2018.4.20

数学演習 (1)　第 1 回　数列の極限　解答

I. (1) (正の無限大に) 発散する

(2) (負の無限大に) 発散する

(3) 発散する　(振動する)

(4) 0

(5) 0

(6) 1

(7) 発散する (振動する)

(8) 0

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+7n+4}{3n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+7/n+4/n^2}{3+1/n}=2$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+1}{6^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2/6)^n+(1/6)^n}{1+(1/6)^n}=0$

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^{n+1}}{4^n+(-3)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3/4)^n-4}{1-3(-3/4)^n}=-4$

(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+1/n}+\sqrt{2-1/n}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}=\frac{1}{2}$

(14) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left((-2)^n-\frac{4^n}{(-2)^n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{(-2)^n+1}=1$

(15) $\displaystyle 0.\underbrace{11\cdots1}_{n\text{ 個}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}=\frac{1}{10}\frac{1-(1/10)^n}{1-1/10}=\frac{1}{9}\left(1-(1/10)^n\right)$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}0.\underbrace{11\cdots1}_{n\text{ 個}}=\frac{1}{9}$

II. (1) (i) $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$　(ii) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

(2) (i) $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}(\log k-\log(k+1))=-\log(n+1)$　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\log(n+1))=-\infty$ だから発散

(3) (i) $\displaystyle S_n=-\log 2+\log\frac{n+2}{n+1}$　(ii) $S=-\log 2$