2019.4.12

# 数学演習 (1)　第 1 回　数列の極限

解説：数列の収束と発散, 無限級数とその和

例　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a} \quad (|a| < 1)$

問題+宿題

I. 次の式で定まる数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ. (発散することもある)

(1) $a_n = 2^n$

(2) $a_n = -2^n$

(3) $a_n = (-2)^n$

(4) $a_n = -2^{-n}$

(5) $a_n = (-2)^{-n}$

(6) $a_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{2}$

(7) $a_n = \dfrac{4}{8n-7}$

(8) $a_n = \dfrac{2n^2+6n+1}{3n^2+2n}$

(9) $a_n = \dfrac{2^n+1}{3^{n+1}+1}$

(10) $a_n = \dfrac{5^{n+1}-4^{n-1}}{5^n+(-4)^n}$

(11) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

(12) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$

(13) $a_n = (-2)^n - \dfrac{4^n}{(-2)^n+1}$　　(hint: 通分する)

(14) $a_n = 0.\underbrace{11\cdots1}_{n\text{ 個}}$

II. 次の無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について, 部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ (n \geq 1)$ を求めよ. さらに, 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$ を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$　　(hint: $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} =?$)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$　　(hint: 級数は発散する)

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$