# 第1章

# 関数の極限

第1章では必ずしも厳密な定義を出発点としてはいないので, ここで扱う大部分の定理に証明は与えられていない. しかし, 本書を理解するためには, それらの証明を理解することが不可欠というわけではない. 本章も微積分学にいたるための準備と考えてもらえばよい.

## 1　数列と極限

実数を順に並べた列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を**数列**といい, $\{a_n\}$ で表す. 本書では, 数列といえば通常, 無限数列を意味する. 序章で述べたように, 無理数 $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ に対して, $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1.41$, $a_3 = 1.414, \cdots$ とおくと, この数列 $\{a_n\}$ は $n$ を大きくすると $\sqrt{2}$ に限りなく近づいていく. これを一般的に述べると, 次の数列の収束という概念に至る. 数列 $\{a_n\}$ において, $n$ が限りなく大きくなるとき $a_n$ がある1つの値 $a$ に限りなく近づくとする. このとき数列 $\{a_n\}$ は $a$ に**収束する**といい, $a$ を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という. これを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{または} \quad a_n \to a \ (n \to \infty)$$

で表す. 上のことは, 「すべての無理数は, ある有理数の数列の極限値として表される」ことを述べている.

**注 1.1.**　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を厳密に定義すると, 次のようになる:
「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある (十分大きい) 自然数 $n_0$ をとると,

$$n \geqq n_0 \quad \text{ならば} \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ. 」
数列の収束に関する種々の定理は, この定義に基づいて証明される.

数列がある値に収束するとき, その数列は**収束する**という. また, 収束しない数列を**発散する**という. 特に, $n$ が限りなく大きくなるに従って $a_n$ が限りなく大きく (小さく) なるとき, 数列 $\{a_n\}$ は**正の (負の) 無限大に発散する**といい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad a_n \to \infty\ (n \to \infty)$$
$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad a_n \to -\infty\ (n \to \infty)\right)$$

で表す．ここで, $\infty$ や $-\infty$ は数値ではなく, 数の変化の状態を表す記号である．

**定理 1.1 (収束数列の基本的性質)．** 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束しているとき, 次が成り立つ．

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n)$,　特に, $\lim_{n\to\infty}(c\, b_n) = c \lim_{n\to\infty} b_n$　($c$ は定数)．

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$　($\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ とする)．

(4) $a_n \leqq b_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ ならば, $\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$.

**注 1.2.** 定理 1.1 は (3) を除いて, $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ (複号同順) の場合についても成り立つ．

**問 1.1.** 次の数列の極限値を求めよ．

(1) $\left\{\dfrac{n+1}{n^3-1}\right\}$　　(2) $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\}$　　(3) $\left\{\dfrac{\sin n\theta}{n}\right\}$　　(4) $\{1+(-1)^n\}$

数列 $\{a_n\}$ において,

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots$$

が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ は**単調増加**であるといい, 特に

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

のとき, **狭義の単調増加**という．

同様に,

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots$$

が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ は**単調減少**であるといい, 特に

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$$

のとき, **狭義の単調減少**という．これらを総称して, **単調数列**という．

次に, 数列 $\{a_n\}$ において,

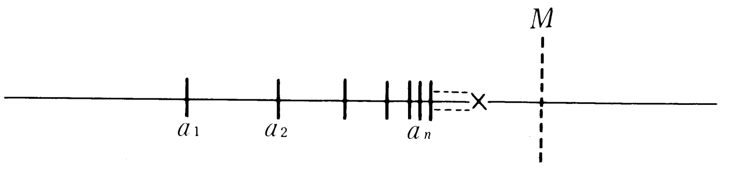
$$a_n \leqq M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる定数 $M$ が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるという. 同様に,

$$a_n \geqq L \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる定数 $L$ が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ は下に有界であるという. 上にも下にも有界な数列 $\{a_n\}$ (つまり, $|a_n| \leqq K$ となる定数 $K$ が存在するとき) を単に有界という.

**定理 1.2 (単調数列の収束)** . 上に有界な単調増加数列は収束する. また, 下に有界な単調減少数列も収束する.




**有界な単調増加数列**

**例 1.1.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示せ.

**証明**　$h_n = \sqrt[n]{n} - 1$ とおく. $\sqrt[n]{n} \geqq \sqrt[n]{1} = 1$ より $h_n \geqq 0$ である. 2項定理[1] より

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2.$$

そこで, $n \geqq 2$ のとき $0 \leqq h_n \leqq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$ となる. ここで, $n \to \infty$ とすれば $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \to 0$. したがって, 間にはさまった $h_n$ も仕方なく 0 に近づく. ゆえに, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1 + h_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} h_n = 1$. □

上の例 1.1 の証明の最後で用いた論法ははさみうちの原理とよばれ, いろいろな数列の極限値を求める際に多用される. すなわち,

**定理 1.3 (はさみうちの原理)** . 3つの数列 $\{a_n\}\{b_n\}\{h_n\}$ について, 十分大きな $n$ に対しては, つねに $a_n \leqq h_n \leqq b_n$ が成り立ち $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であれば, $\lim_{n\to\infty} h_n = \alpha$ となる.

[1] 第 2 章 4 節参照

**例 1.2.** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$ を示せ.

**証明**　$a=1$ のとき: $\sqrt[n]{a}=1$ だから明らか.

$a>1$ のとき: $n>a$ となるように $n$ を十分大きくとれば, $1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$ となる. 例 1.1 より, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ となり, はさみうちの原理より, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ を得る.

$a<1$ のとき: $a=\dfrac{1}{b}$ とおくと, $b>1$ であるから, 定理 1.1 (3) と上の場合より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=1. \quad \square$$

**例 1.3.** 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は収束する ( この極限値を**自然対数の底**といい, $e$ で表す ).

**証明**　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=a_n$ とおく. 定理 1.2 により, 数列 $\{a_n\}$ が (狭義の) 単調増加かつ上に有界であることを示せばよい.

単調性: 2 項定理により,

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

$a_n$ と $a_{n+1}$ の各項を比べると第 3 項以降は $a_{n+1}$ の方が大きく, また $a_{n+1}$ は正の項を最後に余分にもつので, $a_n<a_{n+1}$ となる.

有界性: $n>2$ のとき $n!>2^{n-1}$ であるから, 上の $a_n$ の等式より

$$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

よって, $\{a_n\}$ は有界である. $\square$

**注 1.3.** $e$ は無理数で, $e=2.7182818\cdots$ であることが知られている.

**問 1.2.** 次の数列の極限値を求めよ.

(1) $\left\{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}\right\}$　　　(2) $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

## 2 数列の級数

数列 $\{a_n\}$ に対して, その無限和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を数列 $\{a_n\}$ の**級数**といい, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ または単に $\sum a_n$ で表す.

数列 $\{a_n\}$ の有限和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を $\sum_{k=1}^{n} a_k$ で表す. この有限和による数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$ がひとつの値 $s$ に収束するとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ と表す. 数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$ が発散するとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**発散する**という. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ として, 数列 $\{s_n\}$ が収束しなければならないので, 次の定理が成り立つことがわかる.

**定理 2.1.** 級数 $\sum a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

従って $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ である級数 $\sum a_n$ は収束しない.
高等学校で習った簡単な例を思い出すと,

**例 2.1.** 等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散する} & (|r| \geqq 1) \end{cases}.$$

**証明** 等比数列の有限和は, $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ である. そこで, $|r| < 1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$ となる. また, $|r| \geqq 1$ のときは, $\lim_{n\to\infty} r^n \neq 0$ であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は発散する. □

**問 2.1.** すべての循環小数が, なぜ分数で表されるかを考えよ.

定理 1.1 から次のことがすぐわかる.

**定理 2.2 (収束する級数の基本的性質)** . 2つの級数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ が収束しているとき, 次が成り立つ.

(1) $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

(2) $\sum ca_n = c\sum a_n$. ($c$ は定数).

以下, 級数の値そのものを求めるより, 級数が収束するか発散するかを議論する．

数列 $\{a_n\}$ の各項が正, すなわち $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ のとき, $\sum a_n$ を**正項級数**という．一般に, 級数 $\sum a_n$ が収束するかどうかの判定は容易ではない．しかし, 正項級数に関する限りいくつかの有効な判定法がある．それらのいくつかを証明せずに述べておこう．

**定理 2.3 (比較判定法)**．2 つの正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ において,

$$a_n \leqq b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

であるとき, 次が成り立つ．

(1) $\sum b_n$ が収束すれば, $\sum a_n$ も収束する．

(2) $\sum a_n$ が発散すれば, $\sum b_n$ も発散する．

**問 2.2.** 比較判定法により $\sum \dfrac{1}{2^n + n}$ は, 収束することを示せ．

**定理 2.4 (ダランベールの判定法)**．正項級数 $\sum a_n$ において, $r = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ であるとき, 次が成り立つ．

(1) $0 \leqq r < 1$ ならば, $\sum a_n$ は収束する．

(2) $1 < r \leqq \infty$ ならば, $\sum a_n$ は発散する．

**問 2.3.** ダランベールの判定法を用いて, $\sum \dfrac{2^n}{n!}$ は, 収束するか発散するかを判定せよ．

**定理 2.5 (コーシーの判定法)**．正項級数 $\sum a_n$ において, $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ であるとき, 次が成り立つ．

(1) $0 \leqq r < 1$ ならば, $\sum a_n$ は収束する．

(2) $1 < r \leqq \infty$ ならば, $\sum a_n$ は発散する．

**問 2.4.** コーシーの判定法を用いて, $\sum \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ は, 収束するか発散するかを判定せよ．

# 3　写像と関数

以下, 本書を通して, $\mathbf{R}$ は実数全体の集合を表す. まず, 一般的な議論から始めよう.

2つの空でない集合 $A, B$ があって, $A$ の各元 $x$ に対して, $B$ の1つの元 $y$ が対応しているとき, その対応の規則を $A$ から $B$ への**写像**という. $A$ から $B$ への写像を,

$$f : A \to B \qquad \text{または} \qquad y = f(x),\ x \in A$$

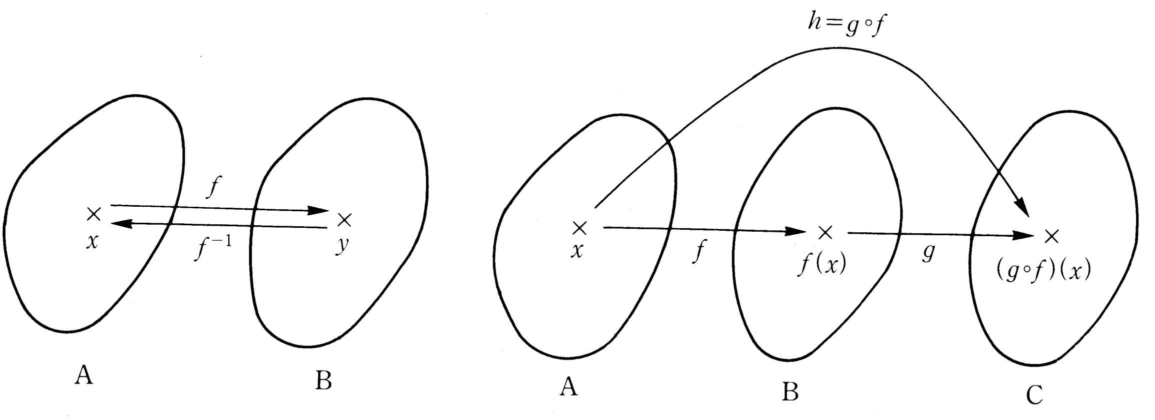
で表す.

写像 $f : A \to B$ に対して, $A$ を $f$ の**定義域**といい, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ を $f$ の**値域**という.

写像 $f : A \to B$ に対して, $f(A) = B$ であるとき, $f$ は $A$ から $B$ の**上への写像**または**全射**という. $x, x' \in A$ で $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ となるとき, $f$ は**1対1の写像**または**単射**という.

写像 $f : A \to B$ が1対1上への写像 (全単射) であるとき, $B$ の任意の元 $y$ に対して, $f(x) = y$ となる $A$ の元 $x$ がただ1つ定まる. そこで, この対応により $B$ から $A$ への写像が得られる. これを $f$ の**逆写像**といい, $f^{-1}$ で表す.

3つの空でない集合 $A, B, C$ と写像 $f : A \to B$, $g : B \to C$ が与えられたとき, 写像 $h : A \to C$ を $h(x) = g(f(x))$ によって定義できる. これを $f$ と $g$ の**合成写像**といい, $h = g \circ f$ で表す.




逆写像と合成写像

$D$ が実数の部分集合 ($\mathbf{R}$ の部分集合) であるとき, 写像 $f : D \to \mathbf{R}$ を (**1変数**) **関数**という. $f$ の定義域 $D$ に属する $x$ を (**独立**) **変数**, $y$ を**従属変数**という. 関数に対する逆写像や合成写像は, それぞれ**逆関数**, **合成関数**といわれる.

$D$ を平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ の部分集合とするとき, $D$ から $\mathbf{R}$ への写像を**2変数関数**という. 一般に, $D$ を $n$ 次元空間 $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$ の部分集合とするとき, $D$ から $\mathbf{R}$ への写像を **n 変数関数**という.

**例 3.1.**　2 つの関数 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+3$ に対して, その合成関数 $(g\circ f)(x)$ および $(f\circ g)(x)$ はそれぞれ

$$(g\circ f)(x)=2x^2+3, \qquad (f\circ g)(x)=(2x+3)^2$$

となる．

具体的な表示が与えられている関数 $y=f(x)$ に対して, 通常その定義域として $f(x)$ が意味を持つすべての点を考えるので, いちいちそれを明示しない．例えば, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ なる関数の自然に考えうる定義域は 0 を除く全実数である．

関数の定義域として, 次の $\mathbf{R}$ の部分集合がよく用いられる: $a<b$ に対して,

(1)　$(a,b)=\{x : a<x<b\}$,
(2)　$[a,b]=\{x : a\leqq x\leqq b\}$,
(3)　$[a,b)=\{x : a\leqq x<b\}$,　$(a,b]=\{x : a<x\leqq b\}$,
(4)　$(a,\infty)=\{x : a<x\}$,　$[a,\infty)=\{x : a\leqq x\}$,
(5)　$(-\infty,b)=\{x : x<b\}$,　$(-\infty,b]=\{x : x\leqq b\}$,
(6)　$(-\infty,\infty)=\mathbf{R}$.

これらを総称して**区間**という．特に, (1) を**開区間**, (2) を**閉区間**, (3) を**半開区間**という．(1), (2), (3) を**有限区間**, (4), (5), (6) を**無限区間**という．

**例 3.2.**　(1) $y=\dfrac{1}{x}$ の定義域と値域は, $\{x\in\mathbf{R} : x\neq 0\}$ である．

(2) $y=\sqrt{1-x^2}$ の定義域は $[-1,1]$ であり, 値域は $[0,1]$ である．

**問 3.1.** 次の関数の定義域と値域を求めよ．

(1) $y=x^2$　　(2) $y=\log x$　　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　　(4) $y=\tan x$

# 4　関数の極限

関数 $f(x)$ の定義域を $D$ とする．変数 $x\in D$ が $a$ と異なる値をとりながら限りなく $a$ に近づくとき, $f(x)$ の値がある 1 つの値 $\alpha$ に限りなく近づくとする．このとき, $\alpha$ を $f(x)$ の $a$ における**極限値**といい,

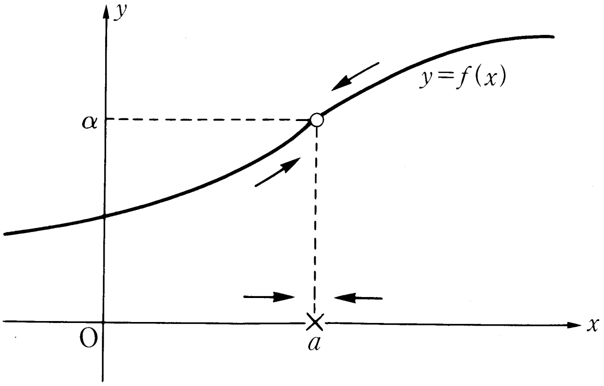
$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad f(x)\to\alpha\ (x\to a)$$

で表す．ここで, $a=\infty$ $(-\infty)$ のときは, $x$ が限りなく大きく (小さく) なることを意味する．また, $f(x)$ は $x=a$ において定義されていなくともよい．

**注 4.1.** $D$ を定義域とする関数 $f(x)$ に対して, $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ を厳密に定義すると：
「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある (適当な) $\delta > 0$ をとると,

$$0 < |x - a| < \delta,\ x \in D \quad \text{ならば} \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ.」
このような定義をいわゆる $\varepsilon - \delta$ **法**という.




**関数の極限**

同様に, $x \to a$ のとき, $f(x)$ の値が限りなく大きく (小さく) なることを

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{または} \quad f(x) \to \infty \ (x \to a)$$
$$\left( \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{または} \quad f(x) \to -\infty \ (x \to a) \right)$$

で表す.

**例 4.1.** $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ を求めよ.

**解** $x \to 1$ のとき, $x \neq 1$ だから, 分子と分母を $x - 1$ で割って,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2. \quad \square$$

$x$ を $x > a$ に制限して限りなく $a$ に近づけたとき (これを $x \to a + 0$ で表す), $f(x)$ の値がある1つの値 $\alpha$ に限りなく近づくならば $\alpha$ を $f(x)$ の**右極限**といい,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha \ (x \to a + 0)$$

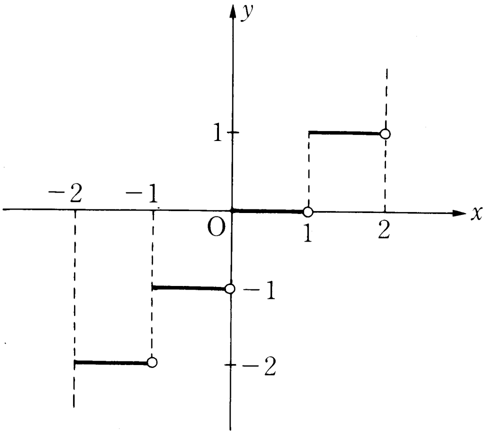
で表す. また, $x$ を $x < a$ に制限して限りなく $a$ に近づけたとき (これを $x \to a - 0$ で表す), $f(x)$ の**左極限**

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \beta \quad \text{または} \quad f(x) \to \beta \ (x \to a - 0)$$

が同様に定義される. 特に $x \to 0 + 0$ は $x \to +0$, $x \to 0 - 0$ は $x \to -0$ で表す.

**注 4.2.** $x \to a-0$ のとき, $b<a$ ならば $b<x<a$ とみなせる. $x \to a+0$ のとき, $a<c$ ならば $a<x<c$ とみなせる. そこで, $x \to a$ のとき, $b<a<c$ ならば $b<x<c$ とみなすことができる.

**例 4.2.** 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, $x$ を越えない最大の整数を $[x]$ で表す ( これを**ガウス記号**という ). すなわち, $n \leqq x < n+1$ ( $n$ は整数 ) のとき, $[x]=n$ となる. このとき, $\displaystyle\lim_{x \to 1-0}[x]$ および $\displaystyle\lim_{x \to 1+0}[x]$ を求めよ.



$y=[x]$ のグラフ

**解** (1): $0 \leqq x < 1$ のとき, $[x]=0$ となるから, $\displaystyle\lim_{x \to 1-0}[x]=0$.
(2): $1 \leqq x < 2$ のとき, $[x]=1$ より, $\displaystyle\lim_{x \to 1+0}[x]=1$. □

数列の場合の定理 1.1 と同様に, 次を得る.

**定理 4.1 (関数の極限の基本的性質)** . $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$,　特に, $\displaystyle\lim_{x \to a}(cf(x)) = c\lim_{x \to a} f(x)$　( $c$ は定数 ).

(3) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x \to a} g(x)}$　( $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ とする ).

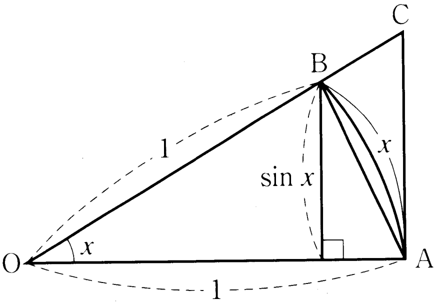
(4) $f(x) \leqq g(x)$ ならば, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) \leqq \lim_{x \to a} g(x)$.

(5) ( はさみうちの原理 ) $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ ならば, $\displaystyle\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$.

**注 4.3.** $a = \pm\infty$ のときも, 定理 4.1 は成り立つ.

**補題 4.2.** $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ならば, $\sin x < x < \tan x$.

**証明** 右の図の $\triangle$OAB の面積, 扇形 OAB の面積, $\triangle$OAC の面積は, それぞれ $\dfrac{1}{2}\sin x$, $\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{1}{2}\tan x$ である. それらの大小を 比較すると, 求める不等式が得られる. □



**定理 4.3.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

**証明** $x\to +0$ のとき：注 4.2 より, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい. $\sin x>0$ だから, 補題 4.2 の式を $\sin x$ で割って逆数をとると, $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$ を得る. そこで, 定理 4.1 (5) より, $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$ となる.

$x\to -0$ のとき：$y=-x$ とおく. このとき, $y\to +0$ かつ $\sin x=\sin(-y)=-\sin y$ だから, 上の場合より

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to +0}\frac{-\sin y}{-y}=\lim_{y\to +0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

いずれにしても, 求める式を得る. □

**例 4.3.** (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

**証明** (1): $[x]=n$ とする. $n\leqq x<n+1$ より, $1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{x}\leqq 1+\dfrac{1}{n}$ となるから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

定理 1.1 (2),(3) および例 1.3 より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e,\\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=e.\end{aligned}$$

ゆえに, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

次に, $x=-y$ とおくと, $x\to-\infty$ のとき $y\to\infty$ となるから, 定理 4.1 (2) より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y\\ &=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.\end{aligned}$$

(2): $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと, $x\to\pm\infty$ のとき $t\to 0$ となるから,

$$e=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.\quad\square$$

**問 4.1.** 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}\quad(a,b>0)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to3-0}[x^2]$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$

**問 4.2.** $\displaystyle\lim_{x\to a}|f(x)|=0$ ならば, $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$ となることを示せ.

# 5 連続関数

関数 $f(x)$ に対して,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\quad(\text{または}, \lim_{h\to0}f(a+h)=f(a))$$

が満たされるとき, $f(x)$ は $x=a$ で**連続**であるという. すなわち, $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは, 次の 3 つの条件：

(i) $a$ が $f(x)$ の定義域にある,

(ii) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ が存在する,

(iii) $f(a)=\alpha$ である,

が成り立つことと同等である. 関数 $f(x)$ がその定義域のすべての点で連続のとき, $f(x)$ は**連続**であるまたは**連続関数**であるという. また, $f(x)$ が区間 $I$ の上で定義されており, $I$ の各点で連続のとき, $f(x)$ は $I$ **で連続**であるという. 特に, $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとは, $f(x)$ が開区間 $(a,b)$ で連続であり,

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)\quad(\text{これを } f(x) \text{ は } x=a \text{ で}\textbf{右連続}\text{という}),$$
$$\lim_{x\to b-0}f(x)=f(b)\quad(\text{これを } f(x) \text{ は } x=b \text{ で}\textbf{左連続}\text{という})$$

であるとき.

**定理 5.1 (連続関数の基本的性質)．** 関数 $f(x)$, $g(x)$ が ($x=a$ で) 連続ならば, 次の関数

(1) $f(x)+g(x)$,

(2) $f(x)g(x)$,　特に, $cf(x)$　($c$ は定数),

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　($g(a)\neq0$ とする)

は ($x=a$ で) 連続となる.

**証明** (1): 定理 4.1 (1) より,

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a).$$

以下同様に, (2) と (3) はそれぞれ定理 4.1 の (2) と (3) より従う. □

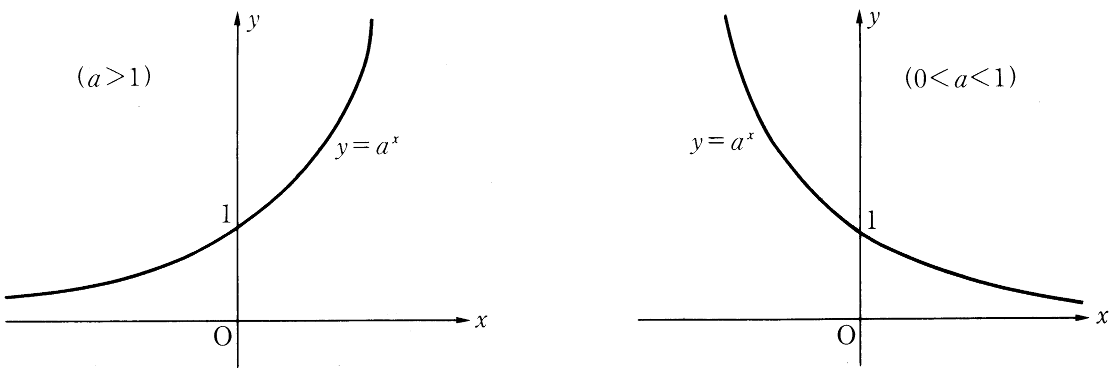
われわれは高等学校で学んだような, なじみ深い関数の連続性については, 暗黙の内に仮定して議論を進めている. (例えば, 定理 4.3 の証明の中では厳密にいえば $\cos x$ が $x=0$ で連続であることを用いている[2] .) ここで, それらがどのように示されるのかをいくつか例示しよう.

**例 5.1.** $n$ 次多項式関数 $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ は連続である.

**証明** 定数関数 $y=c$ および 1 次関数 $y=x$ は連続である. よって, 定理 5.1 (1), (2) を用いて, 上の $n$ 次多項式関数は連続となる. □

**問 5.1.** 有理関数 $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ は, 分母が 0 と異なるすべての点で連続となるか.

**例 5.2.** 指数関数 $y = a^x$ $(a>0)$ は連続である.




**$y=a^x$ のグラフ**

**証明** まず, $\lim_{h\to 0} a^h = 1$ を示すために 3 つの場合分けをする.

(i) $a=1$ のとき : 明らか.

(ii) $a>1$ のとき : 十分に 0 に近い $h$ に対して, $-\dfrac{1}{n} < h < \dfrac{1}{n}$ となる最大の自然数 $n$ をとると, 上の図から $a^{-\frac{1}{n}} < a^h < a^{\frac{1}{n}}$ となる. 例 1.2 より, $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ だから, $h \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ に注意すれば, 定理 1.1 (3), (4) より

$$1 = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} \leqq \lim_{h\to 0} a^h \leqq \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

[2]もっとも, この証明の方法自体厳密にいえば, 円の面積とは何物であるかという反省なしには受け入れ難いものである. もう少し論理的整合性を重視して証明しようとすれば, 定理 4.3 の図で $\sin x$, 弧 $AB$ および線分 $AC$ の長さを比較するほうがよい. しかし本書では論理的整合性よりも直感的な理解を重視した.

(iii) $0 < a < 1$ のとき： $b = \dfrac{1}{a}$ とおくと, $b > 1$ となる．そこで, (ii) の場合と定理 4.1 (3) より,

$$\lim_{h\to 0} a^h = \lim_{h\to 0} \frac{1}{b^h} = \frac{1}{\lim_{h\to 0} b^h} = 1$$

以上から $\lim_{h\to 0} a^h = 1$ が示された．ここで, 任意の点 $x$ に対して, 定理 4.1 (2) より,

$$\lim_{h\to 0} a^{x+h} = \lim_{h\to 0} a^x a^h = a^x \lim_{h\to 0} a^h = a^x. \quad \square$$

**例 5.3.**　三角関数 $y = \sin x$ は連続である．

**証明**　補題 4.2 より, $|h| < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $|\sin h| = \sin|h| < |h|$．そこで定理 4.1 (5) より, $\lim_{h\to 0} |\sin h| = 0$ となる．さらに問 4.2 より, $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$ を得る．また, $h \to 0$ のとき $\dfrac{h}{2} \to 0$ だから, 定理 4.1 (1), (2) より

$$\lim_{h\to 0} \cos h = \lim_{h\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}\right) = 1 - 2\left(\lim_{\frac{h}{2}\to 0} \sin \frac{h}{2}\right)^2 = 1.$$

ここで, 任意の $x$ に対して, $\sin x$ の加法定理, 定理 4.1 (1), (2) および上のことから,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \sin(x+h) &= \lim_{h\to 0}(\sin x \cos h + \cos x \sin h) \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \cos h + \cos x \lim_{h\to 0} \sin h \\ &= \sin x. \quad \square\end{aligned}$$

以下, 連続関数に関する他の基本的な定理をいくつか述べる．

**定理 5.2.** 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続, 関数 $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続ならば, 合成関数 $z = (g \circ f)(x)$ は $x = a$ で連続となる．それゆえ, 連続関数の合成関数は連続となる．

**証明**　$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ かつ $\lim_{y\to f(a)} g(y) = g(f(a))$ だから,

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to f(a)} g(y) = (g \circ f)(a). \quad \square$$

**注 5.1.**　このとき, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ が成り立つことに注意．

**例 5.4.**　三角関数 $y = \cos x$ は連続である．

**証明**　$y = x + \dfrac{\pi}{2}$ は連続だから, 例 5.3 と定理 5.2 より, $\cos x = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$ も連続．　$\square$

**定理 5.3 (中間値の定理)．** 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 $k$ に対して,

$$f(c) = k, \quad a < c < b$$

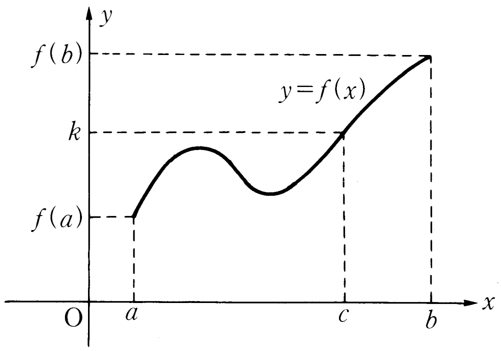
となる $c$ が存在する．

**例 5.5.** 方程式 $x - \cos x = 0$ は開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において解をもつ.

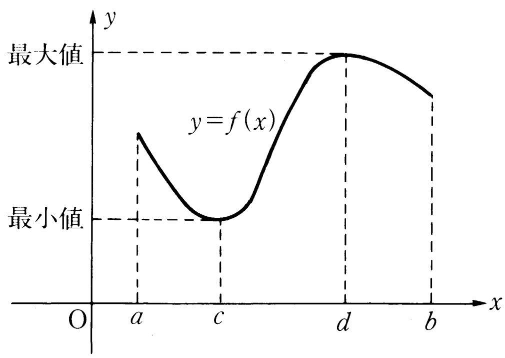
**証明** $f(x) = x - \cos x$ とおく. $f(x)$ は連続関数であり, $f(0) = -1, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ であるから, 中間値の定理において $k = 0$ とみなせば, $f(c) = 0$ かつ $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$ となる方程式 $f(x) = 0$ の実数解 $c$ が存在する. □

**問 5.2.** 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ は相異なる 3 つの実数解をもつことを示せ.

**定理 5.4 (最大値・最小値の定理)**. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば, この閉区間で最大値および最小値をとる. すなわち, $a \leqq x \leqq b$ ならば $f(c) \leqq f(x) \leqq f(d)$ を満たす点 $c, d$ が $[a, b]$ 内に存在する.




**中間値の定理**




**関数の最大値と最小値**

**問 5.3.** 閉区間 $[0, 1]$ において, 最大値も最小値ももたない関数の例をあげよ.

# 6　関数列とベキ級数

無限個の関数の列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ を**関数列**といい, $\{f_n(x)\}$ または $\{f_n\}$ で表す. すべての $x$ に対して, 数列 $\{f_n(x)\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき, 関数列 $\{f_n(x)\}$ または $\{f_n\}$ は**収束する**という. 各 $x$ について, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおいてできる新しい関数 $f(x)$ を関数列 $\{f_n(x)\}$ または $\{f_n\}$ の**極限関数**という.

一般には, 連続関数による収束する関数列の極限関数は, 必ずしも連続になるとは限らない. 区間上で定義された収束する関数列 $\{f_n(x)\}$ が極限関数 $f(x)$ に一様収束するとき, その極限関数 $f(x)$ は連続関数となる. しかし, ここでは一様収束性の概念には触れないでおく.

**問 6.1.** 各自然数 $n$ に対して, $f_n(x) = x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおくとき, その関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限関数を求めよ.

関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して, その有限和による関数

$$g_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

はつねに定義できる．その関数列の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

は, すべての $x$ について

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

の値が存在するとき，この新しい関数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ として定義される．このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は**収束する**という．そうでないとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は**発散する**という．

関数列の級数で

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

の形のものを**ベキ級数**という．特に簡単にするため, $c=0$ の場合

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を考える．

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x=0$ だけで収束するとき, $R=0$ とおき, すべての $x$ において収束するとき, $R=\infty$ とおく．これらの場合を除くと, ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x|<R$ となるすべての $x$ に対して収束し, $|x|>R$ となるすべての $x$ に対して発散するような数 $R$ $(0<R<\infty)$ が存在することが証明される．このとき, $R$ をベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の**収束半径**という．

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 $R$ を求めるためには, 次の定理がある．

**定理 6.1.** ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 $R$ について, 次が成り立つ．

(1) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が存在すれば, $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ となる．

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$ が存在すれば, $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ となる．

**問 6.2.** 次のベキ級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

# 7 逆関数

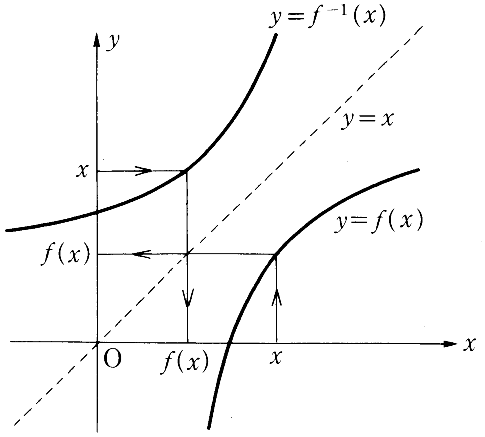
関数 $f(x)$ の定義域を $D$ とする. 任意の $x, x' \in D$ に対して, 「$x < x'$ ならば $f(x) < f(x')$」となるとき, $f(x)$ は**狭義の単調増加関数**といい, 「$x < x'$ ならば $f(x) > f(x')$」となるとき, $f(x)$ は**狭義の単調減少関数**という. これらを総称して, **狭義の単調関数**という.

**注 7.1.** 「$x < x'$ ならば $f(x) \leqq f(x')$ ($f(x) \geqq f(x')$)」となるとき, $f(x)$ は広義の単調増加 (減少) 関数という.

狭義の単調関数 $f(x)$ をその定義域から実数への写像とみれば, 単射であるので, その値域を定義域とする, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ をもつ.

**定理 7.1 (逆関数の存在)** . 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で狭義の単調増加 ( 減少 ) 関数ならば, その逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は閉区間 $[f(a), f(b)]$ ( $[f(b), f(a)]$ ) で連続であり狭義の単調増加 ( 減少 ) となる.

定理 7.1 では $y = f(x)$ の逆関数は, $x$ と $y$ を入れ替えて $y$ について解いた式を求めればよい. 通常, この関数を $y = f^{-1}(x)$ と書き $f(x)$ の**逆関数**という. このとき, $x$ の変域は, もとの関数の値域であるので注意すること.




**逆関数のグラフ**

**注 7.2.** $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは, $y = x$ に対して対称となる.

**例 7.1.** 次の関数の逆関数を求めよ.

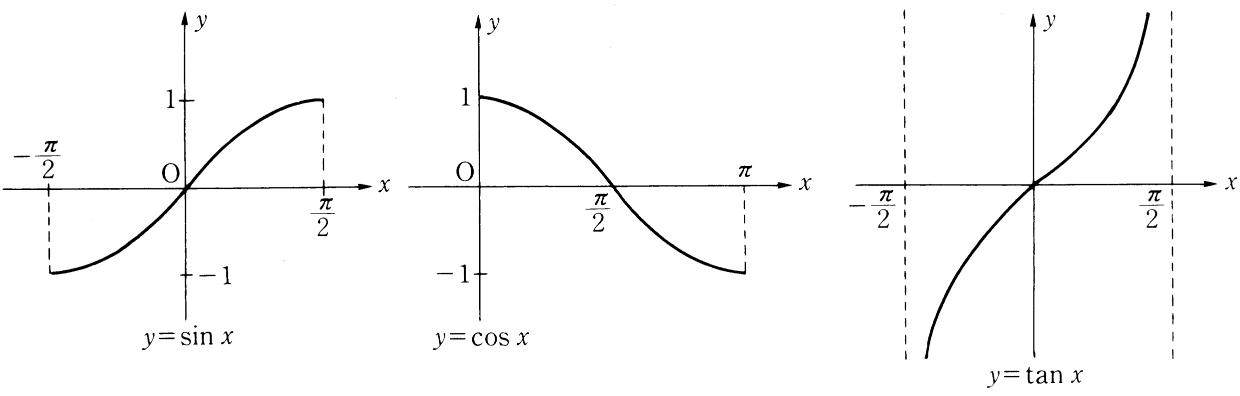
(1) $y = \sqrt{x-1} + 2$ (2) $y = \dfrac{1}{2}x + \sqrt{x-4}$

**解** (1) $x = \sqrt{y-1} + 2$ より $y = (x-2)^2 + 1$ ただし $x \geqq 2$.

(2) $x = \dfrac{1}{2}y + \sqrt{y-4}$ より $y = 2x + 2 \pm \sqrt{8x-12}$. ここで, もとの関数は $4 \to 2$ であるので, 求める逆関数は $2 \to 4$ であるので, 代入して $y = 2x + 2 - \sqrt{8x-12}$ が求める逆関数である. ただし, $x \geqq 2$.

**例 7.2.** 指数関数 $y = a^x$ $(a > 1)$ は，連続で狭義の単調増加関数である ( 例 5.2 の図を参照 )．そこで，定理 7.1 からその逆関数が存在するが，それは対数関数 $y = \log_a x$ であり，連続で狭義の単調増加関数となる．

三角関数は狭義の単調関数ではないので，一般にその逆関数は存在しない．そこで，その定義域を狭義の単調関数となるように制限する．$y = \sin x$ は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で狭義の単調増加，$y = \cos x$ は $[0, \pi]$ で狭義の単調減少，$y = \tan x$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ で狭義の単調増加となる．




**制限された三角関数のグラフ**

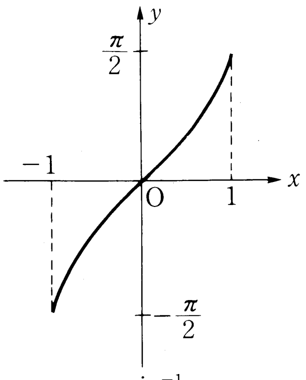
上記のように定義域を制限された三角関数は，定理 7.1 より逆関数をもつ．これらの逆関数をそれぞれ

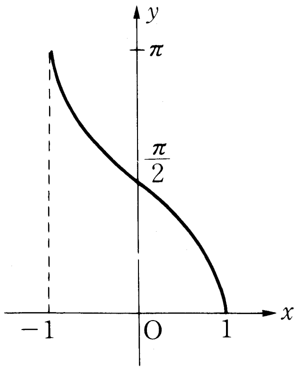
$$y = \sin^{-1} x, \qquad y = \cos^{-1} x, \qquad y = \tan^{-1} x$$

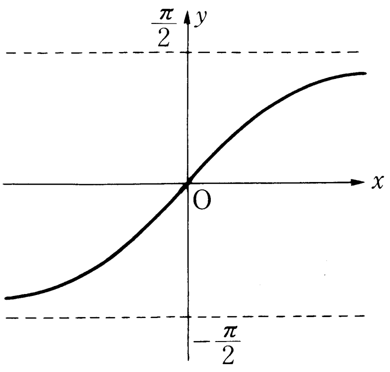
で表し，**逆三角関数**という．すなわち，

$$\begin{aligned} y = \sin^{-1} x &\iff x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} \\ y = \cos^{-1} x &\iff x = \cos y, \quad 0 \leqq y \leqq \pi \\ y = \tan^{-1} x &\iff x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

により逆三角関数は定義される．




**逆三角関数のグラフ**

**注 7.3.** 逆三角関数 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ はそれぞれアークサイン, アークコサイン, アークタンジェントと読む. また, それらはそれぞれ $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ の形で表されることもある. すでに述べたように, 制限された三角関数のグラフと逆三角関数のグラフは, $y=x$ に関してそれぞれ対称になっている (注 7.2 参照).

**例 7.3.** $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ の値を求めよ.

**解** $y=\sin^{-1}\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin y=\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より, $y=\dfrac{\pi}{6}$. ゆえに, $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$. □

**例 7.4.** $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ の値を求めよ.

**解** $y=\cos^{-1}\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \cos y=\dfrac{3}{5},\ 0\leqq y\leqq\pi$ であるから, $\sin y\geqq 0$ より,

$$与式=\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5} \quad \square$$

**例 7.5.** $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ を証明せよ.

**証明** $y_1=\sin^{-1}x,\ y_2=\cos^{-1}x$ とおく. 定義より,

$$x=\sin y_1,\ -\frac{\pi}{2}\leqq y_1\leqq\frac{\pi}{2} \quad かつ \quad x=\cos y_2,\ 0\leqq y_2\leqq\pi.$$

よって, $x=\sin y_1=\cos y_2=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y_2\right)$. さらに, $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}-y_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから, $y_1=\dfrac{\pi}{2}-y_2$ となる. ゆえに, 与式 $=y_1+y_2=\dfrac{\pi}{2}$ を得る. □

**例 7.6.**　$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$　(ただし, $xy \leqq 0$) を証明せよ．

**証明**　$x \geqq 0$ , $y \leqq 0$ として一般性を失わない．$u = \tan^{-1} x$, $v = \tan^{-1} y$ とおくと, $x = \tan u$, $y = \tan v$ であり, $0 \leqq u < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < v \leqq 0$ である．加法定理より,

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{x+y}{1-xy}$$

である．ここで, $-\dfrac{\pi}{2} < u + v < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すれば

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = u + v = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy} \quad \square$$

**問 7.1.** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と $\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の値を求めよ．

**問 7.2.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x$ の値を求めよ．

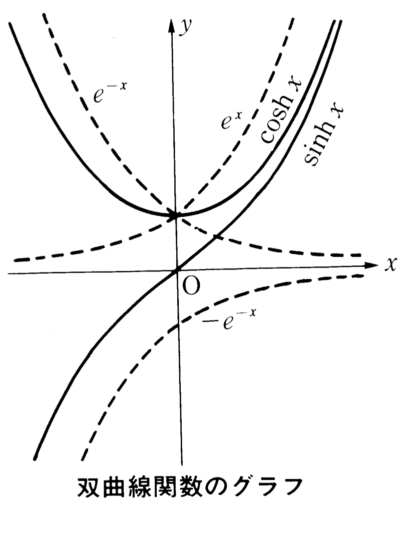
**問 7.3.** 次の値を求めよ．

(1) $\sin^{-1} \dfrac{4}{5} + \sin^{-1} \dfrac{3}{5}$　　(2) $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

次のように定義される関数を総称して, **双曲線関数**とよばれる．

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

**注 7.4.**　上記の双曲線関数 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ はそれぞれハイパボリック・サイン, ハイパボリック・コサイン, ハイパボリック・タンジェントと読む．




双曲線関数のグラフ

$y=\sinh x$, $y=\tanh x$ は, 実数直線上で定義された狭義の単調関数だから, 定理 7.1 より逆関数が存在する. その逆関数をそれぞれ $y=\sinh^{-1}x$, $y=\tanh^{-1}x$ で表す. $y=\cosh x$ は定義域を $[0,\infty)$ に制限すれば狭義の単調関数となり, この区間で逆関数 $y=\cosh^{-1}x$ が存在する.

$y=\sinh^{-1}x$, $y=\cosh^{-1}x$, $y=\tanh^{-1}x$ は総称して**逆双曲線関数**とよばれる.

**問 7.4.** 次のことを示せ.

(1) $\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})\quad(-\infty<x<\infty)$

(2) $\cosh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1})\quad(x\geqq 1)$

(3) $\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1)$

## 第 1 章　練習問題

**1.** 次の数列の極限値を求めよ.

(1) $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$　(2) $\left\{\dfrac{1-3n}{2n-1}\right\}$　(3) $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$

(4) $\left\{\dfrac{\sqrt{n}+2}{n+4}\right\}$　(5) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$　(6) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right\}$

(7) $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$　(8) $\left\{\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)\right\}$　(9) $\{(1+2^n)^{\frac{1}{n}}\}$

(10) $\left\{\dfrac{2^n+1}{3^n-1}\right\}$　(11) $\left\{\dfrac{2\cdot 3^n+3}{3^n+2^n}\right\}$　(12) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}$

(13) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}\right\}$　(14) $\left\{\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^n}\right\}$　(15) $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}\ (a>0)$

**2.** 次の級数の収束・発散を判定せよ.

(1) $\sum 2\cdot 3^{n-1}$　(2) $\sum 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　(3) $\sum\dfrac{1}{n^2+3n+2}$　(4) $\sum\dfrac{2n-1}{3n+1}$

(5) $\sum\dfrac{n^n}{n!}$　(6) $\sum\dfrac{n^p}{n!},\quad(p>0)$　(7) $\sum\dfrac{1}{\{\log(n+1)\}^n}$　(8) $\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$

(9) $\sum\dfrac{n}{2^n}$　(10) $\sum\dfrac{n!}{2^n}$　(11) $\sum\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$　(12) $\sum\dfrac{1}{n^3}$

**3.** 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{4x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin 2x}{2x+\sin x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x}$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$　(14) $\displaystyle\lim_{x\to -2+0}([x^2]-[x]^2)$　(15) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$　$(a>0)$

**4.** 関数 $f(x)$ が連続ならば，$|f(x)|$ も連続となることを示せ．

**5.** 関数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

は連続であることを示せ．

**6.** 方程式 $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ は，開区間 $(0,1)$ において実数解をもつことを示せ．

**7.** 次のベキ級数の収束半径を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n}x^n$

**8.** $y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{x+1}$ の逆関数を求めよ．

**9.** 次の値を求めよ．

(1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\sin^{-1}\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$　(3) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{-1}{2}\right)$　(5) $\tan\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(6) $\sin\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(7) $\sin\left(2\cos^{-1}\dfrac{1}{5}\right)$　(8) $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{3}+\sin^{-1}\dfrac{7}{9}\right)$　(9) $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

(10) $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$　(11) $\sin^{-1}\dfrac{7}{25}+\sin^{-1}\dfrac{24}{25}$　(12) $\tan\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{12}{13}\right)$

(13) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$　(14) $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3}\right)$　(15) $\sin^{-1}\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}\right)$

**10.** 次の式を証明せよ．

(1) $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\cos^{-1}x & (0\leqq x\leqq 1)\\ \pi-\cos^{-1}x & (-1\leqq x\leqq 0)\end{cases}$