

数学演習 (1) 第 7 回 ロピタルの定理

解説: 不定形の極限

問題+宿題

I. 次の極限を求めよ. a, b は定数とする. 必要なら, ロピタルの定理を用いよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - \cos x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} \quad (a > 0)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}} \quad (a > 0)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}} \quad (a > 0, b > 0) \quad (\text{hint: } \frac{x^a}{e^{bx}} = \left(\frac{x}{e^{(b/a)x}} \right)^a)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\log(1 + bx)} \quad (b \neq 0)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x^2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + x^2)}{\log(1 + x)}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x \quad (a > 0)$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$