特に $\rho(x,y,z)$ が定数のときは，

$$X_0 = \frac{\iiint_D x\, dxdydz}{\iiint_D dxdydz},\quad Y_0 = \frac{\iiint_D y\, dxdydz}{\iiint_D dxdydz},\quad Z_0 = \frac{\iiint_D z\, dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$$

で与えられる．

例 4.4. 密度が一様な半球 $D: x^2+y^2+z^2 \leqq a^2,\ 0 \leqq z\quad (a>0)$ の重心を求めよ．

解 D 内の点 (x,y,z) にその点の極座標を対応させる．D は $E: 0 < r \leqq a,\ 0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \varphi \leqq 2\pi$ と対応しているので，

$$\begin{aligned}\iiint_D x\, dxdydz &= \iiint_E r^3 \sin^2\theta \cos\varphi\, drd\theta d\varphi = \int_0^a r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0. \\ \text{同様に}\quad & \iiint_D y\, dxdydz = 0. \\ \iiint_D z\, dxdydz &= \iiint_E r^3 \sin\theta\cos\theta\, drd\theta d\varphi = \int_0^a r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{4}a^4. \\ \iiint_D dxdydz &= \iiint_E r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = \int_0^a r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}a^3.\end{aligned}$$

よって重心は $\left(0, 0, \dfrac{3}{8}a\right)$ である．□

問 4.1. 次の 3 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D \sin(x+y+z)dxdydz \qquad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x+y+z \leqq \frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+a)^3}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x+y+z \leqq a$

(3) $\displaystyle\iiint_D e^{x+y+z}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b,\ 0 \leqq z \leqq c$

(4) $\displaystyle\iiint_D \frac{xy}{(y^2+z^2)^2}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 1 \leqq z \leqq \sqrt{3}$

(5) $\displaystyle\iiint_D yzdxdydz \qquad D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x+y+z \leqq 1$

(6) $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}dxdydz \qquad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ 0 \leqq z \leqq x$

5　曲面積

最後に空間における曲面の面積を求めることを述べる．まず，これまで空間における曲面を $z = f(x, y)$ のように表していたが，空間における曲面を扱う場合は，より一般的に

$$\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{cases}$$

と表すことが多い．

例 5.1. 曲面 $z = x^2 + y^2$ は，r と θ を使って，

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= r^2 \end{cases}$$

と表すことができる (円柱座標変換)．

まず，次の定理を示す．

定理 5.1. (u,v) が領域 D を動き, D 上の曲面 S が

$$\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

で与えられるとき, S の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv$$

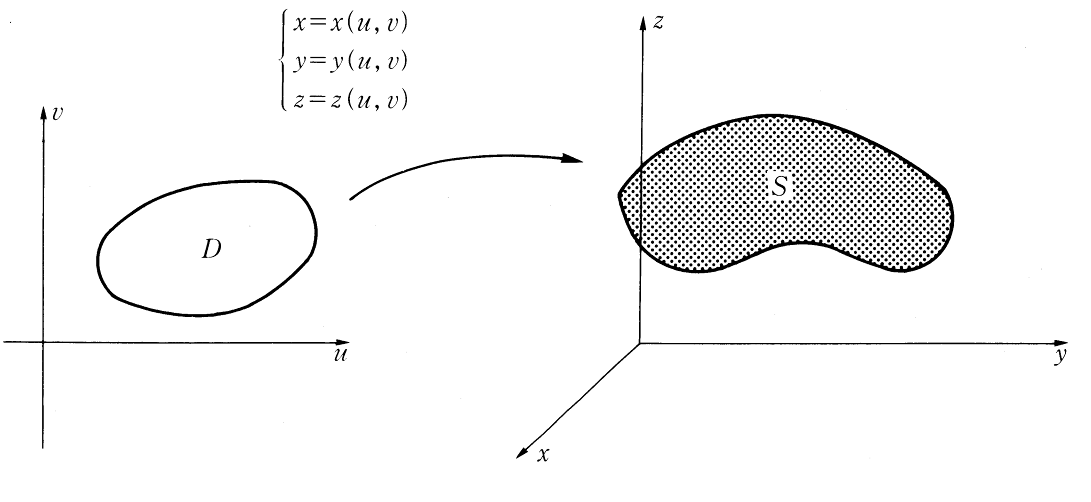
である.

証明. 領域 D 上の曲面の面積は2変数関数の体積を求めたときと同様に D を細かい長方形 $D(uv)$ に分割すると, $D(uv)$ 上の曲面 $S(uv)$ の面積は, ほとんど平面になっている. そして, そこの小さい接平面 $\Delta(uv)$ の面積とほとんど変わらない. そこで, 分割を細かくしたときの $\Delta(uv)$ の面積の和をとり, この和の極限値によって求めることにする. この証明のために, まず, 次のことを確認しておく.

空間座標において O を原点とし $\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$ とする, このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって作られる平行四辺形の面積 S は

$$S = \sqrt{(a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2} \tag{7.1}$$

となる.



そこで細かい長方形 $D(uv)$ を $D(uv) = [u, u+h] \times [v, v+k]$ とする．2変数関数のテイラー展開により

$$\begin{cases} x(u+h, v) \fallingdotseq x(u,v) + h\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} = x + h\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} \\ y(u+h, v) \fallingdotseq y(u,v) + h\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} = y + h\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} \\ z(u+h, v) \fallingdotseq z(u,v) + h\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u} = z + h\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(u, v+k) \fallingdotseq x(u,v) + k\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} = x + k\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ y(u, v+k) \fallingdotseq y(u,v) + k\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} = y + k\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ z(u, v+k) \fallingdotseq z(u,v) + k\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v} = z + k\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v}. \end{cases}$$

従って，接平面 $\Delta(uv)$ の面積は $\mathrm{A}(x,y,z)$, $\mathrm{B}\left(x + h\dfrac{\partial x}{\partial u}, y + h\dfrac{\partial y}{\partial u}, z + h\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\mathrm{C}\left(x + k\dfrac{\partial x}{\partial v}, y + k\dfrac{\partial y}{\partial v}, z + k\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とでできる平行四辺形の面積にほぼ等しいので，(7.1) より

$$\Delta(uv) \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,hk.$$

この小さい長方形 $D(uv)$ 上の接平面 $\Delta(u,v)$ の和をとる．すなわち，

$$\sum_{\Delta(uv)} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,hk.$$

分割 $D(uv)$ を細かくし，極限をとれば

$$S = \int\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,dudv$$

を得る．□

次に，曲面が関数 $z = f(x,y)$ によって与えられたときは，次のように求めればよい．

定理 5.2. 曲面 $z = f(x,y)$ $((x,y) \in D)$ のときの面積 S は

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

である．

証明 このときは

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in D$$

となるので

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1 \\ \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

であるので定理 5.1 より示された. □

例 5.2. $D:\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{2},\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}-x$ にある曲面 $z = \dfrac{1}{2}x^2 + y$ の曲面積を求めよ.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ となるから, 曲面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{x^2+2}\,dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2}-x} \sqrt{x^2+2}\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}-x\right)\sqrt{x^2+2}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[x\sqrt{x^2+2} + 2\log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\left[(x^2+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right) + \sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right) \end{aligned}$$

となる.（公式：$\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$ を使う.）

例 5.3. 柱面 $x^2+y^2 = ax$ によって切りとられる柱面 $z^2 = 4ax$ の曲面積を求めよ.

解 $z^2 = 4ax$ より $z = \pm 2\sqrt{ax}$ となる. 上半分を考えて, $z = 2\sqrt{ax}$ に対して $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\dfrac{a}{x}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる. また $x^2+y^2 = ax$ より領域 D は点 $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{a}{2}$ の円になる. よって曲面積は

$$S = 2\int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dy = 4\int_0^a \sqrt{ax-x^2}\sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

で与えられる. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は半径 a の $\dfrac{1}{4}$ の円の面積 $\dfrac{1}{4}\pi a^2$ になる. よって曲面積 S は πa^2 となる.

問 5.1. 円柱面 $x^2+y^2 = a^2$ によって切り取られる柱面 $x^2+z^2 = a^2$ の曲面の表面積を求めよ.

円柱座標の場合: 曲面が円柱座標によって, 方程式

$$z = \phi(r, \theta) \quad ((r, \theta) \in D)$$

で与えられているとき．このときは,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \quad\quad (r, \theta) \in D \\ z = \phi(r, \theta) \end{cases}$$

となり, それぞれヤコビアンを計算すると

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r \\ \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial\theta} - r\cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(z, x)}{\partial(r, \theta)} = -r\sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial r} - \cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial\theta} \end{cases}$$

であるので, 次の定理を得る．

> **定理 5.3.** 曲面 S が円柱座標 $z = \phi(r, \theta)$ $((r, \theta) \in D)$ によって与えられた場合, D 上の曲面積 S は次の式で与えられる．
>
> $$S = \iint_D \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}\, drd\theta.$$

例 5.4. 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ の $z \geqq 0$ の部分の面積を求めよ．

解　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって関数は円柱座標による方程式 $z = 1 - r^2$ となり, 領域 D は $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ となる．したがって $\dfrac{\partial z}{\partial r} = -2r$, $\dfrac{\partial z}{\partial\theta} = 0$ となるから,

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{r^2 + 4r^4}\, drd\theta &&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr \\ &= 4\pi \int_0^1 r\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}}\, dr &&= \frac{4}{3}\pi\left[\left(r^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right) \end{aligned}$$

となる．

例 5.5. 半円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ かつ $x > 0$ の内部にある曲面 $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ の面積を求めよ．

解 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって関数は円柱座標による方程式 $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ となり, 領域 D は $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2, x > 0\}$ より, 極座標では

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq r \leqq a,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

である. $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0,\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 1$ となるから

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{r^2+1}\,drd\theta = \int_0^a \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2+1}\,d\theta dr = \pi\int_0^a \sqrt{r^2+1}\,dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[r\sqrt{r^2+1} + \log\left|r+\sqrt{r^2+1}\right|\right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{2}\left\{a\sqrt{a^2+1} + \log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる.

問 5.2. $z = x^2+y^2$ の $D : x^2+y^2 \leqq 1$ 上の曲面の面積を求めよ.

問 5.3. 球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a>0)$ が円柱面 $x^2+y^2 = ax$ によって切りとられる部分の曲面積を求めよ.

定理 5.4. xy-平面上の曲線 $y = f(x) \geqq 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ が x-軸のまわりに回転してできる回転体の表面積 S は次の式で与えられる.

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

証明 回転面の方程式は $y^2+z^2 = f(x)^2$ であるから $z = \pm\sqrt{f(x)^2-y^2}$ である.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \pm\frac{f(x)f(x)'}{\sqrt{f(x)^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \mp\frac{y}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\ (\text{復号同順}).$$

よって

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

となる. 曲面の xy-平面への正射影を D とすると, 定理 5.2 より

$$\begin{aligned} S &= 2\iint_D \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,dxdy = 4\int_a^b dx\int_0^{f(x)} \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,dy \\ &= 4\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\frac{y}{f(x)}\right]_0^{f(x)} dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \quad \square \end{aligned}$$

例 5.6. 曲線 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ を x-軸のまわりに回転してできる回転体の表面積を求めよ．

解 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ より $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ となる．よって，回転体の表面積は

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx=2\pi\int_{-a}^{a}adx=2\pi a[x]_{-a}^{a}=4\pi a^2$$

となる．(回転体は半径 a の球面となる．)

問 5.4. xy-平面上の曲線 $9ay^2=x(x-3a)^2$ $(0\leqq x\leqq 3a)$ が x-軸のまわりに回転してできる回転体の表面積を求めよ．

第 7 章　練習問題

1. 次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x\cos y dxdy$　　$D:\ 0\leqq y\leqq a,\ y-a\leqq x\leqq 2y$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{y^2}dxdy$　　$D:\ 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 1$

(3) $\displaystyle\iint_D ye^{xy}dxdy$　　$D:\ 1\leqq x\leqq 2,\ \frac{1}{x}\leqq y\leqq 1$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$　　$D:\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$

(5) $\displaystyle\iint_D \sin x^2dxdy$　　$D:\ 0\leqq x\leqq\sqrt{\pi},\ 0\leqq y\leqq x$

(6) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$　　$D:\ x^2\leqq y\leqq x$

(7) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$　　(8) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{y}dy$　　(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin y^2dy$

2. $\displaystyle\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a(a-x)f(x)dx$ を示せ．

3. $\displaystyle\underbrace{\int_0^x dx\int_0^x dx\cdots\int_0^x}_{n\text{ 回}} f(x)dx=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt$ を示せ．

4. $f(x,y)$ の２回の偏導関数までが連続なとき，次式を示せ．

$$\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dxdy = f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c), \quad D:\ a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$$

5. $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続であるとき $\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2 \leqq \int_0^1 f(x)^2 dx$ なることを示せ．

（ヒント：$f(x)f(y) \leqq \dfrac{1}{2}\left\{f(x)^2 + f(y)^2\right\}$ を使え.）

6. 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy \qquad D:\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x-y)^\alpha} dxdy \qquad D:\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x,\ (0 < \alpha < 1)$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} \qquad D:\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y$

(4) $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x} dxdy \qquad D:\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq a^2\ (a > 0)$

(5) $\displaystyle\iiint_D z dxdydz \qquad D:\ \sqrt{x^2+y^2} \leqq z \leqq \sqrt{1-x^2-y^2}$

(6) $\displaystyle\iiint_D x dxdydz \qquad D:\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 0 \leqq z,\ x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$

7. 変数変換を利用して次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{y^2} e^{x+y} dxdy \qquad D:\ 0 \leqq x \leqq y,\ 1 \leqq y \leqq 2$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2 \sin(x+y) dydx \qquad D:\ \frac{-\pi}{2} \leqq x-y \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq x+y \leqq \pi$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} \qquad D:\ 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{2x^2+3y^2}{(x+y)^3} dxdy \qquad D:\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ 1 \leqq x+y \leqq 2$

(5) $\displaystyle\iint_D (px^2+qy^2) dxdy \qquad D:\ x^2+y^2 \leqq 1$

(6) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy \qquad D:\ x^2+y^2 \leqq 1$

(7) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x} dxdy \qquad D:\ x^2+y^2 \leqq x$

8. 次の立体の体積を求めよ．

(1) $0 \leqq z \leqq x,\ x^2+y^2 \leqq a^2\ \ (a>0)$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1\ \ (a,b,c>0)$

(3) $x^2 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq z \leqq xy$

(4) $x^2+y^2 \leqq 1,\ x^2+z^2 \leqq 1,\ x,y,z \geqq 0$

(5) $0 \leqq y \leqq 1-x^2,\ 0 \leqq z \leqq x^2+y^2,\ x \geqq 0$

(6) 楕円的放物面 $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}$, 柱面 $x^2+y^2=1$ 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(7) 双曲的放物面 $z=xy$, 柱面 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(8) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ で囲まれた, 円柱面 $x^2+y^2=x$ の内部の部分.

(9) 放物面 $x^2+y^2=z$, 円柱面 $x^2+y^2+2x=0$, 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(10) 放物面 $y^2+z^2=2x$, 円柱面 $x^2+y^2=x$ 及び平面 $z=0$ によって囲まれた部分.

(11) 曲面 $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, 円柱面 $x^2+y^2=1$ とで囲まれた $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ の部分.

9. 次の図形の重心の位置を求めよ．

(1) $\sqrt{x} \leqq y \leqq 1$ を y 軸のまわりに回転してできる回転体

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1,\ 0 \leqq z,\ (a,b,c>0)$

(3) $0 \leqq y \leqq 1-x^2,\ x \geqq 0$

10. 柱面 $x^2+y^2=a^2\ \ (a>0)$ の内部にある曲面 $z=xy$ の曲面積を求めよ．

11. 柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ の内部にある球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ の曲面積を求めよ．

12. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0)$ 上で，$z=b,\ z=c\ (0 \leqq b \leqq c \leqq a)$ の間にある部分の面積を求めよ．

13. アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ が x 軸のまわりに回転してできる回転体の表面積を求めよ．

解答

第０章

問 **1.1** $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$,

問 **1.2** 省略.　問 **2.1** 省略.

問 **2.2** (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) 2　(3) $\dfrac{1}{16}$　(4) $\dfrac{1}{16}$

問 **2.3** (1) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[5]{4}$　(2) $5^{-1}, 5^{\frac{-2}{3}}, 5^0, 5^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{2}}$　(3) $\sqrt[4]{0.125}, \sqrt[3]{0.25}, \sqrt{0.5}$

問 **2.4** 1.

問 **2.5** $x_0=3, x_1=2, x_2=\dfrac{7}{4}, x_3=\dfrac{97}{56}, x_4=\dfrac{18817}{10864}=1.7320508\cdots$

問 **3.1** 省略.

問 **3.2** (1) (c)　(2) (b)　(3) (a)　(4) (d).

問 **3.3** (1) $a=2, c=2$　(2) $a=\dfrac{1}{3}, c=-1$

問 **4.1** 省略.　問 **4.2** 省略. 問 **5.1** 省略.

問 **5.2** $a=2, b=-6, d=3$.

問 **5.3** 省略.

問 **6.1** $m=\sqrt{2}$.

問 **6.2** 省略.　問 **6.3** 省略.　問 **7.1** 省略.

問 **7.2** $\left(\dfrac{3}{4}, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

第０章　練習問題

1.

(1) $(x+1)^2$　(2) $2(x+2)^2-7$　(3) $2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$

(4) $-3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}$　(5) $-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{21}{4}$　(6) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

(7) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$　(8) $-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$

2. (1) $y=x-2$ (2) $y=x^2+1$ (3) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$
(4) $y=2\sqrt{x-2}+1$ (5) $y=2^{x+1}+2$ (6) $y=\dfrac{-1}{4x}$

3. (1) $\dfrac{\pi}{6}$ (2) $\dfrac{7}{18}\pi$ (3) $\dfrac{16}{9}\pi$ (4) $\dfrac{35}{9}\pi$ (5) 8π (6) $\dfrac{-\pi}{4}$ (7) $\dfrac{-\pi}{12}$ (8) 0

4. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4) 1 (5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(7) $\dfrac{-1}{2}$ (8) $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ (9) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (10) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ (11) $-\sqrt{3}$ (12) 1

5. (1) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (3) $-2-\sqrt{3}$ (4) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (5) $2-\sqrt{3}$ (6) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
(7) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$ (8) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

6. (1) 125 (2) 2 (3) -0.5 (4) 0.1 (5) 1 (6) $\dfrac{125}{2}$
(7) $\dfrac{1}{9}$ (8) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

7. (1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{27}, 3$ (2) $\sqrt[4]{35}, \sqrt{6}, \sqrt[3]{15}$ (3) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{5}, \sqrt[4]{3}$
(4) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{27}$ (5) $\sqrt[10]{10}, \sqrt[3]{2}$ (6) $\sqrt[4]{7}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{6}$
(7) $\sqrt[6]{5}, \sqrt[4]{3}$

8. (1) 3 (2) $\dfrac{3}{4}$ (3) -1 (4) $\dfrac{1}{2}$ (5) 5 (6) $\dfrac{3}{4}$
(7) $\sqrt{3}$ (8) 125

9. (1) $1-a$ (2) $\dfrac{2a}{b}$ (3) $\dfrac{a}{b}$ (4) $\dfrac{4a+2b}{b}$
(5) $\dfrac{2a}{1-a}$ (6) $\dfrac{6a}{1-a}$ (7) $\dfrac{b-1}{2}$ (8) $\dfrac{2-2a}{2a+b}$

10. (1) $\dfrac{1}{8}$ (2) 2 (3) $\log_2 10$ (4) $\dfrac{5}{4}$ (5) $2, \dfrac{1}{4}$ (6) 1

第 1 章

問 1.1 (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) 収束しない

問 1.2 (1) e^6 (2) $\dfrac{1}{e}$

問 2.1 省略. **問 2.2** 省略. **問 2.3** 収束する. **問 2.4** 収束する.

問 3.1 (1) 定義域 $(-\infty,\infty)$, 値域 $[0,\infty)$
(2) 定義域 $(0,\infty)$, 値域 $(-\infty,\infty)$
(3) 定義域 $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, 値域 $(0,\infty)$
(4) 定義域 $\{x : x\neq(2n+1)\pi/2,\ n$ は整数 $\}$, 値域 $(-\infty,\infty)$

問 **4.1** (1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{a}{b}$ (3) 1 (4) -1 (5) 8 (6) e^{km}
問 **4.2** 省略.
問 **5.1** 連続となる.
問 **5.2** 省略.
問 **5.3** 例えば, $y = \tan\pi\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.
問 **6.1** $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$.
問 **6.2** (1) 1 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 4.
問 **7.1** (1) $\dfrac{5}{6}\pi$ (2) $-\dfrac{\pi}{6}$
問 **7.2** $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$
問 **7.3** (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$
問 **7.4** 省略.

第 1 章 練習問題

1. (1) 0 (2) $\dfrac{-3}{2}$ (3) 0 (4) 0 (5) 0 (6) ∞ (7) $\dfrac{1}{2}$ (8) $\dfrac{1}{2}$
(9) 2 (10) 0 (11) 2 (12) e (13) 1 (14) 0 (15) 0

2. (1) 発散 (2) 収束 (3) 収束 (4) 発散 (5) 発散 (6) 収束
(7) 収束 (8) 収束 (9) 収束 (10) 発散 (11) 発散 (12) 収束

3. (1) 0 (2) 7 (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) e^2 (5) e^6 (6) e^2 (7) $\dfrac{1}{4}$
(8) 1 (9) $\dfrac{5}{3}$ (10) $\dfrac{1}{2}$ (11) 0 (12) 1 (13) 3 (14) -1
(15) $a > 1$ のとき 1, $a = 1$ のとき 0, $0 < a < 1$ のとき -1

4, 5, 6. 省略

7. (1) 1 (2) ∞ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{1}{e}$ (5) $\dfrac{1}{e}$ (6) 8

8. $y = 2 + 2x - 2\sqrt{2 + 2x}$.

9. (1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\dfrac{-\pi}{4}$ (3) $\dfrac{\pi}{6}$ (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (5) 1
(6) $\dfrac{1}{2}$ (7) $\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$ (8) $\dfrac{1}{3}$ (9) 0 (10) $\dfrac{3}{4}\pi$
(11) $\dfrac{\pi}{2}$ (12) $\dfrac{-56}{33}$ (13) $\dfrac{-\pi}{2}$ (14) $\dfrac{2}{3}\pi$ (15) $\dfrac{\pi}{3}$

10. 省略

第 2 章

問 **1.1** $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$

問 2.1　(1) $\dfrac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$　(2) $\dfrac{2x^3+7x^2+4x-3}{(x+2)^2}$　(3) $\dfrac{-4x^3+4}{(x^3+x+2)^2}$

問 2.2　(1) $16(x^2+1)^7x$　(2) $10x^9(x^2+1)^4(2x^2+1)+32x^7(x^8+1)^3$

問 2.3　省略.

問 2.4　(1) $-\sin x\cos(\cos x)$　(2) $2x\cos x^2$　(3) $\sin 2x$

問 3.1　$\left(\log x\cos x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

問 3.2　$-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき 1；$\dfrac{\pi}{2}+2n\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi$ のとき -1；$x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ では微分可能ではない．

問 3.3　省略.

問 4.1　(1) 3!　(2) 0　(3) 13!

問 5.1　省略.

問 6.1　(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{a}{b}$　(3) 2　(4) 2　(5) 1　(6) 1

問 7.1　(1) $x=0$ で極大値 $0, x=\dfrac{2}{3}$ で極小値 $-\dfrac{4}{27}$　(2) $x=1$ で極小値 $\dfrac{3}{2}$

(3) $x=e$ で極大値 $e^{\frac{1}{e}}$　(4) $x=\dfrac{1}{3}$ で極大値 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

問 7.2　(1) 変曲点は $(0,1)$　(2) 変曲点は $(0,0)$　(3) 変曲点は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},e^{\frac{-1}{2}}\right)$

(4) 変曲点なし

問 7.3　省略.

第 2 章 練習問題

1.

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$　(2) $\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$　(3) $2\sqrt{1-x^2}$

(4) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x^2+2x\sqrt{x}}}$　(5) e^{x+e^x}　(6) $\dfrac{x}{x^2+1}$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1+(\sin^{-1}x)^2)}$　(8) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$　(9) $\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

(10) $\dfrac{-2-x}{x^3\cos^2\frac{x+1}{x^2}}$　(11) $6x\sin^2x^2\cos x^2$　(12) $\dfrac{\cos(\log x)}{x\cos^2(\sin(\log x))}$

2.　(1) $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$　(2) $\dfrac{1}{\sin t}$　(3) $\dfrac{2t+\cos t}{3t^2}$　(4) $\dfrac{e^t}{2t-2}$　(5) $\dfrac{-1}{2\sin t}$　(6) $\dfrac{2\cos 2t}{e^t}$

3. (1) $(-1)^n e^{-x}$ (2) $\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(3) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ (4) $\dfrac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}$

(5) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ (6) $(x+n)^2 e^x$

(7) $\dfrac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$, $(n \geqq 2)$ (8) $x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+n\sin\left(x+\dfrac{n-1}{2}\pi\right)$

(9) $(\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$ (10) $\dfrac{(-1)^{n-4}6(n-4)!}{x^{n-3}}$, $(n \geqq 4)$

(11) $(-2)^{n-1}e^{-2x}(-2x+n)$ (12) $(-1)^n n!\left\{\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{x^{n+1}}\right\}$

4. (1) 省略. (2) n が奇数のとき，$f^{(n)}(0)=0$. n が偶数のとき，$n=2m$ とあらわすと，

$f^{(2m)}(0)=(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 3^2 1^2$

5. (1) $1+\dfrac{x^2}{2}$ (2) $81+108x+54x^2$ (3) $1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2$

(4) x (5) $1-2x+x^2$ (6) $1+(\log 2)x+\dfrac{(\log 2)^2}{2}x^2$

(7) $x+x^2$ (8) $\log 2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}x^2$ (9) $1+x-x^2$

(10) $e-\dfrac{e}{2}x^2$ (11) 0 (12) x

6. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 3)^n}{n!}x^n$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$ (8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ (9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}$ (11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$

7. (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) 0 (3) 1 (4) $\log a$ (5) $\dfrac{-3}{2}$

(6) $\dfrac{7}{24}$ (7) ∞ (8) $\dfrac{1}{6}$ (9) $\dfrac{(\log 2)^2}{2}$

8. (1) $x=\dfrac{4}{3}$ で極小値 $-\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

(2) $x=e$ のとき極小値 e

(3) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小値 $\dfrac{3}{5}$

(4) $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=2n\pi-\dfrac{\pi}{3}$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(5) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき極大値 $\dfrac{1}{2}$

(6) 極値なし

第3章

問 **1.1**　省略.　問 **1.2**　省略.

問 **2.1**　(1) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}$　(2) $\dfrac{3\cos 2x - \cos 6x}{12}$　(3) $\dfrac{x^2}{2} - 2\log(x^2+4)$

(4) $\log(1+e^x)$　(5) $-\log(2+\cos x)$

問 **2.2**　(1) $(x-1)e^x$　(2) $-x\cos x + \sin x$　(3) $x\tan^{-1}x - \dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$

(4) $x\log(x^2+1) - 2(x - \tan^{-1}x)$

問 **2.3**　(1) $(x^2-2x+2)e^x$　(2) $\dfrac{e^x(\cos x + \sin x)}{2}$

(3) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$

問 **2.4**　$-\dfrac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \dfrac{3}{8}x - \dfrac{3}{16}\sin 2x$

問 **2.5**　(1) $I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$　(2) $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$

(3) $I_n = \dfrac{a^x x^n}{\log a} - \dfrac{n}{\log a}I_{n-1}$

問 **3.1**　$\dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 8\log|x+1|$.

問 **3.2**　(1) $2x + 7\log|x-1|$　(2) $\dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{13}{4}x + \dfrac{59}{8}\log|2x+3|$

(3) $2x + 3\tan^{-1}x$　(4) $\dfrac{1}{2}x^2 - 4x + \dfrac{5}{2}\log(x^2+4x+13) + \dfrac{47}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{x+2}{3}\right)$.

問 **3.3**　(1) $\log|x-4| + \dfrac{1}{2}\log|2x+3|$　(2) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \tan^{-1}x$

(3) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(x-1)$.

問 **3.4**　(1) $\log\left|1 + \tan\dfrac{x}{2}\right|$　(2) $\dfrac{1}{4}\sin^4 x - \dfrac{1}{6}\sin^6 x$

(3) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}\right|$

問 **3.5**　(1) $x - 2\sqrt{x} + 2\log(\sqrt{x}+1)$　(2) $\dfrac{2}{1+x+\sqrt{x^2+1}} + \log|x + \sqrt{x^2+1}|$

(3) $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$　(4) $\dfrac{a^2x}{8}\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{1}{4}x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{a^4}{8}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$

第3章　練習問題

1. (1) $\dfrac{1}{40}(2x+1)^{10} - \dfrac{1}{36}(2x+1)^9$　(2) $-\dfrac{1}{3}\cos(3x+1)$　(3) $\dfrac{1}{3}(\log x)^3$

(4) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right|$　(5) $\dfrac{x^2}{2}\log x - \dfrac{1}{4}x^2$　(6) $\dfrac{1}{2}(1+x^2)\tan^{-1}x - \dfrac{1}{2}x$

(7) $\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|$

(8) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\log\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)\right\}$

(9) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$　(10) $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}x - \dfrac{1}{6}\tan^{-1}\dfrac{x}{2}$

(11) $\dfrac{1}{2}\log(x^2+x+4)+\dfrac{5}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)$ (12) $-\cos x+\tan^{-1}\cos x$

(13) $-\dfrac{1}{\sin x}-\sin x$ (14) $\dfrac{x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}}{2}$

(15) $(1+x)\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ (16) $\log\left|\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|$

(17) $\dfrac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}$ (18) $\dfrac{1}{2}\left\{(x-2)\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)\right\}$

2, 3. 省略.

第4章

問 **1.1** (1) $\dfrac{\pi}{6}$ (2) $\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

問 **1.2** (1) $2xf(x^2)-f(x)$ (2) $\displaystyle\int_0^{x+1} f(t)\,dt+xf(x+1)$

問 **1.3** (1) 1 (2) $\log\dfrac{5}{3}$ (3) $\dfrac{1}{2}\log 3-\dfrac{5\pi}{6\sqrt{3}}$ (4) $\dfrac{7}{24}$

(5) $\dfrac{1}{ab}\tan^{-1}\dfrac{a}{b}$

問 **1.4** (1) $2\log 2-1$ (2) $\dfrac{\pi+2\log 2-2}{12}$ (3) $\dfrac{16}{35}$ (4) $\dfrac{16}{15}$ (5) $\dfrac{9\pi}{8}$ (6) $\dfrac{8}{105}$

問 **1.5** 省略.

問 **1.6** (1) $\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とせよ. (2) $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ を使え.

問 **1.7** $\dfrac{\pi}{4}$

問 **1.8** (1) $m=n$ のとき π, $m\neq n$ のとき 0 (2) 0

問 **1.9** (1) $\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ (2) $\dfrac{n!m!(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$

問 **1.10** $0<x<1$ で $\dfrac{x^n}{2}<\dfrac{x^n}{x+1}<x^n$

問 **1.11** $\dfrac{\pi}{4}$

問 **2.1** (1) 1 (2) 存在しない (3) $\log 2$ (4) 1 (5) -1 (6) 2

(7) 6 (8) 存在しない (9) $\dfrac{\pi}{8}$ (ヒント $\dfrac{1}{x^4+4}=\dfrac{-1}{8}\dfrac{x-2}{x^2-2x+2}+\dfrac{1}{8}\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$)

問 **2.2** (1) 30 (2) $\dfrac{3}{4}$ (3) $\dfrac{16}{315}$ (4) $\dfrac{4}{3}$

問 **2.3** $\dfrac{1}{e}$

問 **2.4** (1) $\dfrac{1}{280}$ (2) $\dfrac{8}{315}$ (3) $\dfrac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

問 **3.1** (1) $\dfrac{1}{6}$　(2) $\dfrac{1}{6}$

問 **3.2** $\dfrac{16}{3}p^2$

問 **3.3** $\dfrac{8}{15}|\,a\,|^5$

問 **3.4** $\dfrac{64}{5}$

問 **3.5** πa^2

問 **3.6** $\dfrac{\pi a^2}{2}$

問 **3.7** $2a^2$

問 **3.8** (1) 1　(2) $\dfrac{\pi}{2}$

問 **3.9** (1) $\dfrac{52}{3}$　(2) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

問 **3.10** (1) $2\pi^2 a$　(2) $8a$

問 **3.11** $\dfrac{a}{2}\left\{\alpha\sqrt{\alpha^2+1}+\log(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})\right\}$

問 **3.12** $x=\tan\theta$ とおけ.

第４章　練習問題

1.　(1) $4-2\pi$　(2) $\dfrac{e-2}{3e}$　(3) $\dfrac{5\pi}{256}$　(4) $\dfrac{4}{3}$　(5) $\dfrac{1}{12}$　(6) $\dfrac{1+\log 2}{4}$

(7) $\dfrac{\pi}{9}$　(8) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{36}$　(9) $\dfrac{\pi^2}{4}$　(10) 0　(11) $\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(12) $\dfrac{\pi}{8}\log 2$　($x=\tan t$ とお

2.　(1) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$　(2) $a\pi$　(3) $\log(\sqrt{2}+1)$　(4) $\dfrac{a}{a^2+b^2}$　(5) $n!$　(6) $\log 2-1$

3.　(1) $\dfrac{x}{1+x^2}$　(2) $3e^{3x+1}$　(3) xe^x　(4) $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$

4.　$I_n=\pi$

5.　(1) 積分区間内で $1<\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin x}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ が成り立つことを利用する.

(2) 積分区間内で $\sqrt{1-x^2}<\sqrt{1-x^4}<1$ が成り立つことを利用する.

(3) 自然数 k に対して, $k<x<k+1$ の範囲で $\dfrac{1}{(k+1)^2}<\dfrac{1}{x^2}$ が成り立つことを利用する.

(4) 自然数 k に対して, $k<x<k+1$ の範囲で $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つことを利用する.

6. (1) 24 (2) 7.161 (3) $\dfrac{4}{15}$ (4) π (5) $\sqrt{\pi}$ (6) $\dfrac{8}{15}$ (7) $\dfrac{1}{2}$

7. $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$

8. $\dfrac{8}{3}p^2\left(1+\dfrac{1}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $x=p$

9. $S=\dfrac{3}{8}\pi a^2$, $L=6a$

10. $\dfrac{8}{15}$

11. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$

12. π

13. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$

14. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2})$

15. $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

16. $a\left|\log\dfrac{y_1}{y_2}\right|$

17. (1) 2 (2) 1 (3) $e-1$ (4) $\dfrac{1}{2}(\log 2)^2$ (5) $2(\sqrt{2}-1)$

第5章

問 2.1 (1) $y=e^t$, (2) $y=-2e^{3t}$
問 3.1 省略
問 3.2 $38k=\log 2$ より $k=0.018240\cdots$.
問 3.3 $2e^{2k}=3$ より $k=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$. よって $2e^{5\log\frac{3}{2}}=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=15.1875g$
問 3.4 (1) $y=100e^{-t}$, (2) $y=10e^{-2t}$
問 3.5 (a) 3,850 年前, (b) 10,510 年前, (c) 7,010 年前
問 4.1 省略
問 4.2 (1) $y=e^{3t}+1$, (2) $y=e^{-2t}-1$
問 4.3 $y(1)=10+100e^{-k}=60$ より $k=\log 2$. $y(t)=10+100e^{-t\log 2}=30$ より $t=\dfrac{\log 5}{\log 2}=2.32194\cdots$. よって, さらに約 1.322 時間かかる.
問 4.4 $k=\dfrac{\log 2}{10}$. 40 分後は $y(40)=17+80\dfrac{1}{2^4}=22$ 度.
問 4.5 省略

問 **4.6** $v = -\dfrac{mg}{k} + \left(v_0 + \dfrac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$ より $v = 0$ として $t = \dfrac{m}{k}\log\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right)$ だから次の計算をすればよい.

$$\int_0^{\frac{m}{k}\log\left(1+\frac{kv_0}{mg}\right)} \left\{-\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}\right\} dt.$$

問 **4.7** (1) 省略, (2) パラシュートが開いた高度は 20.83m, 偵察機の高度は 506.61m, (3) 運動量を計算すればよい.

問 **4.8** 省略

問 **5.1** $x^2 + y^2 = 1$

問 **5.2** (1) $y = \dfrac{2x^2}{3x^2 - 1}$, (2) $y = e^{-x^2+1}$, (3) $y = \dfrac{1}{\pi}\cos^{-1}\left(-\dfrac{\pi}{3}x^3 + \dfrac{\pi}{3} - 1\right)$, (4) $y = \sqrt{2 - x^2}$

問 **6.1** e^{60} 倍

問 **6.2** 現在を $t = 0$ とすると, $y(t) = \dfrac{100}{1 + 49\left(\frac{19}{49}\right)^{t+1}}$. 約 6.22 年かかる.

問 **6.3** (1) $y = \dfrac{Ce^t}{Ce^t + 1}$, (2) $y = C\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$

問 **7.1** 省略

問 **7.2** 省略

問 **7.3** (1) $y(t) = 5\sin\left(\sqrt{2}t + \dfrac{\pi}{2}\right)$, (2) $y(t) = \dfrac{\sqrt{205}}{2}\sin\left(2t + \sin^{-1}\dfrac{14}{\sqrt{205}}\right)$

第 5 章　練習問題

1. (1) $y^3 = \dfrac{x^3}{Cx^3 - 1}$　(2) $y = \log x(y+1) + C$　(3) $\sin y = Cxe^{\frac{1}{2}x^2}$　(4) $y = Ce^{x^3}$

(5)$y = C\cos x$　(6) $y = C\left|\dfrac{\sqrt{2}x + 1}{\sqrt{2}x - 1}\right|^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$　(7) $y = \dfrac{C - x}{1 + Cx}$　(8) $y = e^{Cx}$

2. (1) $y = \dfrac{1}{3}\log\left(\dfrac{3}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}\right)$　(2) $y = -\log\left(1 + x + \dfrac{1}{3}x^3\right)$

(3) $\cos 3y = \cos 2x$　(4) $\log|x(y-1)| = x - y - 1$

3. 3536 人

4. 2400 年後 $\cdots$ 35.35%, 8000 年後 $\cdots$ 3.125%

5. 133 日

6. 省略

7. 60°C

8. 9 時 22 分

9. 午前 6 時

10. 40 m

11. 30 m $\cdots\ \dfrac{1}{9}$, 60 m $\cdots\ \dfrac{1}{81}$, 50 m $\cdots\ \dfrac{1}{27}\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$

12. $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

13. たどりつけない

14. つける.

第6章

問 1.1 (1) $-\dfrac{6}{5}$ (2) 存在しない (3) 存在しない (4) 0

問 2.1 (1) $z_x = 6xy + 10xy^3$, $z_y = 3x^2 + 15x^2y^2$ (2) $z_x = ye^{xy}$, $z_y = xe^{xy}$

(3) $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (4) $z_x = \dfrac{|\,y\,|}{y\sqrt{y^2-x^2}}$, $z_y = -\dfrac{x}{|\,y\,|\sqrt{y^2-x^2}}$

(5) $z_x = \dfrac{1}{x\log y}$, $z_y = -\dfrac{\log x}{y(\log y)^2}$ (6) $z_x = yx^{y-1}$, $z_y = x^y\log x$

問 2.3 (1) $z_{xx} = -9\sin 3x\cos 4y$, $z_{xy} = z_{yx} = -12\cos 3x\sin 4y$, $z_{yy} = -16\sin 3x\cos 4y$

(2) $z_{xx} = \dfrac{2(y^4-x^2)}{(x^2+y^4)^2}$, $z_{xy} = z_{yx} = \dfrac{-8xy^3}{(x^2+y^4)^2}$, $z_{yy} = \dfrac{4y^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$

(3) $z_{xx} = 2(1+2x^2)e^{x^2+2y}$, $z_{xy} = z_{yx} = 4xe^{x^2+2y}$, $z_{yy} = 4e^{x^2+2y}$

(4) $z_{xx} = e^{-x}\sin y$, $z_{xy} = z_{yx} = -e^{-x}\cos y$, $z_{yy} = -e^{-x}\sin y$

(5) $z_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^4}\sin\dfrac{y}{x}$, $z_{xy} = z_{yx} = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^3}\sin\dfrac{y}{x}$, $z_{yy} = -\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{y}{x}$

(6) $z_{xx} = \pm\dfrac{y(2x^2-y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{3/2}}$, $z_{xy} = z_{yx} = -\dfrac{|\,x\,|}{(x^2-y^2)^{3/2}}$, $z_{yy} = \pm\dfrac{y}{(x^2-y^2)^{3/2}}$

問 3.1 (1) $x+y-z=1$ (2) $6x+8y-z=25$ (3) $\dfrac{2}{a}x+\dfrac{2}{b}y-z=2$ (4) $2x-2y+4z=\pi$

問 4.1 (1) $-4\sin t\cos t$ (2) $e^{x-y}(1+\dfrac{1}{t^2})$ (3) $\dfrac{-2t}{\sqrt{2t^2-t^4}}$

問 4.2 (1) $z_u = 9(2u-v)$, $z_v = -9u$ (2) $z_u = 4u(u^2+v^2)$, $z_v = 4v(u^2+v^2)$

(3) $z_u = e^{xy}\dfrac{uy-vx}{u^2+v^2}$, $z_v = e^{xy}\dfrac{ux+vy}{u^2+v^2}$

問 5.2
$$R_4 = \frac{e^{\theta y}}{4!(1+\theta x)^4}\ \Big(-6x^4+8x^3y(1+\theta x)-6x^2y^2(1+\theta x)^2 +4xy^3(1+\theta x)^3+y^4(1+\theta x)^4\log(1+\theta x)\Big)$$

問 5.3
$$\sqrt{2-x+y} = \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4}(x-y)-\frac{1}{32}(x-y)^2-\frac{\sqrt{2}(x-y)^3}{32(2-\theta(x-y))^{\frac{5}{2}}}\right)$$

問 6.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2x}{2y}$ $(y\neq 0)$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y}{3x^2+2x}$ $(x\neq 0, -\dfrac{2}{3})$, $(0,0)$ は特異点.

問 6.2 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+3y}{3x+2y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{10}{(3x+2y)^3}$

問 6.3 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{a(x-l)}{c(z-n)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{b(y-m)}{c(z-n)}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{a\{c(z-n)^2+a(x-l)^2\}}{c^2(z-n)^3}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{ab(x-l)(y-m)}{c^2(z-n)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{b\{c(z-n)^2+b(y-m)^2\}}{c^2(z-n)^3}$

問 6.4 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{nx-lz}{ny-mz}$, $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{ly-mx}{ny-mz}$

問 7.1 (1) $(x,y)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{4}{3}$

(2) $(x,y)=(-2,0)$ で極大値 $4e^{-2}$

(3) $(x,y)=(2,2)$ で極小値 -8

(4) $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$ で極小値 $-\dfrac{1}{8}$, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\mp\dfrac{1}{2}\right)$ で極大値 $\dfrac{1}{8}$

問 7.3 (1) $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極大値 $\sqrt{2}$, $(x,y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $-\sqrt{2}$

(2) $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$, $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$

問 7.4 $(x,y)=(\pm\sqrt{2},0)$ で極大値（最大値）2, $(x,y)=(0,0)$ で極小値（最小値）0

第6章 練習問題

1. (1) 0 (2) 0 (3) 1 (4) 極限なし (5) 極限なし (6) 0

2. (1) $z_{xx}=\dfrac{4y^2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $z_{xy}=\dfrac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $z_{yy}=\dfrac{4x^2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$

(2) $z_{xx}=\dfrac{-2x^2-2xy+y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $z_{xy}=\dfrac{-x^2-4xy-y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $z_{yy}=\dfrac{x^2-2xy-2y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$

(3)
$$z_{xx}=\frac{(e^x+e^y)\{y^2e^{xy}-(y+1)e^{xy+x}\}-2e^x(ye^{xy}-e^{xy+x})}{(e^x+e^y)^3},$$
$$z_{xy}=\frac{(e^x+e^y)\{e^{xy}+xye^{xy}-xe^{xy+x}\}-2e^y(ye^{xy}-e^{xy+x})}{(e^x+e^y)^3},$$
$$z_{yy}=\frac{(e^x+e^y)\{x^2e^{xy}-(x+1)e^{xy+y}\}-2e^y(xe^{xy}-e^{xy+y})}{(e^x+e^y)^3}$$

(4) $Z_{xx}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $Z_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Z_{yy}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

(5) $Z_{xx}=6x-2y$, $Z_{xy}=-2x$, $Z_{yy}=0$

3. $z_u=z(v\cos uv-\sin(u+v))$, $z_v=z(u\cos uv-\sin(u+v))$

4. 省略

5. (1) $y+xy+\dfrac{e^{\theta x}}{6}\{(x^3-3xy^2)\sin\theta y+(3x^2y-y^3)\cos\theta y\}$

(2) $1+(2x-3y)+(2x-3y)^2+\dfrac{1}{(1-2\theta x+3\theta y)^4}(2x-3y)^3$

(3)
$$1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}(x^2+4y^2)$$
$$+\frac{1}{16}\left\{x^3-6\theta x^2y^2+4xy^2(1+\theta x+2\theta^2y^2)-8(1+\theta x)\theta y^4\right\}(1+\theta x-\theta y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

6. 省略

7. $y' = -\dfrac{2x-y}{-x+2y}$

8. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a-x}{y}, \quad \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{a}{z}$

10. 省略

11. (1) $(x,y)=(2,0)$ で極小値 -4

(2) $(x,y)=\left(1,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ で極小値 $-2\left(1+\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\right)$

(3) $(x,y)=(0,0)$ で極大値 0, $(x,y)=(\pm3,\mp3)$ で極小値 -162

(4) $(x,y)=(-1,-1)$ で極小値 9

(5) $(x,y)=(0,0)$ で極大値 1

(6) 極値なし

(7) $(x,y)=\left(\dfrac{-1}{3},1\right)$ で極大値 $\dfrac{32}{9}$, $(x,y)=\left(\dfrac{1}{3},-1\right)$ で極小値 $\dfrac{-32}{9}$

(8) $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ で極小値 $\dfrac{5}{16}$

(9) $(x,y)=(0,0)$ で極大値 1, $(\cos\theta,\sin\theta)$, $0\leqq\theta<2\pi$ では極値をとるか分からない.

(10) $(x,y)=(0,0)$, $(2,4)$ で極小値はそれぞれ 0, 0

12. $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$, $(x,y)=(1,0),(0,1)$ で極大値 1

第7章

問 1.1 (1) e^2-2e+1 (2) $\dfrac{1}{10}$ (3) $\dfrac{1}{3}$ (4) $\dfrac{1}{8}$ (5) $\dfrac{1}{6}$ (6) $\dfrac{1}{6}$

問 1.2 (1) $\dfrac{11}{84}$ (2) $\dfrac{2}{7}$ (3) $\dfrac{3}{2}-\log 2$ (4) $\dfrac{2}{3}$ (5) $\dfrac{1}{8}$ (6) $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{18}$

問 1.4 (1) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^a dy\int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y}{2}}^a f(x,y)dy$ (4) $\displaystyle\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dy$

問 1.5 $\left(\dfrac{4}{3\pi},\dfrac{4}{3\pi}\right)$

問 2.1 (1) $4(2-\sqrt{2})$ (2) $\dfrac{1}{4}$ (3) $\dfrac{\pi}{4}$ (4) $\dfrac{2}{\pi}$ (5) πa

問 3.1 (1) $\dfrac{\pi^2}{2}$ (2) $\dfrac{2}{3}\pi a^3$ (3) $\dfrac{\pi}{8}$ (4) $\dfrac{a^3}{12}$ (5) $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)a^3$

問 4.1 (1) $\dfrac{\pi}{2}-1$ (2) $\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{5}{16}$ (3) $(e^a-1)(e^b-1)(e^c-1)$

(4) $\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\pi}{12}\right)$ (5) $\dfrac{1}{120}$ (6) $\dfrac{\pi}{12}$

問 5.1 $16a^2$

問 5.2 $\dfrac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1)$

問 5.3 $2(\pi-2)a^2$

問 5.4 $3a^2\pi$

第７章　練習問題

1. (1) $(2a^2-3)\sin a+4a\cos a-a$ (2) $\dfrac{e-1}{2}$ (3) $\dfrac{e^2}{2}-e$

(4) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (5) 1 (6) $\dfrac{3}{35}$

(7) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ (8) $\dfrac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ (9) 1

(10) $\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{\pi^2}{4}\right)$

2, 3, 4, 5. 省略

6. (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{1}{16}\pi^2a^2$ (5) $\dfrac{\pi}{8}$ (6) $\dfrac{\pi}{16}a^4$

7. (1) $\dfrac{1}{2}(e^4-3e^2+2e)$ $\left(u=x+y, v=\dfrac{x}{y}\text{ とおく}\right)$

(2) $\dfrac{\pi^3}{12}$ $(u=x-y, v=x+y$ とおく$)$

(3) $\dfrac{\pi}{4}\log 2$ $(x=u, y=uv$ とおく$)$

(4) $\dfrac{5}{3}$ $(x=u(1-v), y=uv$ とおく$)$

(5) $\dfrac{p+q}{4}\pi$ $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおく$)$

(6) $\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\pi$ $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおく$)$

(7) $\dfrac{8}{15}$ $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおく$)$

8. (1) $\dfrac{2}{3}a^3$ (2) $\dfrac{4}{3}\pi abc$ (3) $\dfrac{32}{3}$ (4) $\dfrac{2}{3}$ (5) $\dfrac{2}{7}$ (6) $\dfrac{7\pi}{48}$

(7) 6π (8) $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)$ (9) $\dfrac{3}{2}\pi$ (10) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{8}$ (11) $\dfrac{\pi^2}{16}$

9. (1) $\left(0,\dfrac{5}{6},0\right)$ (2) $\left(0,0,\dfrac{3}{8}c\right)$ (3) $\left(\dfrac{7}{16},\dfrac{22}{45},0\right)$

10. $\dfrac{2}{3}\pi\left\{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$

11. $2a^2(\pi+4-4\sqrt{2})$

12. $2\pi a(c-b)$

13. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$

付録　公式集

三角関数の公式

(1) 基本公式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta},\quad 1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

(2) 加法定理

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\
\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

(以上, 複号同順)

(3) 2倍角の公式

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\\
\tan 2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

(4) 3倍角の公式

$$\begin{aligned}
&\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\\
&\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

(5) 積を和, 差になおす公式

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta&=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}\\
\cos\alpha\sin\beta&=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}\\
\cos\alpha\cos\beta&=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}\\
\sin\alpha\sin\beta&=-\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}
\end{aligned}$$

(6)　和, 差を積になおす公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

微分法の公式

関数	導関数	関数	導関数
$af(x)+bg(x)$　$(a, b$ は定数$)$	$af'(x)+bg'(x)$	$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

基本的な関数の導関数

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x
a^x	$a^x\log a$	$\log\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\log a}$	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin^{-1}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1}x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$		

積分法の公式

(1) 置換積分 $x=g(t)$ のとき

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

(2) 部分積分

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

(3) その他

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$$

基本的な関数の不定積分 (積分定数は省略)

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\sin^{-1} x$	$x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\|x\|$	$\cos^{-1} x$	$x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$
e^x	e^x	$\tan^{-1} x$	$x\tan^{-1} x - \dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\dfrac{1}{x^2+a^2} \ (a>0)$	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$
$\cos x$	$\sin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}} \ (a \neq 0)$	$\log\|x+\sqrt{x^2+a}\|$
$\tan x$	$-\log\|\cos x\|$	$\sqrt{x^2+a}$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\log\left\|x+\sqrt{x^2+a}\right\|\right)$
$\log\|x\|$	$x(\log\|x\|-1)$	$\dfrac{1}{x^2-a^2} \ (a>0)$	$\dfrac{1}{2a}\log\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\|$
$a^x \ (a>0, a\neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\log a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \ (a>0)$	$\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$
		$\sqrt{a^2-x^2} \ (a>0)$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$

いくつかの無理数の近似値

(1) $\pi = 3.14159\cdots$ (2) $e = 2.71828\cdots$ (3) $\sqrt{2} = 1.41421\cdots$ (4) $\sqrt{3} = 1.73205\cdots$

(5) $\sqrt{5} = 2.23607\cdots$ (6) $\log 2 = 0.69314\cdots$ (7) $\log 3 = 1.09861\cdots$ (8) $e^{-1} = 0.36787\cdots$

索　引

著者紹介

阿部吉弘(あべ　よしひろ)
神奈川大学工学部教授

酒井政美(さかい　まさみ)
神奈川大学工学部教授

永野與彦(ながの　よしひこ)
神奈川大学工学部准教授

矢島幸信(やじま　ゆきのぶ)
神奈川大学工学部教授

伊藤　博(いとう　ひろし)
神奈川大学工学部教授

長　宗雄(ちょう　むねお)
神奈川大学工学部教授

堀口正之(ほりぐち　まさゆき)
神奈川大学工学部准教授

山崎丈明(やまざき　たけあき)
神奈川大学工学部准教授

工学を志す人の　**微分積分**

2000 年 10 月 30 日　初版発行	著者代表 © 長　宗　雄
2008 年 4 月 20 日　9 刷発行	発 行 者　鳥 飼 好 男
	印　刷　科学図書印刷
	製　本　加瀬製本所(有)

発行所　株式会社　東京教学社

東京都千代田区三崎町 2-10-5
郵便番号　101-0061
電　話　03(3263)0671(代表)
ファックス　03(3263)0673
振替口座　00150-2-66168