

数学演習 (1) 第 7 回 ロピタルの定理

解説: 不定形の極限

問題+宿題

I. a, b を定数とするとき, 次の極限を求めよ. 必要なら, ロピタルの定理を用いよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 3x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - \cos x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} \quad (a > 0)$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}} \quad (a > 0)$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^{bx}} \quad (a > 0, b > 0) \quad (\text{hint: } \frac{x^a}{e^{bx}} = \left(\frac{x}{e^{(b/a)x}} \right)^a)$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\log(1 + bx)} \quad (b \neq 0)$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a > 0, b > 0)$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x^2}$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

II. 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x \quad (a > 0)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

III. 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$