ベクトル関数の勾配（gradient)、回転 (rotation) と発散 (divergent)

★★★　練習問題 ★★★

$\boxed{1}$ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし、そのノルム (大きさ) を $r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする。このとき、

(i) 勾配 ∇r をもとめよ。(答え）$\nabla r = \dfrac{\vec{r}}{r}$

【解】

第 1 成分は $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$ である。同様に第 2 成分、第 3 成分を求めて、これらのベクトルを加えると、$\nabla r = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = \dfrac{1}{r}\vec{r}$

(ii) $1/r = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配をもとめよ。　(答え）$\nabla(1/r) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

【解】

変数 x の偏微分は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2x = \dfrac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \dfrac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = \dfrac{-x}{r^3}$ であり、同様に、y, z についてもとめればよい。

(iii) $\vec{r}/r^3 (r \neq 0)$ の発散を計算せよ。(答え、 0)

【解】

定義により、x による偏微分は $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right) = \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}$ であり、同様に $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$ と $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$ に対しても計算し、加えればよい。

$\boxed{2}$ つぎの公式を示せ。

(i) $\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$

(ii) $\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla) \times \vec{f} - \vec{g}(\nabla \cdot \vec{f}) - (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + \vec{f}(\nabla \cdot \vec{g})$

【解】

すべて定義式にもとづく。

$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ と外積の定義をもちいて $\vec{f} \times \vec{g}$ の成分が
第 1 成分は $(\vec{f} \times \vec{g})_x = \vec{f}_y \vec{g}_z - \vec{f}_z \vec{g}_y$,
第 2 成分は $(\vec{f} \times \vec{g})_y = \vec{f}_z \vec{g}_x - \vec{f}_x \vec{g}_z$,
第 3 成分は $(\vec{f} \times \vec{g})_z = \vec{f}_x \vec{g}_y - \vec{f}_y \vec{g}_x$ など。

並べて書いてみるとよい。証明の計算は略。少なくとも一度は計算しておくべきである。