2018 年数学 (第 2 部) 試験問題

解答例と要点

2018/June/4

$\boxed{1}$

常用対数 $a = \log_{10} 2,\ b = \log_{10} 3$ とおくとき、つぎの値を a, b で表せ。

(1) $\log_{10} 6$ (2) $\log_{12} 25$

【解】

(1) $\log_{10} 6 = \log_{10} 2 \times 3 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = a + b$

(2) $\log_{12} 25 = \dfrac{\log_{10} 25}{\log_{10} 12}$,

分母と分子はそれぞれ次のように変形できる.

$$\log_{10} 25 = \log_{10} 5^2 = 2\log_{10} 5 = 2\log_{10} \frac{10}{2}$$
$$= 2(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 2(1 - a)$$
$$\log_{10} 12 = \log_{10} 3 \times 2^2 = \log_{10} 3 + 2\log_{10} 2$$
$$= b + 2a$$

したがって、答は $\dfrac{2(1-a)}{2a+b}$

$\boxed{2}$
つぎの値を求めよ。

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k(k+1)$　　(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)}$

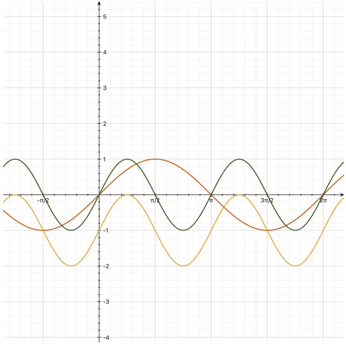
【解】
本問の意図は、$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 5 \cdot 6 = 2 + 6 + \cdots + 30 = \ldots$
$\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{5 \cdot 6} = \ldots$
という計算だけでなく、より一般化されたデータ形をどう求めるかを考察することである。後述の要点を参照。

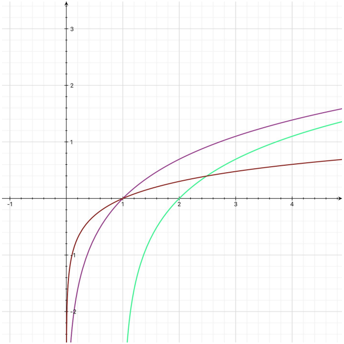
$\boxed{3}$

つぎの２つの関数について、適当に座標値を定め、グラフに描け。log は自然対数

$$\text{(i)}\ \ y=\sin(2x)-1\ \ \text{(ii)}\ \ y=\log(x-1)$$

【解】





$\boxed{4}$ つぎの値を求めよ。

(i) $\sin^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$ (ii) $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$

【解】

(i) $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、$\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

答は $\sin^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

(ii) $\tan^{-1}2=x,\ \tan^{-1}3=y$ とおくと、$\tan x=2,\ \tan y=3$ である。$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}=\dfrac{2+3}{1-2\times 3}=-1$ が得られる。よって、 $x+y=\dfrac{-\pi}{4}$

指数の性質、指数関数の要点

指数： $a \neq 0$, s, t は有理数, m, n は整数.

1) $a^s \times a^t = a^{s+t}$ 2) $\dfrac{a^s}{b^t} = a^{s-t}$ 3) $(a^s)^t = a^{s\,t}$

4) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 5) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (a^n)^m$ 6) $a^{-s} = \dfrac{1}{a^s}$

$y = a^x, (a > 0);\ -\infty < x < \infty \mapsto 0 < y < \infty$

$a > 1$ のとき、 $s < t \iff a^s < a^t$ (単調増加)

$0 < a < 1$ のとき、 $s < t \iff a^s > a^t$ (単調減少)

対数と指数

$a > 0, a \neq 1,\ s > 0, t > 0$ とする.
$e = 2.71828 \cdots = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, 1^{∞} の不定形（L.Euler）

$$s = a^p \iff \log_a s = p$$

$$t = e^p = exp(p) \iff \log t = \ln(t) = p$$

対数の性質、対数関数の要点

$s > 0, t > 0$ として

1) $\log 1 = 0$
2) $\log e = 1$
3) $\log s\,t = \log s + \log t$
4) $\log \dfrac{s}{t} = \log s - \log t$
5) $\log s^t = t \log s$
6) $\log_s t = \dfrac{\log_a t}{\log_a s}\ (a \neq 1, s \neq 1)$

$a > 1$ のとき、 $0 < s < t \iff \log_a s < \log_a t$ (単調増加)

$0 < a < 1$ のとき、 $s < t \iff \log_a s > \log_a t$ (単調減少)

自然対数 $(a = e = 2.71828\cdots)$ では単調増加：

$$0 < s < t \iff \log s < \log t$$

数列の和

1. $1+2+3+\cdots+n$
$= n+(n-1)+\cdots+1 = (n+1)\cdot n\cdot\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
3. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$
$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
4. 積の個数を増やしたら？
積分との比較：$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3},\ \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4},\cdots$

数列の和 (2)

❶ $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ は $n \to \infty$ とすると発散.

$$\begin{aligned}
\because\ H_n &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(4 \times \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \to \infty\,(n \to \infty)
\end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

は極限値 $\frac{1}{2}$ へ収束.

三角関数, 逆三角関数の要点

三角関数

$$\left.\begin{array}{l} y = \sin(x) \\ y = \cos(x) \\ y = \tan(x) \end{array}\right\} ; \text{角度 (ラジアン)} x \mapsto \text{辺の長さ（値）} y$$

への関数であり、逆三角関数は、
辺の長さ（値） x から対応する角度（ラジアン） θ を定める。

$$\begin{array}{lcl} \sin^{-1}(x) = \theta & \Leftrightarrow & \sin(\theta) = x, \\ \cos^{-1}(x) = \theta & \Leftrightarrow & \cos(\theta) = x, \\ \tan^{-1}(x) = \theta & \Leftrightarrow & \tan(\theta) = x. \end{array}$$

具体例

1. 正方形の辺、対角線と頂点の内角； $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$
$\frac{90^o}{2} = 45^o = \frac{\pi}{4} \quad \mapsto$
$\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} = 90^o$,
$\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} = 45^o$,
$\cos^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} = 90^o$, $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} = 45^o$,
$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = 45^o$
(直角 2 等辺三角形だから、正弦、余弦も同じ角度)
2. 正三角形の一辺の半分と高さ： $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \mapsto$
$\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$,
$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$,
$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.
(tan の値は角度が $\frac{\pi}{2}$ 以下でも、1 よりも大きくなる)

正五角形、ペンタゴンの例

1. 正五角形の内角；辺の長さには黄金比 $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\ldots = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}} = \dfrac{1}{1.61803\ldots}$ が表れる。
内角は $72^o = \frac{2\pi}{5}$ であり、中心角 (頂角) 72^o をもつ両底角が $36^o = \frac{\pi}{5}$ 二等辺三角形を考える。
$\sin(\pi/10) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(2\pi/5)$, $\cos(\pi/5) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$,
これらを定める方程式 $x = \varphi$ は, $x^2 + x - 1 = 0$ で
$x = \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \cdots$ という形になる。