積分の基本的事項

「微分との逆関係から」 積分定数は省略

(1) $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$ (2) $\int \sin x\,dx = -\cos x$ (3) $\int \cos x\,dx = \sin x$

(4) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$ (5) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$ (6) $\int e^x\,dx = e^x$

(7) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log x$ (8) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x$ (9) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x$

(10) $\int \dfrac{1}{1+\cos x}\,dx = \tan\dfrac{x}{2}$ (11) $\int \dfrac{1}{1-\cos x}\,dx = -\cot\dfrac{x}{2}$ (12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}\,dx$ $= \log(x+\sqrt{x^2\pm 1})$

「置換積分」 積分変数を x から t に変える: $g(x) = t$ とおくとき、$x = g^{-1}(t) = \phi(t)$, $f(x) = f(g^{-1}(t)) = F(t)$ とすると、

$$g'(x)dx = dt,\ dx = \phi'(t)\,dt \to \int f(x)\,dx = \int F(t)\phi'(t)\,dt$$

(1) $\int f(x)f'(x)\,dx = \int t\,dt = \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{\{f(x)\}^2}{2}$ $t = f(x)$ $dt = f'(x)\,dx$

(2) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \dfrac{1}{t}\,dt = \log|f(x)|$ $t = f(x)$ $dt = f'(x)\,dx$

(3) $\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = \int e^t\,dt = e^t = e^{f(x)}$ $t = f(x)$ $dt = f'(x)\,dx$

(4) $\int \dfrac{1}{x}f(\log x)\,dx = \int f(t)\,dt$ $t = \log x$ $dt = \dfrac{1}{x}\,dx$

(5) $\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(t)\,dt$ $t = \sin x$ $dt = \cos x\,dx$

(6) $\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(t)\,dt$ $t = \cos x$ $dt = -\sin x\,dx$

(7) $\int \dfrac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int f(t)dt$ $t = \tan x$ $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$

(8) $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ $= \int f\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ $t = \tan(\dfrac{x}{2})$ (*)

$$(*)\ \begin{cases} \sin x = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2\tan(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2}) \\ \cos x = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \cos^2(\frac{x}{2})\left\{1-\tan^2(\frac{x}{2})\right\} \\ dx = 2dt\cos^2(\frac{x}{2}) = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \quad 2\cos^2(\frac{x}{2})dt = dx,\ \cos^2(\frac{x}{2}) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

「部分積分」 $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x$

(3) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx = (x+1)e^x - \int e^x\,dx = (x+1)e^x - e^x = xe^x$

(4) $\displaystyle\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

定積分：閉区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ に対して、区間を分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ で分割し、小区間での値が $l_k \le f(x) \le u_k, (x_{k-1} < x < x_k)$ とするとき、$\sum_k l_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_k u_k(x_k - x_{k-1})$ $(x_{k-1} < \xi_k < x_k)$ での極限値が一致するならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と表す。

「微分積分法の基本定理」 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \Leftrightarrow f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x)$

「積分についての平均値の定理」区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ の積分に対して、関数が連続であれば、

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) = f(a+\theta(b-a))$$

を満たす $c = a+\theta(b-a),\ 0<\theta<1$ が存在する。

「置換積分」$g(x) = t, x = g^{-1}(t) = \phi(t)$ とおき、$f(x) = f(\phi(t)) = F(t), dx = \phi'(t)dt$

$\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array}$ $(\alpha = g(a), \beta = g(b))$ であるならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta F(t)\phi'(t)\,dt$

[例題]　上半円の方程式で区間 $[0,1/4]$ における積分 $\displaystyle\int_0^{1/4}\sqrt{x(1-x)}\,dx = ?$ この関数の原始関数は $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x)$ ですから、積分値を計算できます。ヒントは $x(1-x) = 1/4-(1/2-x)^2$ と変形し, $1/2-x = t$ と置換します。 I. ニュートンは $y = \sqrt{x(1-x)} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \cdots$ と展開して、π の近似値を $24(0.07677310678 + \sqrt{3}/32) = 3.141592668\cdots$ と求めています。（W.Dunham,1990）

[部分分数への分解（展開）] 分数形（有理関数）$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を簡単な和に分けること。たとえば、$\dfrac{1}{(x-a)(b-x)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$ となるよう係数 A, B を求めること。対数の積分 $\int\dfrac{dx}{x-a} = \log(x-a)$ に帰着される。また $\dfrac{x}{(x^2+1)(x+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{Cx+D}{(x+1)^2}$ であれば、$A = 0, C = 0$ となるから、$\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x,\ \int\frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$ に帰着できるから、$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx = \frac{\pi-2}{8}$ と計算される。

[例題] 通常の積分では $\int\cos x\,dx = \sin x$ であるから、$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = [\sin x]_{x=0}^{\pi/2} =$

$\sin\dfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ 簡単に得られる。これを積分の定義で計算してみる。そのために

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin(n + \dfrac{\theta}{2}) - \sin\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

をもちいる。この式さえ得られれば、積分の定義に代入するだけである。区間 $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ を n 等分して, その分点は $x_k - x_{k-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ で $f(x_k) = \cos\dfrac{k\pi}{2n}$ から $\sum_k f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \dfrac{\pi}{2n}\dfrac{\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4n}\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{4n}}$ ここで $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1$, $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ をつかえば、結果が $2\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4} = 1$ となる。

[例題] 数列の和に対する極限値を積分で求める。

$$\lim_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}} \right\} = \log(1+\sqrt{2})$$

なぜならば、各項を区間の分割として $\dfrac{1}{n}$ づつに区切る。与えられた式は

$$\sum_k \frac{1}{\sqrt{n^2+(n+k)^2}} = \sum_k \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^2}} \times \frac{1}{n} \to \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

この定積分を置換積分でも求める。そのために $x + \sqrt{1+x^2} = t$ とおく。この両辺を微分すると $dx + \dfrac{1}{2}\dfrac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}} = dt$ よって $\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = dt$ となるから、$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{dt}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{dt}{t}$. $x = 0$ で $t = 1$ となり、$x = 1$ で $t = 1+\sqrt{2}$ という範囲に対応する。これを積分すれば、$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \log(1+\sqrt{2})$ として得られた。

補足：三角関数の和について

(i) $\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\sin\left(n\theta + \dfrac{\theta}{2}\right) - \sin\dfrac{\theta}{2}\right\} = \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}\right\}$

(ii) $\sum_{k=1}^n \sin(k\theta) = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{-\cos\left(n\theta + \dfrac{\theta}{2}\right) + \cos\dfrac{\theta}{2}\right\} = \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}\right\}$

計算には複素数を使い、$\sum_{k=1}^n\{\cos k\theta + i\,\sin k\theta\} = \sum_{k=1}^n\{e^{i\theta}\}^k = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ で和を求め、さらに変形するには、 $1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ などを用いればよい。

[広義積分]（積分区間が有限でないとき、関数が有界でないばあい）　代表的な積分として、ガンマ関数とベータ関数

ガンマ関数： 積分区間が $[0,\infty)$ で、$0<s<1$ では関数が $(0,1]$ で有界でない場合

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, \quad (s>0) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

性質： パラメータ s は正の実数であれば積分値は有限な値となる。もし $s=n$ の自然数であれば

$$\Gamma(n+1)=n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

なぜなら、部分積分を用いて、$\Gamma(n+1) = -t^n e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^\infty nx^{n-1}e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-b^n e^{-b}) + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = n\Gamma(n)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

この関係式は正規分布 $N(0,1)$ の密度関数を表すときにもちいる。指数関数 $\exp(-x^2)$ を積分する。

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad (-\infty<x<\infty)$$

お馴染みのベル型、釣り鐘状の一つ山の関数で、全面積が確率 1 すなわち $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx=1$ になることが上の積分式 (3) である。

ベータ関数： 区間は単位区間 $[0,1]$ であるが、$0<s<1$ では $x=0$ の近くでは $s-1<0$ であるから、有界でない。t についても $x=1$ の近くで有界ではない。

$$B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx \quad (s,t>0) \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

ベータ関数はガンマ関数とは

$$B(s,t)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

とで結ばれる。

　また $B(s,t)=B(s,t+1)+B(s+1,t)$, $B(s,t+1)=\dfrac{t}{s+t}B(s,t)$, $B(s+1,t)=\dfrac{s}{s+t}B(s,t)$ も得られるし、$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ であるから、上に述べた上半円の面積に他ならない。

　問. 二項係数 $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ と $B(s,t)$ との関係を調べよ。