ベクトル関数の勾配（gradient)、回転 (rotation) と発散 (divergent)

1　ベクトルと行列

ベクトル (vector) の記法では、太文字の書体 **a**, 矢印を記す $\vec{a}$, $\vec{a}$ あるいは太い大文字 **A** とするものなど。ベクトルの成分を２次元、３次元を番号 2, 3、座標軸 x, y, z などをつかい、$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ などとする。横ベクトルをこのようにするが、縦ベクトルとして並べる $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ とすることもある。

行列 (matrix) は大文字を用い、要素 (element) を小文字にして、$m \times n$ 型では $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とするが、各分野での特質などからさまざまであることに注意する。

1.1　ベクトルの計算

３次元空間ベクトル $\mathbb{R}^3$ では

(i) 加法（＋）：$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

(ii) スカラー λ 倍: $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

1.2　曲線、曲面の表示

- 直線；パラメータ t をもちいて、$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}t$, すなわち $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} t$
- 平面； $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ パラメータ t_1, t_2 をもちいて、$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}t_1 + \vec{c}t_2$, $\mathrm{rank}(\vec{b}, \vec{c}) = 2$
- 曲線； $\vec{x} = \vec{x}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

  各成分ごとの微分をすれば、接線（直線ベクトル）を表せる。

  $d\vec{x} = \vec{x}'(t)dt \Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} dt$
- 曲面；２個パラメータ t_1, t_2 の関数として　$\vec{x} = \vec{x}(t_1, t_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_1, t_2) \\ x_2(t_1, t_2) \\ x_3(t_1, t_2) \end{pmatrix}$ であるから、各

成分の行 $(i = 1, 2, 3)$ を微分すると $dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial t_1} dt_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial t_2} dt_2$ であるから、これを

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} \end{pmatrix} dt_1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{pmatrix} dt_2$$

となる。まとめて、3×2 型のヤコビ行列 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}$ をもちい、

$$d\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{dt}\, dt = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_2} dt_2$$

とみなせる。ここで、t は (t_1, t_2) の意味であるが、矢印は省略した。この式を**接平面** (曲面に接する平面の方程式) を表す。ただし、ヤコビ行列の階数は 2 とする。平面となるためには、 2 個の一次独立なベクトルを含む形でなければならない。これを満たさない場合には、この点で接平面を計算できない、このような点を特異点とよぶ。もっと端的にいうと、平面空間のギザギザな曲線で直線をあてはめる、接線を引こうとしてもできない場合がある。立体空間でもこのような場合は起こる。そこで滑らかさを保証するためには $\mathrm{rank}\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{pmatrix} = 2$ と仮定しなければならない。

1.3 スカラー場、ベクトル場

3 次元空間ベクトルの点を $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ とする。この点に対応した関数 $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^1$ をスカラー場とよび、ベクトル場とは $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ とする。

以下では $\mathbb{R}^3$ のベクトルについて、定義式 (:= とおいて表すこと) と関係式 (= が成り立つこと) の計算を述べよう。

$\mathbb{R}^3$ の基本ベクトル (標準基底); $\vec{e_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、さらに $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ (係数のスカラー倍と和の形)。ノルム (ベクトルの大きさ) とは $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ と表す。絶対値、行列式と区別するために、 2 重縦線をしているが、一本の場合もよく用いられる。 2 次正方行列の**行列式** (determinant) は $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} := ad - bc$ であり、 3 次行列式は、もとの行列の転置行列に等しく、行列式の値は不変である。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

ここで３個の並び順 $\{1,2,3\}$ に関してこれを恒等置換から、互換（１個と１個の位置とを替えること）により、その符号数 sgn (signature の略) は偶数回をプラス、奇数回をマイナスとして $\mathrm{sgn}(1,2,3) = \mathrm{sgn}(2,3,1) = \mathrm{sgn}(3,1,2) := +1$, $\mathrm{sgn}(1,3,2) = \mathrm{sgn}(2,1,3) = \mathrm{sgn}(3,2,1) := -1$ とおく、インデックスにも表れる。

行列の展開式として３次正方行列では

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ベクトルの内積 (スカラー積、ドット積)；つぎのようにカッコをもちいたり、あるいはピリオド（数式処理の命令ではよく用いる）を使う。通常の積を略すように、ドットを示さない場合も多い。

$$(\vec{a}, \vec{b}) := \vec{a}.\vec{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ベクトルの外積 (ベクトル積、クロス積)；掛け算の記号をつかう。このクロス記号 $(\times)$ は省略できない。

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ (-1)\,(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix} \\ (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

【注】(i) ベクトルのつくる角度を θ とすると、内積の値は $\vec{a}.\vec{b} = \cos\theta \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ で求められ、これは三角形の余弦定理を表す。

(ii) 外積は $\vec{a} \times \vec{b}$ は２つのベクトルと直交し、$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{a} = 0, (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{b} = 0$ でノルムは $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\theta$ となる。

(iii) ノルムの計算は、２つのベクトルから作られる平行四辺形の面積となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \sin^2\theta &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2
\end{aligned}$$

(iv) 内積は“実数 $\mathbb{R}^3$ の場合”には交換律 $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ が成り立つが、複素数 $\mathbb{C}^3$ では定義には他方に共役複素数をもちいるので、不成立。外積では符号が反転 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ となる。

定理 1.1 ベクトルの三重積とラグランジュの公式, ヤコビの公式

(i) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{(３次正方行列の行列式)}$$

$$= a_1\,b_2\,c_3 + a_2\,b_3\,c_1 + a_3\,b_1\,c_2 - a_1\,b_3\,c_2 - a_2\,b_1\,c_3 - a_3\,b_2\,c_1$$

(ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$ （ラグランジュ（Lagrange）の公式)

$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 \\ a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 \\ a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_2 \\ a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix}$$

(iii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{b}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ （ヤコビ $(Jacob)$ の公式)

【注】証明には (ii) の３通りを加えれば、ゼロになることは容易にわかるが、内積の値がスカラーでベクトルのスカラー倍として計算した (ii) を各成分を加えても得られることを確認する。ここで結合法則が成り立たないこと!! $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

2 ヤコビアンと微分形式

2.1 積分の変換式とヤコビアン

２変数関数 $f(x_1,x_2)$ の積分 $\displaystyle\iint_D f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$ について、変換によって計算する。
つぎの関係式が知られている：$\vec{x} = (x_1,x_2) \mapsto \vec{y} = (y_1,y_2) = \vec{y}(\vec{x}) = \vec{y}(x_1,x_2)$

$$\int\int_{\vec{y}(D)} f(y_1,y_2)dy_1\,dy_2 = \int\int_D f\left(\vec{y}(x_1,x_2)\right)\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}dx_1\,dx_2$$

ここでヤコビアン：$\displaystyle\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \neq 0$ とする。

この変換式から、形式的に $dy_1\,dy_2 = \dfrac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}dx_1\,dx_2$ が成り立つと考える。もし微分の順序を考慮して、行列式のヤコビアンの計算から $y_1 = y_2$ とすれば、 $dy_1\,dy_1 = 0, dy_2\,dy_2 = 0$ また y_1 と y_2 を交換すると、$dy_1\,dy_2 = -dy_2\,dy_1$ となる。行列式では $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ b & a \end{vmatrix} = 0$、 また $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ のいいかえに対応している。

3　発散と回転

微分演算子として、よく用いられる定義を述べる。内積のドットも省略することがあるので注意する。

関数 $f = f(x_1, x_2, x_3)$ に対して, 偏微分から

$$\mathbf{div}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

と表して、これを**発散** (divergence) とよぶ。また $\mathbf{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$ とおくとき、このベクトルを f の**勾配** (gradient) という。内積（.） をもちいて

$$d\,f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 = \mathbf{grad}(f).\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \mathbf{grad}(f)d\vec{x}$$

となる。 微積分での微分、1 変数関数 $y = f(x)$ を微分した $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ を形式的に $dy = f'(x)\,dx$ としたものが 1 変数の場合の微分式であった。これを 3 変数へと拡張している。前節の微分形式をもちいて、内積 $g.d\vec{x}$ のドット (.) を省略して

$$\omega = g\,d\vec{x} = g_1dx_1 + g_2dx_2 + g_3dx_3$$

に対する微分形式は

$$d\omega = d(g\,d\vec{x}) = d\,(g_1dx_1 + g_2dx_2 + g_3dx_3) = dg_1 \wedge dx_1 + dg_2 \wedge dx_2 + dg_3 \wedge dx_3$$

の計算は、$i = 1, 2, 3$ について

$d(g_idx_1) = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_1 = -\frac{\partial g_i}{\partial x_2}dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial g_i}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_1$ を求めればよいから、２次微分形式として

$$d\omega = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right)dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right)dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)dx_1 \wedge dx_2$$

ここで

$$\mathbf{rot}(g) = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}, \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)$$

を**回転** (rotation) とよぶ。curl とするテキストもある。

微分の演算子のみをベクトルとみなして、積（かけること）を「演算の適用」と考えるとたとえば、微分する操作を $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$ として、$\frac{d}{dx}$ と f との積とみなす。

これまでに、使った偏微分の操作を関数を 3 変数実数値関数 $f = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ とし、3 変数のベクトル値関数 $\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と書き直して

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

とおくと、内積は 発散 (div) 、外積が 回転 (rot) となることが理解できるであろう。

- スカラー倍: $\mathrm{grad} f = \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- 内積：$\mathbf{div}(\vec{f}) = \nabla \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \in \mathbb{R}^1$
- 外積：$\mathbf{rot}(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

このように略すことが便利と考えるかどうか疑問をもつこともあるかも知れないが、物理学ではいろいろな環境での計算式を処理するためには、省略された記号の簡易化で、煩わしさが省かれる利点も大きい。慣れることも大切です。

このナブラは微分演算子であり、内積、外積をもちいることで、電磁気学でのマクスウェル (Maxwll) の方程式を述べることができる。4 命題はガウスの法則、アンペールの法則、ファラデーの法則、磁荷非存在を記述する。1. ファラデーの法則：磁束の変化に逆らって起電力が生じる、電場は電荷があるところから湧いて出てくる 2. 磁荷非存在：この世界に単一の磁荷が存在しない、磁場がどこかから湧き出ることはない 3. ガウスの法則：電場の発散が電荷密度に比例すること、磁場が時間変化すると電場は回転を持つ 4. アンペールの法則：電場の時間変化と変位電流によって磁場は回転を持つと説明される。

★★★　練習問題 ★★★

$\boxed{1}$　$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし、そのノルム (大きさ) を $r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。このとき、

(i) 勾配 ∇r をもとめよ。（答え）$\nabla r = \dfrac{\vec{r}}{r}$

(ii) $1/r = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ の勾配をもとめよ。（答え）$\nabla(1/r) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

(iii) $\vec{r}/r^3 (r \neq 0)$ の発散を計算せよ。(答え、0)

$\boxed{2}$　つぎの公式を示せ。

(i)　$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$

(ii)　$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla) \times \vec{f} - \vec{g}(\nabla \cdot \vec{f}) - (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + \vec{f}(\nabla \cdot \vec{g})$