2018.4.20

数学演習 (1)　第 2 回　初等関数

解説：逆三角関数, 双曲線関数

問題+宿題

以下において

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1), \qquad 0 \leq \arccos x \leq \pi \quad (-1 \leq x \leq 1),$$
$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

とする.

I.

(1) $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$ のときの $\arcsin x$ の値を求めよ.

(2) $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$ のときの $\arccos x$ の値を求めよ.

(3) $x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1, \pm\sqrt{3}$ のときの $\arctan x$ の値を求めよ.

II. 次を x の式で (三角関数, 逆三角関数を用いずに) 表せ.

(1) $\sin(\arcsin x)$	(2) $\cos(\arccos x)$	(3) $\tan(\arctan x)$
(4) $\sin(\arccos x)$	(5) $\cos(\arcsin x)$	(6) $\tan(\arcsin x)$
(7) $\tan(\arccos x)$	(8) $\cos(\arctan x)$	(9) $\sin(\arctan x)$

III. 次の値を求めよ.

(1) $\arccos(\cos\frac{8\pi}{7})$	(2) $\arcsin(\sin\frac{8\pi}{7})$	(3) $\arccos(\sin\frac{8\pi}{7})$
(4) $\arcsin(\cos\frac{8\pi}{7})$		

(hint: $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$, $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 等を用いよ.)

IV. 双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

に対し, 次を示せ.

(1) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$　(左辺を計算する)

(2) $1 - (\tanh x)^2 = \frac{1}{(\cosh x)^2}$　(左辺を計算する. (1) を用いる)

(3) $\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$　(右辺を計算する)

(4) $\sinh(x + y) = \cosh x \cdot \sinh y + \sinh x \cdot \cosh y$　(右辺を計算する)

(5) $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$　((3), (4) を用いる)