関数の極限と微積分の公式

目次

1 数列

数列 (sequence): $\{a_n; n = 1, 2, \cdots\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, \}$, 初期値: a_1, 一般項 (第 n 項): $a_n =$ (nの関数形), 差分列: $b_n = a_n - a_{n-1}$,

単調増加列:$a_i \le a_j\,(i < j)$, 単調減少列: $a_i \ge a_j\,(i < j)$; 上に有界: $\forall n, \exists U; a_n \le U$, 下に有界:$\forall n, \exists L; a_n \ge L$、有界: 上にも下にも有界のとき。

数列 $\{a_n\}$ の極限値 α; $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow |a_n - \alpha| \to 0 (n \to \infty)$

$\boxed{\text{定理}}$ 単調列は収束する。

• 等差数列: 階差数列が一定の値 $a_n - a_{n-1} = d$(公差), 一般項: $a_n = a_1 + (n-1)d, n = 1, 2, 3, \cdots$,

等差数列の和: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$,

• 等比数列: ゼロでない ($a_n \ne 0$), 比率 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$(定数), 一般項: $a_n = a_1\, r^{n-1}, n = 1, 2, 3, \cdots$,

総和 $S_n = a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 + \cdots + a_1\, r^{n-1} = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$, $(r \ne 1)$,

[フィボナッチ数列] $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, a_0 = 1, a_1 = 1$, $\Rightarrow \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots\}$, $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.617 \cdots$ (黄金比),

[数列の和]

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$,

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,

[階差数列]

$\{a_n\} : 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, 123, \cdots$

$\{b_n = a_{n+1} - a_n\} : 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \cdots$

$\{c_n = b_{n+1} - b_n\} : 2, 2, 2, 2, 2, \cdots$

[平面の直線による分割数]

$a_{n+1} = a_n + (n+1), a_1 = 2, \Rightarrow a_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

$\Rightarrow \{2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37 \cdots\}$

「オンライン整数列大事典」(OEIS) には、データベース（基本的に英語）

2 関数の極限の定義と性質

1. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ とは 任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ を定めて、$0 < |x-a| < \delta$ ならば、$|f(x) - L| < \epsilon$ とできる.
2. 右側極限とは $\lim_{x\to a+0} f(x)$ と表し、$x > a$ を満たして近づける. 左側極限とは $\lim_{x\to a-0} f(x)$ と表し、$x < a$ を満たして近づける.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a+0} f(x) = L \\ \lim_{x\to a-0} f(x) = L \end{cases}$
4. $\lim_{x\to a+0} f(x) \neq \lim_{x\to a-0} f(x)$ ならば、極限は存在しない、極限なしという.
5. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$
6. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)] \pm [\lim_{x\to a} g(x)]$
7. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]\,[\lim_{x\to a} g(x)]$
8. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ ただし $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
9. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

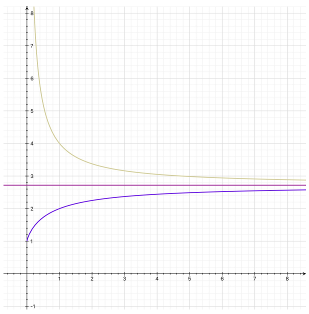
3 関数の値と極限

1. 定数（自然対数の底）

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2.71828\cdots$$

単調増加列 (↑) と単調減少列 (↓):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$



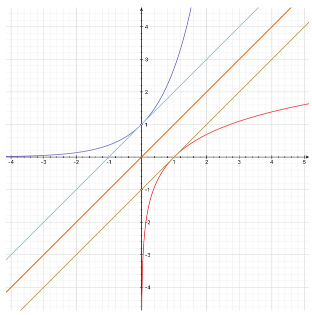
2. 指数関数 $e^x = \exp(x)$

$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

3. 自然対数 $\ln(x) = \log x = \log_e x$

$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty$, $\lim_{x\to e} \log x = 1$, $\lim_{x\to 1} \log x = 0$, $\lim_{x\to -\infty} \log x = -\infty$, $\lim_{x\to 1}\dfrac{\log(x)}{x-1} = 1$.

5 本の曲線は、$y = e^x = \exp(x)$, $y = x + 1$, $y = x$, $y = x - 1$, $y = \ln(x) = \log(x)$



4. 正弦関数 $\sin x$:

π (ラジアン, radian) $= 180^0$(度 ,degree)

$\sin 0 = 0$, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$, 奇関数; $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

5. 余弦関数:

$\cos x$: $\cos 0 = 1$, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$,

$\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

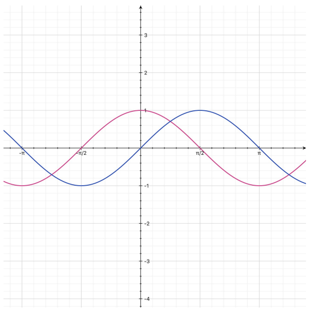
偶関数; $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$,

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- If $0 \le \alpha \le \pi/2$ then,

$0 < \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} = (-1)\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^2 \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2}$

正弦関数と余弦関数：



6. 正接関数: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\tan 0 = 0$, 奇関数；
   $\tan(-\theta) = -\tan\theta$,
   $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
   $\lim_{x\to\pi/2} \tan x = \infty$, $\lim_{x\to -\pi/2} \tan x = -\infty$,
   $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = 1$.
7. 加法定理
   $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
   和が積の差 (符号に注意)
   $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
8. 逆三角関数 アークサイン、アークコサイン、アークタンジェント
   変数 α は $-1 \le \alpha \le 1$, または $-\infty < \alpha < \infty$ の範囲で、対応する角度 θ は, $\theta = f^{-1}(\alpha)$ の形： 逆関数であるから、$f(\theta) = \alpha$ を満たす θ を意味する。ただし角度は各関数によって異なる主値となるから、考え方の基本は主値の範囲に引き戻すような平行移動をする。π は原点の対称性、$\pi/2$ は互いの補角。
   (a) 逆正弦関数 $\theta = \sin^{-1}(\alpha) = \arcsin(\alpha)$, 主値: $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, 例. $\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}(\sin(\frac{8\pi}{7})) = \sin^{-1}(\sin(\pi - \frac{\pi}{7})) = -\frac{\pi}{7}$, $\sin^{-1}(\cos(\frac{8\pi}{7})) = \sin^{-1}(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{7})) = -\frac{5\pi}{14}$
   (b) 逆余弦関数 $\theta = \cos^{-1}(\alpha) = \arccos(\alpha)$, 主値 $0 \le \theta \le \pi$ 例. $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\cos^{-1}(\cos(\frac{8\pi}{7})) = \cos^{-1}(\cos(\pi - \frac{\pi}{7})) = \frac{6\pi}{7}$, $\cos^{-1}(\sin(\frac{8\pi}{7})) = \cos^{-1}(\cos(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{2}) = \cos^{-1}(\cos\frac{9\pi}{14}) = \frac{9\pi}{14}$
   (c) 逆正接関数 $\theta = \tan^{-1}(\alpha) = \arctan(\alpha)$, 主値 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

4 微分の公式

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能 (differentiable) とは

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

なる極限値が存在するとき、この値を $x = a$ での微分係数といい、点 a を変化させるときに、導関数 (derived function) とよぶ。

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = f'(a),\ df(x) = f'dx$$

とも表現し、後者の表現を $df(x)$, dx については $y = f(x)$ の変化差分、dx を変数 x と a との変化差分とみなすことで $y - f(a)$、$x - a$ と考えれば、接線の方程式と同値な関係であり、$y - f(a) = f'(a)(x - a)$ が微分すなわち、接線の方程式を意味している。あるいはロピタルの定理を適用した $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{1} = f'(a)$、そのものでもある。

4.1 具体的な関数の微分

1. $(ax+b)' = a$
2. $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)' = \dfrac{-1}{(x+a)^2}$
3. $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$
4. $\left(\dfrac{1}{x^2+a}\right)' = \dfrac{-2x}{(x^2+a)^2}$
5. $(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
6. $(x^a)' = ax^{a-1}$
7. $(a^x)' = a^x \ln(a)$
8. $(e^x)' = e^x$
9. $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$, $(x>0)$
10. $(\ln(|x|))' = \dfrac{1}{x}$, $(x \neq 0)$
11. $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \ln a}$
12. $(x^x)' = ((e^{\ln x})^x)' = (e^{x \ln x})' = x^x(1+\ln x)$
13. $(\sin x)' = \cos x$
14. $(\cos x)' = -\sin x$
15. $(\tan x)' = \sec^2 x$
    $= \dfrac{1}{\cos^2 x}$
16. $(\sec x)' = (\dfrac{1}{\cos x})'$
    $= \sec x \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
17. $(\csc x)' = (\dfrac{1}{\sin x})'$
    $= -\csc x \cot x$
    $= -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
18. $(\cot x)' = (\dfrac{1}{\tan x})'$
    $= -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
19. $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $(\cos^{-1} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

4.2 微分の一般公式

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
2. $(af(x)+bg(x))' = af'(x)+bg'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)*g(x)^{-1}\right)'$
   $= f'(x)*g(x)+f(x)*(-1)\{g(x)\}^{-2}g'(x)$
   $= \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
6. $([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1}\, f'(x)$
7. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$
8. $(\ln[f(x)])' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
9. $(\sin[f(x)])' = \cos[f(x)]\, f'(x)$
10. $(\cos[f(x)])' = -\sin[f(x)]\, f'(x)$
11. $(\tan[f(x)])' = \sec^2[f(x)]\, f'(x)$
12. $(\tan^{-1}[f(x)])' = \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

5 関数の増加／減少

曲線を表す関数式が適当な区間のなかで微分できることを、一般にその区間内で`滑らか (smooth)”という。ある点で折れ曲がったり、ジャンプをして、左右の近づけ方に“飛び離れ（ギャップ)”がいる、ジグザグしているならば、それらの点、区間では微分可能ではない。もし滑らかに変化しているならば、関数の増減が微分により調べられる。

1. $x=c$ で $f'(c)=0$ ならば、極値か変曲点となる。2 階微分の符号を調べて、最大最小に分かれる。もし 2 階微分がゼロならば、変曲点であり、さらに高階の微係数を調べていく。
2. $I=\{x\,|\,a<x<b\}$ で $x \in I$, $f'(x)>0$ ならば、接線の傾き（微分係数）は増加状態（右上がり）
3. $x \in I$ で $f'(x)<0$ ならば、接線の傾き（微分係数）は増加状態（右上がり）
4. $I \in$ で $f'(x)=0$ ならば、接線の傾きはゼロ、

平たんで、関数の値は定数で変化なし。

5. 2 階微分 $x \in I$, $f''(x) > 0$ ならば、その区間では、“接線の傾きが増加状態”であり、これを凸（とつ, convex）という。

6. 逆に $x \in I$, $f''(x) < 0$ ならば、その区間では、“接線の傾きが減少状態”であり、これをおう（凹, concave）, 上向きに凸（上に凸）ともいう。

6　ロピタル (L'Hospital) の定理

定理 もし $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ あるいは $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ などの不定形であるとき、分母と分子をそれぞれ微分した $f'(x)$ と $g'(x)$ について、その極限があるならば、$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい。

〔例１〕 $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形：$f(x) = 3x^3 - 4,\ g(x) = 5x - 2x^3$ であるとき、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\text{を求める。}$$

$x \to \infty$ とすると、不定形であり、ロピタルの定理では $f'(x) = 9x^2,\ g'(x) = 5 - 6x^2$, さらに $f''(x) = 18x,\ g''(x) = -12x$, したがって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4}{5x-2x^3}\lim_{x\to\infty}\frac{18x}{-12x} = -\frac{3}{2}$$

と計算できる。一方、直接、この式を変形によって

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4}{5x-2x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{5}{x^2}-2\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{5}{x^2}-2} = \frac{3-0}{0-2} = -\frac{3}{2}$$

としても同じ結果が得られる。

〔例２〕 $\dfrac{0}{0}$ の形：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{-1}{6},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120},$$

〔e の定義式〕 1^∞ の形：$\displaystyle\lim_{x\to0}(x+1)^{1/x} = e$

左辺の対数は、$\dfrac{1}{x}\log(x+1) = \dfrac{\log(x+1)}{x}$ で、この分数式の分母分子を微分すると $\dfrac{1/(1+x)}{1} = \dfrac{1}{1+x} \to 1(x\to0)$, ‘$1 = \log e$’ である.

〔いろいろと〕 高次の微分によって、展開式が表れることを理解する：

- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1,$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{\log(x+1) - x - \frac{1}{2}x^2\right\} = -\frac{1}{3}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2!},$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{e^x - 1 - x - \frac{1}{2!}x^2\right\} = \frac{1}{3!},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\left\{e^x - 1 - x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3\right\} = \frac{1}{4!}.$$

7　テイラー展開

関数 $f(x)$ の $x = a$ でのテイラー展開は

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

マクローリン展開は $a = 0$ とおき、原点のまわりでの展開式をさす。

i) 2 項展開 $(1+x)^n \quad = 1 + nx + \dfrac{1}{2}n(n-1)x^2 + \cdots + \dfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} + x^n$

$= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k \quad (n+1$ 個の和$)$

幾何級数 $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1-r} \to \dfrac{1}{1-r} = (1-r)^{-1}$ (条件 $|r| < 1$) を応用して $\dfrac{1}{1+r} = (1-(-r))^{-1}$ あるいは $\dfrac{1}{1+x^2} = \big(1-(-x^2)\big)^{-1}$ なども適用できる。ここで一般化 2 項係数では $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ となる。

ii) 一般の 2 項展開

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \dfrac{1}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + \cdots$ (無限列で収束半径 $|x| < 1$)

iii) 指数関数

$e^x = exp(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \cdots (-\infty < x < \infty)$

テーラー展開は、多項式 x^n の組み合わせで、係数 $\cdots + c_n x^n + \cdots$ を求めることであるから、係数に頻繁に表れる階乗 $n!$ は、関数 x^n「微分の繰り返し」で 関数 x^n を n 回微分すると $n!$ となることに由来する。指数関数は微分の操作で不変となるから、この指数関数の展開式がテイラー展開の最も重要な結果と考えられる。

iv) $\sin(x) = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7 + \cdots$

v) $\cos(x) = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6}x^6 + \cdots$

指数関数（複素数, 虚数単位 $\sqrt{-1} = i$）と三角関数を結びつけるドモアブル - オイラーの公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ととも関係づける。i^n での $n = 0, 1, 2, \cdots$ は、90° ずつの回転で、$1, i, -1, -i$ の繰り返しとなる。

vi) $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \cdots (-1 < x \leq 1)$

$x = 1$ のときでも、係数の符号が $\pm$ となる交代級数であるから収束し、$\ln(2) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = 0.6931\cdots$ の値となる。また x を $-x$ として、対数の差を考えると、$\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ が得られ、$y = \dfrac{1+x}{1-x}$ とおくと $x = \dfrac{y-1}{y+1}$ となるから、$\ln(y) = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots\right)$ が得られる。

vii) $\tan(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + \cdots$

正接関数ではベルヌーイ数 B_n; $\dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n$ がもちいて表されるが、容易には得られない。

viii) $\arctan(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^+ \cdots \ (-1 \leq x \leq 1)$

逆正接関数は数値から角度を計算でき、もし $x = 1$ とすると、このときには、$45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$ であり、円周率の導出に使えるかも知れないが、まったく役には立たない。$4 \times \sum_{k=1}^{100} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 3.13159\cdots$ で、1000 個でやっと $3.14059\cdots$ までである。実際はより収束の早い形などが用いられる。しかし π を表す不思議な式であろう。

8 積分

微分が与えられた曲線に対して、その変化の状況を示すことで意味をもっているが、積分はその逆の演算として、原始関数を計算し、区間を定めれば、曲線の x 軸とで挟まれる領域の面積が求められる。という学習過程が指導要綱に沿ったものです。しかし、面積や体積の計算、これを求積とよぶが、遠くギリシャ、エジプト文明では古くから、多くの人々が研究した。アルキメデス（放物線の面積: $\int_a^b x^2 dx$, 球の体積、表面積を求めている「アルキメデス・パリンプセスト」、有名なデジタル技術で羊皮紙の解明、インターネット等で調べよ)。幾何学には王道なしという言葉も聞いたことがあるかも知れない。現代の数学は、このような幾何学というよりはいままで学んできたように面積は計算で求める手順である。

範囲を区間の分点分けした柱状図形の近似による極限として求める。与えられた関数 $f(x)$ に対し、積分する区間 $[a,b]$ を分点点列 $\{x_i\}$ により、近似した図形での数値の極限を積分記号で表し、Sum の S を延ばして、その意味を定めた。もし関数が $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ となるならば、値を代入して差によって、求められる。

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_i f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

8.1 定積分と不定積分

不定積分がいわゆる微分の逆演算（逆の対応）として、考えるが、その原始関数を求めるには、もともとの関数を微分演算に経験値を高めておくことが求められる。関数の微分は定義に当てはめる極限値計算をすればいいが、原始関数はなぜと言われても、微分すればとしか答えられない。たとえば、$\displaystyle\int_a^b \sqrt{x}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{1/2+1}\right]_a^b = \frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$ であるが、なかなか図形を眺めても易しくはないとおもう。しかし、離散的な場合での $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ や $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)\cdot n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ から、r 個ずつに並んだ数の積を加えると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=r}^{n} \overbrace{(k-r+1)\cdots k}^{r} \\
&= 1\cdot 2\cdots r + 2\cdot 3\cdots(r+1) + 3\cdot 4\cdots(r+2) + \cdots + (n-r+1)\cdots(n-1)\cdot n \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r+1} \\
&\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}
\end{aligned}$$

とは類似の関係が想像される。べき乗 x^r と離散型の積 $\overbrace{(k-r+1)\cdots k}^{r}$ との対応である。

8.2 一般の積分公式

i) (積分を施すことは線形作用) $\displaystyle\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$

ii) (部分積分) $\displaystyle\int (f(x)g(x))\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$

ii) (部分積分) $\int f(x)dx = x\,f(x) - \int xf'(x)dx$ (第２項をさらに積分する)

iii)（置換積分）$w = u(x) \Rightarrow dw = u'(x)dx \Rightarrow \int F(w)dw = \int F(u(x))u'(x)dx$

iv) (置換積分) $\int F(u(x))dx$ に対して、$w = u(x)$ とおくと、

$dw = u'(x)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{w'}dw \Rightarrow \int F(u(x))dx = \int F(w)\frac{1}{w'}dw$

8.3 不定積分

i) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (n \neq -1)$

ii) $\int x^{(-1)}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$

iii) $\int e^x dx = e^x$

iv) $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

v) $\int a^x x = \frac{1}{\ln(a)}a^x$

vi) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

vii) $\int \cos x\,dx = \sin x$

ix) $\int x\sin x\,dx = \sin x - x\ \cos x$

x) $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\ \sin x$

xi) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

xii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

xiii) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$

xiv) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a}$

xv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$

xvi) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

xvii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

8.4 定積分 (広義積分)

i) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}$

ii) $\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{\pi}{a}$

iii) $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

iv) $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$

v) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx$
$= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}$

vi) ガンマ関数 $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \Gamma(s)\,(s>0)$,
$\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \Gamma(n) = (n-1)!$ (n は正の整数)

vii) ベータ関数 $\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx = B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad (s,t>0)$

積分は微分の結果を参照することで得られるが、その原始関数を求めることは一般に難しい。微分については強引に力づくという方法でよいが、参考になるための経験値を高めるためにつぎの URL を掲げる：
`http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/open2all/integral-12.pdf`