

数学演習 (1) 第 13 回 定積分

問題+宿題

I. 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_{-1}^2 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 4x^3 + \frac{x}{3} & (-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{x^2} & (1 \leq x \leq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(2) \int_{-1}^1 e^{ax} dx \quad (a \neq 0)$$

$$(3) \int_0^1 (3x-2)^3 dx$$

$$(4) \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(5) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x} dx$$

$$(6) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$(7) \int_0^{\pi/4} \tan x dx$$

$$(8) \int_0^{\pi/6} x \sin 3x dx$$

$$(9) \int_1^e x \log x dx$$

$$(10) \int_0^1 \arctan x dx$$

$$(11) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

II. m, n を自然数とするととき, 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m = n, m \neq n \text{ で場合分けせよ.})$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m = n, m \neq n \text{ で場合分けせよ.})$$

III. $a > 0$ とする. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[-a, a]$ で連続なとき, 次の (1), (2) が成り立つことを示せ.

$$(1) f(x) \text{ が偶関数 (すなわち } f(-x) = f(x)) \text{ ならば } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$(2) f(x) \text{ が奇関数 (すなわち } f(-x) = -f(x)) \text{ ならば } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$