

2018 年数学試験問題

解答例

2018/March/25

1

つぎの値を比べて、大きさの順に並べよ。

$$A = \sqrt{0.5}, B = \sqrt[4]{0.125}, C = \sqrt[3]{0.25}$$

「解」

$$A = (0.5)^{1/2} = (1/2)^{1/2} (= 0.707107)$$

$$B = (0.125)^{1/4} = (1/8)^{1/4} = (1/2)^{3/4} (= 0.594604)$$

$$C = (0.25)^{1/3} = (1/4)^{1/3} = (1/2)^{2/3} (= 0.629961)$$

分数の大小を比較して、 $1/2 > 2/3 > 3/4$ から $f(x) = (1/2)^x$ の単調減少性から、したがって

$$\therefore B < C < A$$

2

つぎの値を求めよ。

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3-0} [x^2] \quad ([] \text{ はガウス記号}) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{2}{x}}$$

「解」

(i) $0 < x < 3$, $x \uparrow 3$ の近くでは $\Leftrightarrow 8 \leq x^2 < 3^2 = 9$ ゆえに下から近づくので 9 にはならず、 $\lim_{x \rightarrow 3-0} [x^2] = 8$ となる。ガウス関数は階段で増加する形であることに注意。

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であり、 $\frac{2}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\sin x} \times 2$ と変形すれば、

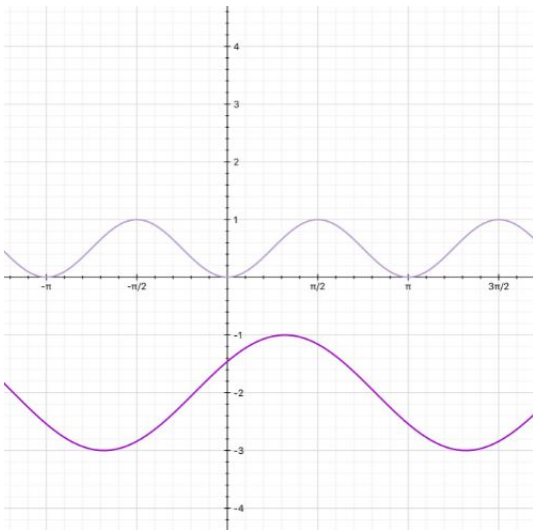
$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \times 2} = e^2$$

ここで $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$. すなわち 1^∞ の不定形

3 つぎの 2 つの関数について、適当に座標値を定め、グラフに描け。

(i) $y = \sin^2 x$, (ii) $y = -2 + \cos(x - 1)$

〔注意〕 (i) は $0 \leq y \leq 1$ の範囲であり、
 $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi \cdots$ で $y = 0$ となり、頂点 $y = 1$ はそれらの半分のとき、すなわち $x = \pm\pi/2, \pm\pi, \pm3/2\pi \cdots$ で
 $\sin(x) = \pm 1$, $\sin^2(x) = 1$ となる。あるいは $y = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
として考えることもできる。(ii) は $y = \cos(x)$ のグラフを平行移動する。



4 つぎの値を求めよ。

(i) $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$ (ii) $\sin^{-1} \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)$

「解」

(i) $\tan^{-1} 2 = x, \tan^{-1} 3 = y$ とおくと、 $\tan x = 2, \tan y = 3$ である。 $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = -1$ が得られる。よって、 $x + y = \frac{-\pi}{4}$

(ii) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、 $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$

答は $\sin^{-1} \left(\cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$