

数学演習 (1) 第7回 ロピタルの定理 補足説明

つぎの極限値を求めよ。多くの場合は、ロピタルの定理を用いることができる。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$	(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\log(1+bx)}, (b \neq 0)$	(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$
(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - \cos x}$	(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, (a, b > 0)$	(13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1+x)}$
(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a}, (a > 0)$	(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$	(14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$
(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}}, (a > 0)$	(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$	(15) $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x, (a > 0)$
(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}}, (a, b > 0)$	(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$	(16) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$		(17) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$

【解】

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{\cos 2x \times 2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - \cos x} = \frac{1-1}{0-1} = 0 \quad \text{この問いは単に値を代入するだけで極限を計算する。}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{a x^{a-1}} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a} = 0 \quad (\because a > 0) \quad \text{後述のグラフを参照}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{ax} \times a} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{ax}} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} = 0 \quad (\because a > 0)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^{bx/a}} \right)^a = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{bx/a}} \right)^a = 0 \quad (\because \text{前問 (4) と関数 } y = x^a \text{ の連続性})$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \because |\sin(x)| \leq 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\log(1+bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\cos^2(ax) \times a}{1/(1+bx) \times b} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+bx)}{\cos^2(ax)} = \frac{a}{b} \frac{1+0}{1} = \frac{a}{b}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\log(a)x} - e^{\log(b)x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(a)a^x - \log(b)b^x}{1} = \log(a) - \log(b) = \log \frac{a}{b}$$

☆ $a = e^{\log(a)}$ とし、 $f(x) = e^{\alpha x}$ の形 $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ 。 $\alpha = \log a$ で、 $(a^x)' = a^x \log a$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)}{2x(1+x)} = \frac{-1}{2(1+0)} = \frac{-1}{2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \frac{-1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1}{3}$$

☆ $f(x) = \arctan x = \tan^{-1} x$ の微分は逆関数の微分公式から $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0 \quad \star \text{ ロピタルの定理を2回適用}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x) + x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(\sin x) + (\sin x + x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \left(\frac{x}{\sin x}\right) \cos x} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \quad \star \text{ ロピタルの定理を2回適用}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} \times 2x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(1+x)}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1+1/x)}{1+1/x^2} = 2$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{(-a)x^{-a-1}} = \frac{-1}{a} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{-1}{a} \lim_{x \rightarrow +0} x^a = 0 \quad (\because a > 0)$$

☆ この極限は $0 \times (-\infty)$ の形の不定形, 最後は $y = x^a$ における a の符号に対するグラフ参照

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

☆ この極限は $\infty - \infty$ の形の不定形

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} [e^x(1 + xe^{-x})]^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x)^{1/x} (1 + xe^{-x})^{1/x} = e \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{1/x}$$

ここで $x \rightarrow 0$ とすると、 $\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{1/x} \rightarrow e$ となり、 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} = e^2$ となる。なぜなら $\frac{x}{e^x} = x \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots\right) = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \dots$ だから、 $r(x) = -x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots$ とおくと、 $1 + \frac{x}{e^x} = 1 + x + r(x)$ であり、 $x \rightarrow 0$ では $r(x) \rightarrow 0$ となるから、「 $1+x \rightarrow 1$ 」と「 $1 + \frac{x}{e^x} = 1 + x + r(x) \rightarrow 1$ 」が同時に成り立つ命題であるから。

☆ たとえば、 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2+x^3)^{1/x}$ などがなりたつ。

1 定理

定理 1.1 (L'hospital Rule :) 関数 $f(x)$, $g(x)$ は点 a を含むある开区間で微分可能であり、

$$f(a) = g(a) = 0$$

であり、さらに a の近くの値 $x(x \neq a)$ では、 $g'(x) \neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が右辺の極限值があるとき、等式(左辺と右辺が等しい)が成り立つ。もし

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{同時に} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

の場合でも上の命題が成立し、極限が片側であってもよい。

ロピタルの定理の証明にはつぎのコーシーの平均値の定理をもちいる。この定理は、分母の関数 $g(x) = x$ とすれば、よく知られた平均値の定理に帰着されるから、拡張していることがわかる。

定理 1.2 コーシーの平均値の定理：関数 $f(x)$, $g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能であるとする。 (a, b) 上で $g'(x) \neq 0$ であるならば、少なくとも一つの値 c が存在して(一つの値を選ぶことができて)、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

さまざまな場合に極限値を計算するときには、便利な方法である。証明の概要をみる。

(i) $f(a) = f(b) = 0$ の場合；仮定から、 $x = a$ のまわりで $g'(x) \neq 0$ だから、 $g'(x)$ は正か負。よって単調増加か単調減少である。コーシーの平均値の定理を閉区間 $[a, x]$ において適用することで、値 c を $a < c < x < b$ となるように選んで、 $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ とできる。最後の右辺は $f(a) = g(a) = 0$ をもちいた。極限値は $x \rightarrow a+$ (右側) とすると、 $c \rightarrow a+$ であり、

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

となる。左側極限も同様に考えると、 a のまわりとする値 x を、 $x < a$ として、 $x < c < a$ を選ぶことで、同様にして $\frac{f(a) - f(x)}{g(a) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ で、極限値は $x \rightarrow a-$ (左側) とすると、 $c \rightarrow a-$ であり、

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a-} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

極限値 L は微分の比 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ に対して $x \rightarrow a$ で存在する ($x \rightarrow a+$, $x \rightarrow a-$ が同じ値) $\lim_{c \rightarrow a-} \frac{f'(c)}{g'(c)} =$

$L = \lim_{c \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ と仮定しているから、極限値 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ は

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

に等しい。

(ii) 正の無限大、負の無限大の場合：微分可能な関数が

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$$

さらに微分比の極限值

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

が存在すると仮定する。

この仮定から、任意の十分小さな $\epsilon > 0$ に対して、適当な $\delta > 0$ を選んで、

$$L - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \epsilon \quad a < x < a + \delta \quad (1.1)$$

が成り立っている。 $b = a + \delta$ とおいて $a < x < c < b = a + \epsilon$ に対し、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)}{g(b)}}{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}$$

簡単な式変形から、

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(b)}{g(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)}{g(b)}$$

さらに $r(x) = \frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{g(b)}{g(x)}$ とおくと

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} - \left(\frac{f(b)}{g(b)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{g(b)}{g(x)}\right) = \frac{f(x)}{g(x)} - r(x) \quad (1.2)$$

この準備のもとで、(1.1) において $x = c$ とおき、(1.2) に代入すると、

$$L - \epsilon + r(x) < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \epsilon + r(x)$$

となるが、 $r(x)$ の大きさは $g(x)$ が分母にあり、 $x \rightarrow a+$ とすると、 $g(x) \rightarrow \pm\infty$ としているから、 $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ の値は有界な値であることから、 $r(x)$ の大きさは十分小さいとみなせるから、 $|r(x)| < \epsilon$ とし、

$$L - 2\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + 2\epsilon, \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < 2\epsilon$$

この ϵ は十分小さいから、

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

が得られ、左側極限も同様。

(iii) $x \rightarrow \infty$ のばあい：

$x \rightarrow \infty$ 、 $g'(x) \neq 0, (x > b)$ とする。 $x \rightarrow -\infty$ に対しても同様。

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

の極限があると仮定する。これに対しては変換 $t = \frac{1}{x}$ をおこなう。つまり「 $x \rightarrow \infty$ 」 $\iff$ 「 $t \rightarrow 0+$ 」仮定は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = L$$

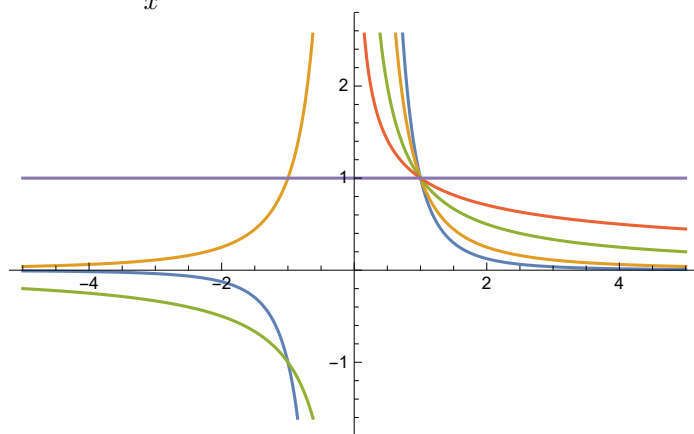
合成関数の微分公式から $\frac{d}{dt}h(1/t) = h'(1/t)(-1)t^{-2}$ を用いて $\frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'} = \frac{f'(1/t)(-1)t^{-2}}{g'(1/t)(-1)t^{-2}} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$ したがって、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'} = L$$

2 Graphics

(1) $y = x^a; (a \leq 0)$ の Graph plot : $x^a; a = -3, a = -2, a = -1, a = -1/2, a = 0$

双曲線 $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ など



(2) $y = x^a; (a \geq 0)$ の Graph plot : $x^a; a = 0, a = 1/2, a = 1, a = 2, a = 3$

定数 $y = 1 = x^0$ (ゼロ乗), 無理関数 $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$ 、直線 $y = x = x^1$ 、放物線 $y = x^2$ 、3 次関数 $y = x^3$ など

