

数学演習 (1) 第 8 回 テイラーの定理

$f(x)$ の有限マクローリン展開 :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad (0 < \theta < 1)$$

例. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \quad (0 < \theta < 1)$

問題+宿題

I. a, b を定数とする. 次の関数の $n = 5$ のときの有限マクローリン展開を求めよ. 剰余項は $R_5(x)$ と略記せよ.

(1) e^{ax+b}

(2) $a^x \quad (a > 0)$

(3) $\sin x$

(4) $\cos x$

(5) $\sinh x$

(6) $\cosh x$

(7) $\sin^2 x$

(8) $\cos^2 x$

II. 次の関数の $n = 4$ のときの有限マクローリン展開を求めよ. 剰余項は $R_4(x)$ と略記せよ.

(1) $\frac{1}{1-x}$

(2) $\sqrt{1+x}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(4) $\sqrt[3]{1+x}$

(5) $\log(1+x)$