

数学演習 (1) 第 6 回 高次導関数 解答

- I. (1) $\frac{d^2}{dx^2}(ax+b)^4 = \frac{d}{dx}4a(ax+b)^3 = 12a^2(ax+b)^2$
 (2) $\frac{d^2}{dx^2}x^2 \log x = \frac{d}{dx}(2x \log x + x) = 2 \log x + 3$
 (3) $\frac{d^2}{dx^2} \log(ax+b) = \frac{d}{dx} \frac{a}{ax+b} = \frac{-a^2}{(ax+b)^2}$
 (4) $\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{x^2+1} = \frac{d}{dx} \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$
 (5) $\frac{d^2}{dx^2} e^{\sin x} = \frac{d}{dx}(e^{\sin x} \cos x) = (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}$
 (6) $\frac{d^2}{dx^2} \tan ax = \frac{d}{dx} \frac{a}{\cos^2 ax} = \frac{2a^2 \sin ax}{\cos^3 ax}$, 或いは $\frac{d^2}{dx^2} \tan ax = \frac{d}{dx} a(1 + \tan^2 ax) = 2a^2(1 + \tan^2 ax) \tan ax$
 (7) $\frac{d^2}{dx^2} \arcsin ax = \frac{d}{dx} a(1 - a^2 x^2)^{-1/2} = \frac{a^3 x}{(1 - a^2 x^2)^{3/2}}$
 (8) $\frac{d^2}{dx^2} \arctan ax = \frac{d}{dx} \frac{a}{1 + a^2 x^2} = \frac{-2a^3 x}{(1 + a^2 x^2)^2}$
 (9) $\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{x^2+1} = \frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

II. (1) 略 (2) $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}} \quad (n \geq 1)$

III. (1) $\frac{d^n}{dx^n} e^{ax+b} = a^n e^{ax+b}$

(2) $\frac{d^n}{dx^n} \sin ax = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$, または m を 0 以上の整数として

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin ax = \begin{cases} a^n \sin ax & (n = 4m \text{ のとき}) \\ a^n \cos ax & (n = 4m + 1 \text{ のとき}) \\ -a^n \sin ax & (n = 4m + 2 \text{ のとき}) \\ -a^n \cos ax & (n = 4m + 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

または m を 0 以上の整数として

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin ax = \begin{cases} (-1)^m a^{2m} \sin ax & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^m a^{2m+1} \cos ax & (n = 2m + 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) $\frac{d^n}{dx^n} \cos ax = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$, または m を 0 以上の整数として

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos ax = \begin{cases} a^n \cos ax & (n = 4m \text{ のとき}) \\ -a^n \sin ax & (n = 4m + 1 \text{ のとき}) \\ -a^n \cos ax & (n = 4m + 2 \text{ のとき}) \\ a^n \sin ax & (n = 4m + 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

または m を 0 以上の整数として

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos ax = \begin{cases} (-1)^m a^{2m} \cos ax & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{m+1} a^{2m+1} \sin ax & (n = 2m + 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

IV. (1) $f(x) = 39 + 17(x-3) + 2(x-3)^2$

(2) $f(x) = 12 + 11(x-2) + 3(x-2)^2$

(3) $f(x) = 17 + 22(x-1) + 12(x-1)^2 + 2(x-1)^3$

(4) $f(x) = -72 + 50(x+4) - 12(x+4)^2 + (x+4)^3$